ВЕСТНИК ВГУ, Серия: Физика. Математика, 2005, № 1

УДК 62-50

КОНЕЧНОМЕРНЫЙ МОДАЛЬНЫЙ РЕГУЛЯТОР ДЛЯ ОБЪЕКТОВ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

А. В. Дылевский, Г. И. Лозгачев

Воронежский государственный университет

Рассматривается задача синтеза модального конечномерного регулятора для объекта с запаздыванием. Метод синтеза регулятора сводится к решению полиномиального уравнения и обеспечивает не только устойчивость замкнутой системы управления, но и заданные показатели качества переходного процесса.

ВВЕДЕНИЕ

В теории автоматического управления сохраняется постоянный интерес к системам с запаздыванием [1—3]. Это объясняется тем, что в большинстве производственных процессов имеются запаздывания, которыми нельзя пренебречь. Основная трудность при анализе и синтезе таких систем состоит в том, что звено чистого запаздывания является бесконечномерным.

Рассмотрим кратко основные методы решения задачи синтеза регуляторов для объектов с запаздыванием. Первый подход связан с идеей компенсации запаздывания в объекте путем введения компенсирующей обратной связи [1, 3, 4]. К регуляторам такого типа относятся регуляторы Смита [1, 4] и Ресвика [1]. Основной недостаток этих регуляторов, помимо трудностей с практической реализацией элемента запаздывания в компенсирующей обратной связи, состоит в том, что система регулирования является работоспособной только для объектов с нулевыми начальными условиями. Для нейтральных и неустойчивых объектов при ненулевых начальных условиях система становится неработоспособной. При этом анализ качества системы с регулятором Смита показал [1], что в некоторых случаях вместо регулятора Смита можно использовать типовые регуляторы непрерывного действия, например ПИД-регулятор. Эти результаты приводят к выводу, что объектом с запаздыванием можно управлять с помощью конечномерного регулятора, описываемого дробно-рациональной передаточной функцией. В частности, метод синтеза регуляторов по передаточной функции замкнутой системы [3, 5, 6] позволяет синтезировать как регулятор Смита с компенсацией запаздывания, так и конечномерные модальные регуляторы, обеспечивающие не только устойчивость системы, но и требуемые показатели качества переходного процесса.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Обозначим через $\mathcal{R}_n$ множество алгебраических многочленов степени n над полем действительных чисел $\mathbb{R}$. Пусть H_n — множество многочленов Гурвица из $\mathcal{R}_n$.

Для заданного объекта с запаздыванием

$$W(p) = \frac{B(p)}{A(p)} e^{-\tau p},\ A(p) \in \mathcal{R}_m,\ B(p) \in \mathcal{R}_l, \quad m \geq l;\ \tau \geq 0, \tag{1}$$

требуется найти передаточную функцию реализуемого регулятора

$$V(p) = \frac{S(p)}{R(p)},\ S(p) \in \mathcal{R}_s,\ R(p) \in \mathcal{R}_r, \quad s \leq r < +\infty, \tag{2}$$

обеспечивающего устойчивость и требуемые показатели качества переходного процесса замкнутой системы управления, структурная схема которой представлена на рис. 1.

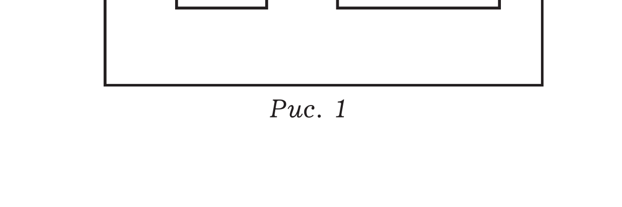

Рис. 1

Таким образом, сформулированная выше задача сводится к проблеме синтеза конечномерного регулятора для бесконечномерного объекта, которым является объект с запаздыванием.

2. СИНТЕЗ МОДАЛЬНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ

Для решения поставленной задачи рассмотрим аппроксимации Паде экспоненциальной функции. Согласно [7, 8] имеем

$$e^{-\tau p} = \frac{M(p)}{L(p)} + \Delta(p), \tag{3}$$

где

$$\begin{gathered} L(p) = \sum_{i=0}^{k} \frac{(2k-i)!}{i!(k-i)!}(\tau p)^i, \ \ M(p) = L(-p), \\ \Delta(p) = \frac{(-1)^{k+1}\pi}{2^{4k+1}(k!)^2}(\tau p)^{2k+1} e^{-\tau p\left(1-\frac{\tau p}{4(2k+1)}\right)}(1+O(k^{-1})). \end{gathered} \tag{4}$$

Здесь $\Delta(p)$ — ошибка аппроксимации. Следует отметить, что $L(p) \in H_k$ (см. [8]).

Далее рассмотрим объект с передаточной функцией

$$W_0(p) = \frac{B(p)}{A(p)}\frac{M(p)}{L(p)}. \tag{5}$$

Как показано в [5, 6], регулятор для объекта (5) может быть определен в виде (2), где многочлены $S(p) \in H_{m+k-1}$ и $R(p) \in H_{n-m-k}$ являются решением следующего полиномиального уравнения:

$$B(p)M(p)S(p) + A(p)L(p)R(p) = D(p)$$

или, учитывая устойчивость многочлена $L(p)$,

$$B(p)M(p)S_0(p) + A(p)R(p) = D_0(p). \tag{6}$$

Здесь $S(p) = S_0(p)L(p)$, $D_0(p)$ — произвольный многочлен из класса H_{n-k} такой, что $D(p) = D_0(p)L(p) \in H_n$, $n \ge 2(m+k)$, — характеристический многочлен замкнутой системы с передаточной функцией

$$\Phi_0(p) = \frac{V(p)W_0(p)}{1+V(p)W_0(p)}. \tag{7}$$

Следует отметить [5, 6, 9], что $S_0(p)$ представляет собой интерполяционный многочлен Эрмита

$$S_0(p) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\Gamma} \frac{A(s)-A(p)}{A(s)(s-p)}\frac{D_0(s)}{B(s)M(s)}ds, \tag{8}$$

где Γ — контур, содержащий все корни многочлена $A(p)$. Кроме того, при известном $S_0(p)$ многочлен $R(p)$ может быть найден по формуле

$$R(p) = \frac{D_0(p) - B(p)M(p)S_0(p)}{A(p)}.$$

Замечание 1. *Для обеспечения астатизма порядка ν вместо многочлена $A(p)$ следует рассматривать многочлен $A^*(p) = p^{\nu}A(p)$ и использовать метод синтеза модальных регуляторов, изложенный в [5, 6].*

3. ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ

Исследуем устойчивость замкнутой системы управления с передаточной функцией

$$\Phi(p) = \frac{V(p)W(p)}{1+V(p)W(p)}, \tag{9}$$

где $W(p)$ и $V(p)$ определяются соответственно формулами (1) и (2).

Из формулы (3) сразу следует, что

$$e^{-\tau p} = \frac{M(p)}{L(p)}(1+\Delta_0(p)), \tag{10}$$

где

$$\Delta_0(p) = \frac{\Delta(p)L(p)}{M(p)} = \frac{e^{-\tau p} - M(p)/L(p)}{M(p)/L(p)}. \tag{11}$$

Отсюда после элементарных преобразований находим

$$\Phi(p) = \frac{\Phi_0(p)(1+\Delta_0(p))}{1+\Phi_0(p)\Delta_0(p)}. \tag{12}$$

Для анализа устойчивости передаточной функции $\Phi(p)$ воспользуемся теоремой о малом коэффициенте усиления [12], которая основана на известном критерии Найквиста [11].

Теорема 1. *Если объект с передаточной функцией $\Phi_0(p)$ устойчив, а система с передаточной функцией $\frac{\Phi_0(p)}{1+\Phi_0(p)\Delta_0(p)}$ сохраняет устойчивость не для любого значения $\Delta_0(p)$, то найдется такая функция $\Delta_0(p)$ и такая частота $\omega^* \ge 0$, что выполнится равенство*

$$1 + \Phi_0(j\omega^*)\Delta_0(j\omega^*) = 0. \tag{13}$$

Это ознначает, что годограф Найквиста $\Phi_0(j\omega)\Delta_0(j\omega)$ на частоте $\omega = \omega^*$ пройдет через точку $(-1, j0)$ на комплексной плоскости.

Справедливо и обратное утверждение.

Теорема 2. *Если объект с передаточной функцией устойчив* $\Phi_0(p)$ *и если для любого значения* $\Delta_0(p)$ *и любой частоты* $\omega \ge 0$ *равенство (13) выполнено быть не может, то система с передаточной функцией* $\dfrac{\Phi_0(p)}{1+\Phi_0(p)\Delta_0(p)}$ *не может потерять устойчивость ни при каком значении* $\Delta_0(p)$.

Очевидно, что условие (13) никогда не выполнится, если будет справедливо неравенство

$$1+\Phi_0(j\omega)\Delta_0(j\omega) \ne 0 \;\; \forall \omega \ge 0,$$

или, что тоже самое,

$$\Phi_0(j\omega)\Delta_0(j\omega) \ne -1 \;\; \forall \omega \ge 0.$$

Таким образом, выполнение неравенства

$$\left|\Phi_0(j\omega)\Delta_0(j\omega)\right| < 1 \;\; \forall \omega \ge 0 \qquad (14)$$

гарантирует устойчивость замкнутой системы управления с передаточной функцией $\Phi_0(p)$, т.е. системы с запаздыванием (1). Покажем, что для любого объекта с запаздыванием (1) найдется регулятор с передаточной функцией (2), обеспечивающий выполнение условия (14).

Действительно, согласно формулам (1), (2), (6) и (9) имеем

$$\left|\Phi_0(j\omega)\Delta_0(j\omega)\right| = \frac{\left|S(j\omega)B(j\omega)L(j\omega)\right|}{\left|D(j\omega)\right|}\left|\Delta(j\omega)\right|.$$

Учитывая обозначения $S(p)=S_0(p)D(p)$ и $D(p)=D_0(p)L(p)$, находим

$$\left|\Phi_0(j\omega)\Delta_0(j\omega)\right| = \frac{\left|S_0(j\omega)B(j\omega)L(j\omega)\right|}{\left|D_0(j\omega)\right|}\left|\Delta(j\omega)\right| = \frac{\left|S_0(j\omega)B(j\omega)\right|}{\left|D_1(j\omega)\right|}\left|\Delta(j\omega)\right|.$$

Здесь $D_0(p)=D_1(p)L(p)$.

Для дальнейших рассуждений найдем оценку модуля многочлена $S_0(p)$. Из формулы (8) после элементарных преобразований получаем

$$\left|S_0(p)\right| \le r\max_{|z|=r}\frac{\left|A(z)-A(p)\right|}{\left|A(z)B(z)(z-p)\right|}\times \frac{\prod\limits_{i=1}^{n-2k}\left(\left|\lambda_i\right|+r\right)\prod\limits_{i=1}^{k}\left|\left|\beta_i\right|+r\right|}{\prod\limits_{i=1}^{k}\left|\left|\beta_i\right|-r\right|},$$

где r — радиус окружности, содержащей все корни многочлена $A(p)$; λ_i — корни многочлена $D_1(p)$; β_i — корни многочлена $M(p)$. Так как $M(p)=L(-p)$, то, очевидно, что $-\beta_i$ — корни многочлена $L(p)$.

Отметим, что для многочлена

$$A(p)=a_0p^m+a_1p^{m-1}+\ldots+a_{m-1}p+a_m$$

радиус r можно выбирать исходя из следующего условия [10]:

$$r \ge 1+\frac{a_{\max}}{\left|a_0\right|},\;\; a_{\max}=\max\left\{\left|a_1\right|,\left|a_2\right|,\ldots,\left|a_m\right|\right\}.$$

Из теоремы о кольце [8] сразу следует, что

$$2k\mu \ge \left|\beta_i\right| \ge 2k+4/3,$$

где $\mu=0,278465$ — единственный положительный корень уравнения $te^{t+1}=1$. Тогда $\forall k > r/2\mu$ имеет место следующая оценка:

$$\left|S_0(p)\right| \le \left|\rho_{m-1}(p)\right|\frac{(\lambda+r)^{n-2k}(2k+4/3+r)^k}{(2k\mu-r)^k}. \qquad (15)$$

Здесь

$$\left|\rho_{m-1}(p)\right| = r\max_{|z|=r}\frac{\left|A(z)-A(p)\right|}{\left|A(z)B(z)(z-p)\right|},\;\; \lambda=\max_{i=\overline{1,n-2k}}\left|\lambda_i\right|.$$

Итак,

$$\left|\Phi_0(j\omega)\Delta_0(j\omega)\right| = \left|\rho_{m-1}(j\omega)B(j\omega)\Delta(j\omega)\right|\times \frac{(\lambda+r)^{n-2k}(2k+4/3+r)^k}{(\lambda^2+\omega^2)^{\frac{n-2k}{2}}(2k\mu-r)^k} = \Psi(\omega,\lambda,n,k). \qquad (16)$$

Принимая во внимание формулу (4), получаем

$$\left|\Delta(j\omega)\right| = \frac{\pi(\tau\omega)^{2k+1}}{2^{4k+1}(k!)^2}e^{-\frac{\tau^2\omega^2}{4(2k+1)}}(1+O(k^{-1})). \qquad (17)$$

Нетрудно заметить, что

$$\left|\Delta(0)\right|=0,\;\; \lim_{\omega\to\infty}\left|\Delta(j\omega)\right|=0. \qquad (18)$$

Так как произведение $\rho_{m-1}(j\omega)B(j\omega)$ не зависит от λ, n и k, то в силу соотношений (16)—(18), справедливо утверждение

$$\exists k\in\mathbb{N}\;\exists n\in N: n\ge 2(m+k)\;\exists\lambda > 0\;(\Psi(\omega,\lambda,n,k)<1)\;\forall\omega\ge 0.$$

4. АНАЛИЗ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

Рассмотрим далее вопрос об установлении зависимости между погрешностью аппроксимации частотной характеристики и соответствующей ошибкой в определении переходной функции для системы с запаздыванием в канале управления.

Пусть

$$\Theta(p) = \Phi(p) - \Phi_0(p).$$

Согласно равенству (12) получаем

$$\Theta(p) = \frac{(1-\Phi_0(p))\Delta_0(p)\Phi_0(p)}{1+\Phi_0(p)\Delta_0(p)}.$$

Так как имеет место неравенство (14), то найдется такое действительное число ε, $0 < \varepsilon < 1$, что

$$0 < \varepsilon < 1 - \left|\Phi_0(j\omega)\Delta_0(j\omega)\right| \ \ \forall\omega \ge 0.$$

Поэтому

$$\left|\Theta(j\omega)\right| < \left|1-\Phi_0(j\omega)\right|\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} =$$

$$= \frac{\left|A(j\omega)R(j\omega)\right|}{\left|D_0(j\omega)\right|}\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \ \ \forall\omega \ge 0.$$

Предположим, что частотная характеристика $\gamma(\omega) = \left|A(j\omega)R(j\omega)\right|\left|D_0(j\omega)\right|$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\gamma(\omega) = 0, \ \ 0 \le \omega \le \omega_1;$$

$$\gamma(\omega) \le \chi, \ \ \omega_1 \le \omega \le \omega_2,$$

причем функция $\gamma(\omega)$ имеет N экстремумов в интервале $\omega_1 < \omega < \omega_2$ и является не возрастающей при $\omega \ge \omega_2$. Очевидно, что в данном случае это условие выполняется, так как $A(p)$, $R(p)$, $D_0(p)$ — многочлены, $\left|D_0(j\omega)\right| > 0$ $\forall\omega \ge 0$ и $\deg A(p)R(p) = \deg D_0(p) = n-k$. Тогда, как показано в [11], переходные процессы $h(t)$ и $h_0(t)$, вызванные единичным ступенчатым воздействием, будут отличаться не более чем на величину интеграла

$$\left|h(t) - h_0(t)\right| \le \frac{2(1-\varepsilon)\chi}{\pi\varepsilon}\int\limits_0^{N\pi}\left|\frac{\sin\omega}{\omega}\right|d\omega.$$

Таким образом, проблема качества переходного процесса системы с запаздыванием сводится к задаче аппроксимации запаздывающего звена дробно-рациональной функцией и последующего синтеза модального регулятора для аппроксимирующего звена. Действительно, увеличение точности аппроксимации звена с запаздыванием гарантирует, что амплитудно-фазовые характеристики соответствующих разомкнутых систем будут мало отличаться. Это, в свою очередь, позволит получить достаточно близкие переходные процессы (при условии, что задача обеспечения устойчивости решена).

5. ПРИМЕР

Сравним качество регулятора Смита и конечномерного регулятора, синтезированного с помощью описанной выше методики. Пусть задан нейтральный объект второго порядка

$$\ddot{x}(t) = u(t-1)$$

с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{e^{-p}}{p^2}. \qquad (19)$$

На рис. 2 представлена блок-схема системы управления с регулятором Смита [3], где

$$V_s(p) = \frac{67,4000p^3 + 174,2000p^2 + 224,4384p + 115,3152}{p^3 + 13p^2}.$$

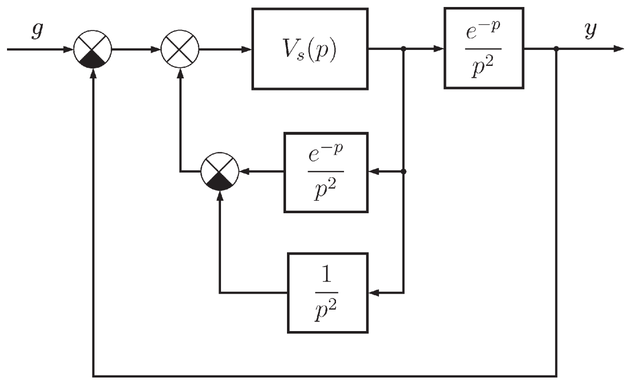

Рис. 2

Нетрудно проверить, что передаточная функция соответствующей замкнутой системы имеет вид

$$\Phi_s(p) =$$

$$= \frac{(67,4000p^3 + 174,2000p^2 + 224,4384p + 115,3152)e^{-p}}{(p+2,2)(p+2,4)(p+2,6)(p+2,8)(p+3,0)}.$$

Пусть

$$\frac{M(p)}{L(p)} = \frac{120 - 60p + 12p^2 - p^3}{120 + 60p + 12p^2 + p^3}$$

и

$$D(p) = D_0(p)L(p),$$

где

$$D_0(p) = (p+2,2)(p+2,4)(p+2,6)\times$$
$$\times(p+2,8)(p+3,0)(p+3,2)(p+3,4).$$

Синтезируем теперь конечномерный астатический регулятор $V(p) = S(p)/R(p)$. Имеем

$$S(p) = 44,0132p^5 + 560,0775p^4 + 3034,2758p^3 +$$
$$+7322,1894p^2 + 4457,5995p + 1254,6293;$$
$$R(p) = p^5 + 19,6000p^4 + 208,0932p^3 +$$
$$+264,2406p^2 + 4375,6892p$$

Передаточная функция соответствующей замкнутой системы для объекта (19) равна

$$\Phi(p) = \frac{S(p)e^{-p}}{p^2R(p) + S(p)e^{-p}}.$$

При этом

$$\Phi_0(p) = \frac{S(p)M(p)}{D(p)}.$$

Переходные характеристики $h_s(t)$, $h_0(t)$ и $h(t)$ для систем регулирования с передаточными функциями соответственно $\Phi_s(p)$, $\Phi_0(p)$ и $\Phi(p)$ представлены на рис. 3—4. Рис. 3 соответствует нулевым начальным условиям $x(0) = \dot{x}(0) = 0$, рис. 4 — начальным условиям $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1$.

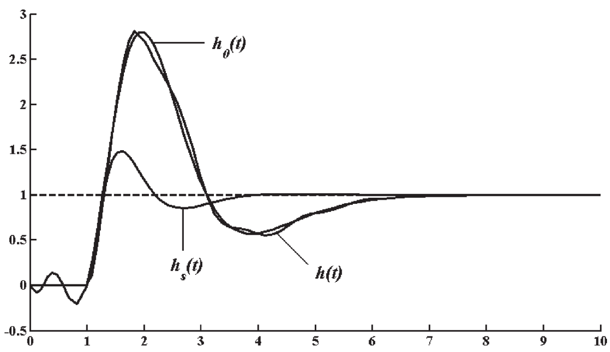

Рис. 3

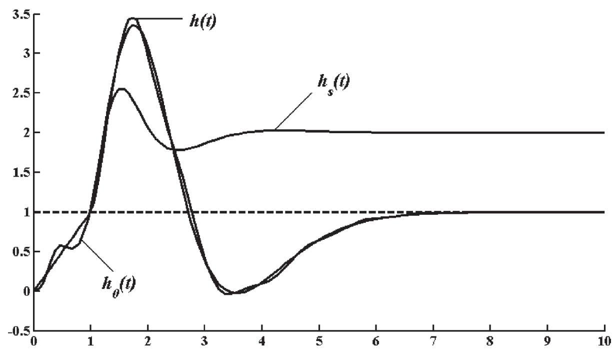

Рис. 4

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гурецкий Х.* Анализ и синтез систем управления с запаздыванием. — М.: Машиностроение, 1974. — 328 с.

2. *Воронов А. А.* Основы теории автоматического управления: Особые линейные и нелинейные системы. — М.: Энергоиздат, 1981. — 304 с.

3. *Дылевский А.В., Лозгачев Г.И.* Построение регулятора для объекта с распределенными параметрами по передаточной функции замкнутой системы // Вестник ВГУ. Серия физика, математика. № 2. 2004. С. 154—157.

4. *Smith O. J. M.* Closer Control of Loops with Dead Time // Chem. Eng. Progr. 1957. V. 53. P. 217.

5. *Дылевский А.В., Лозгачев Г.И.* Синтез модальных систем управления // Вестник ВГУ. Серия физика, математика. № 1. 2004. С. 103—109.

6. *Дылевский А.В., Лозгачев Г.И.* Синтез линейных систем управления с заданным характеристическим полиномом // Известия РАН. Теория и системы управления. № 4. 2003. С. 17—20.

7. *Люк Ю.* Специальные математические функции и их аппроксимации. — М.: Мир, 1980. — 608 с.

8. *Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П.* Аппроксимации Паде. — М.: Мир, 1986. — 502 с.

9. *Уолш Дж. Л.* Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области. — М.: Изд-во Иностранной литературы, 1961. — 508 с.

10. *Кострикин А. И.* Введение в алгебру. — М.: Наука, 1977. — 498 с.

11. Теория автоматического регулирования / Под ред. В. В. Солодовникова. — М.: Машиностроение, Т. 1, 1967. — 770 с., Т.2, 1967. — 682 с.

12. *Zames G.* On the input-output stability of time-varying nonlinear feedback systems. Part I, II // IEEE Trans. on Automatic Control. — 1966. — Vol. 11, №. 2. — P. 228—238; Vol. 11, № 3. — P. 456—476.