УДК 621.3.015.4

ФИЗИЧЕСКОЕ ТОЛКОВАНИЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО РЕЗОНАНСА, ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ПОДХОД

Н. Д. Бирюк, Ю. Б. Нечаев, В. Н. Финько

Воронежский государственный университет

На основании только физических соображений с использованием простых энергетических преобразований рассмотрено явление накачки энергии в параметрический контур частного вида. Выделено два крайних случая: синхронный и асинхронный. В первом случае она минимальна, во втором — максимальна. Предлагаемый подход допускает обобщение на сложные случаи, которые трудно поддаются физической интерпретации

Явление параметрического резонанса заключается в том, что в электрическом колебательном контуре с периодически изменяющимися реактивностями свободный процесс беспредельно возрастает (контур неустойчив по Ляпунову). Исследование этого явления сопряжено с большими математическими трудностями [1—3], которые не преодолены полностью до настоящего времени, так что, можно сказать, практические потребности в анализе этого явления остаются в силе. Как известно, адекватный математический аппарат при исследовании радиофизических проблем имеет непреходящее значение. Обычно в физических задачах составления математических уравнений, промежуточные и конечные результаты сопровождаются достаточно простым физическим толкованием. Тогда получается полная, логически связанная картина, согласующаяся с нашим физическим мировоззрением. В таких случаях обычно возникают идеи, способствующие развитию и обобщению полученного решения.

В случае параметрического резонанса с физическим толкованием возникают характерные трудности. Дело в том, что это весьма тонкое явление, связанное с понятием неустойчивости по Ляпунову линейных систем. В таких случаях неустойчивость достигается за счет малых накоплений на бесконечном интервале времени. Как малые накопления, так и бесконечный интервал неудобны для наглядного представления и физического толкования. Поэтому исследование параметрического резонанса часто ограничивают формальными математическими задачами. Обычно они бывают идеализированными, так что при сопоставлении с практикой возникают трудности. В данной публикации делается попытка выделить характерный частный случай параметрического резонанса и дать его качественный анализ с помощью максимально простого математического аппарата, опираясь главным образом, на физические закономерности.

Рассмотрим последовательный резонансный контур, представленный на рис. 1. Сначала в методических целях предположим, что элементы контура C, L, R постоянны. Как известно, свободный процесс заключается в том, что энергия, запасенная в реактивностях, постоянно перекачивается из емкости в индуктивность и наоборот, при этом часть электромагнитной энергии теряется в активном сопротивлении, преобразуясь в теплоту. При этом ток изменяется во времени по закону «затухающей косинусоиды»

$$i = I_m e^{-\alpha t} \cos(\omega_c t + \varphi),,$$

где $\alpha = R/2L$ — коэффициент затухания, $\omega_c = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ — частота свободных колебаний, $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ — собственная частота

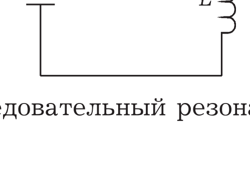

Рис. 1. Последовательный резонансный контур

контура. Мгновенные энергии, запасенные соответственно в емкости и индуктивности равны

$$W_c = \frac{q^2}{2C} = \frac{Cu_c^2}{2}, W_L = \frac{\Phi^2}{2L} = \frac{Li_L^2}{2}, \qquad (1)$$

где q — заряд конденсатора; u_C — напряжение на конденсаторе; Φ — магнитный поток, сцепляющийся с катушкой индуктивности; i_L — ток индуктивности (в данном случае совпадающий с током контура i). Обе энергии колеблются во времени с удвоенной частотой $2\omega_c$ свободных колебаний, постепенно уменьшаясь. Как видно, свободный процесс в обычном контуре при $R > 0$ всегда затухающий, т.е. обычный контур всегда асимптотически устойчив по Ляпунову. Если же реактивности изменяются во времени по периодическим законам $C(t+T) = C(t)$, $L(t+T) = L(t)$, где T — период, то свободный процесс может быть как затухающим, так и беспредельно возрастающим. В последнем случае контур неустойчив по Ляпунову и имеет место параметрический резонанс. Возможен и промежуточный случай, когда контур не является ни затухающим, ни беспредельно возрастающим, т.е. его ток всегда меньше по модулю некоторого постоянного значения. В таком случае контур устойчив (неасимптотически) по Ляпунову. Разделить эти качественно разные явления — сложная задача как в математическом, так и в физическом отношении. Параметрический резонанс проявляется наиболее сильно, когда реактивности изменяются скачком. Рассмотрим несколько частных случаев.

Пусть емкость уменьшается скачком в тот момент, когда запасенная в ней энергия максимальна и равна полной энергии, запасенной в контуре. Через четверть периода конденсатор будет незаряжен и запасенная в нем энергия равна нулю, в этот момент конденсатор скачком увеличивается до прежнего значения. При этом запасенная в контуре энергия не изменится. И так все периодически повторяется, в результате чего энергия вкладывается в контур через емкость два раза за период. При анализе этого явления очень важно выбрать подходящее выражение для энергии. Поэтому рассмотрим два случая.

Проанализируем выражение

$$W_c = \frac{q_m^2}{2C}, q = \text{const}. \qquad (2)$$

Имеется в виду, что $q_m = Cu_m = \text{const}$ в момент скачкообразного изменения емкости. Тогда очевидно, что если емкость скачкообразно уменьшается, то амплитуда напряжения скачкообразно увеличивается, так что их произведение остается постоянным.

Теперь рассмотрим выражение

$$W_c = \frac{Cu_m'^2}{2}, u_m = \text{const}. \qquad (3)$$

В данном случае $u_m = \dfrac{q_m}{C} = \text{const}$. Если C скачком уменьшается, то и q_m скачком уменьшается, так что дробь q_m / C остается постоянной.

Выражение (2) особых возражений при реализации не вызывает. Напряженность между пластинами при стандартных конструкциях конденсаторов вычисляется в предположении, что его пластины бесконечные, равномерно заряженные, тогда

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0 S}.$$

где S — площадь пластины конденсатора.

Как видно, напряженность электрического поля E не зависит от расстояния между пластинами d. Напряжение между пластинами равно $u = Ed$. Если предположить, что емкость уменьшается скачком за счет скачкообразного увеличения расстояния d между пластинами, то и напряжение между пластинами увеличивается скачком. При этом q, E остаются постоянными. Если предположить, что q изменится скачком, то для этого потребуется бесконечно большой ток $i = \dfrac{dq}{dt}$. Таким образом, выражение (2) вполне приемлемо для реализации.

Рассмотрим выражение (3). Здесь, если C уменьшается скачком, то и q уменьшается скачком, а вместе с ним E уменьшается скачком. При этом получится, что $i = \dfrac{dq}{dt} = \infty$. Если предположить, что емкость уменьшается увеличением расстояния между пластинами d при $u = \text{const}$, то должна уменьшаться и напряженность $E = u/d$, и заряд q. По мере раздвижения пластин заряд должен уменьшаться за счет тока, протекающего между пластинами. При скачкообразном увеличении d ток равен бесконечности. Таким образом, при скачкообразном изменении емкости, выражение (3) не может быть принято к рассмотрению, так как при реализации требуется выполнение нереальных условий. Таким образом, выражение (2) и (3) равноправны в обычном контуре, а в параметрическом контуре справедливым остается выражение (2).

Энергию, запасенную в контуре, можно увеличивать за счет скачкообразного изменения индуктивности. Здесь тоже возможны два варианта. Первый связан с формулой для запасенной в индуктивности энергии, когда она максимальна.

$$W_L = \frac{\Phi_m^2}{2L},\ \Phi_m = \text{const}. \tag{4}$$

индуктивность скачком уменьшается, тогда энергия контура скачком увеличивается. При этом $\Phi_m = LI_m = \text{const}$, т.е. амплитуда тока в индуктивности скачком увеличивается. В таком случае э.д.с. индуктивности $\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}$ не возникает. Здесь принципиальных трудностей при реализации не видно. Как известно, индуктивность соленоида равна

$$L = \mu\mu_0 n^2 V, \tag{5}$$

где n — плотность намотки (1/см — число витков на единицу длины соленоида), μ — магнитная проницаемость пространства внутри соленоида, V — объем пространства внутри соленоида. Индуктивность можно менять вдвижением, например, железного или медного сердечника в соленоид. В первом случае индуктивность увеличивается, во втором — уменьшается. Итак, когда энергия в индуктивности максимальна, железный сердечник выдвигаем (или медный — вдвигаем), индуктивность уменьшается, а ее энергия (4) увеличивается. Через четверть периода железный сердечник вдвигаем, в это время энергия индуктивности равна нулю, так что запасенная энергия в контуре не изменится.

Если таким образом индуктивность будет изменяться периодически, то запасенная энергия в контуре будет увеличиваться два раза за период.

Теперь рассмотрим выражение

$$W_L = \frac{LI_m^2}{2},\ I_m = \text{const}. \tag{6}$$

Имеем $I_m = \frac{\Phi_m}{L} = \text{const}$. Значит, если L скачком уменьшается, то Φ_m тоже скачком уменьшается так, чтобы выполнялось условие $\Phi_m / L = \text{const}$. Но если Φ_m скачком уменьшается, то возникает бесконечная э.д.с. индукции, $\varepsilon_i = -\frac{d\Phi_m}{dt} = \infty$. В таком случае по закону Ленца сердечник соленоида нельзя ни вдвинуть, ни выдвинуть. При реализации возникают непреодолимые трудности. Таким образом, равноправные для обычного контура выражения (4) и (6), в параметрическом контуре становятся неравноправными. При реализации изменения индуктивности выполняется только формула (4).

Из изложенного выше проясняется механизм вложения энергии в контур путем изменения реактивностей. Оценим соответствующие эффекты качественно. При изменении емкости начальная (до изменения емкости) и конечная (после изменения емкости) энергии легко находятся по формуле (2):

$$W_{c1} = \frac{q_m^2}{2C},\ W_{c2} = \frac{q_m^2}{2(C - \Delta C)}. \tag{7}$$

Отсюда находим вклад энергии в контур за один акт уменьшения емкости:

$$\Delta W_C = W_{C2} - W_{C1} = \frac{q_m^2}{2C} \cdot \frac{\Delta C}{C - \Delta C}.$$

Для практики оказывается важным случай $\Delta C \ll C$ при высокодобротном контуре $\omega_c \approx \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. Тогда

$$\Delta W_c \cong \frac{q_m^2}{2C} \cdot \frac{\Delta C}{C} = \frac{I_m^2}{2\omega_0^2\ C} \cdot \frac{\Delta C}{C} = \frac{1}{2} I_m^2 \rho^2 \Delta C, \tag{8}$$

где $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$ — характеристическое сопротивление контура. За период свободного процесса в контур вкладывается две примерно такие порции энергии, т.е.

$$W_T = 2W_c = I_m^2 \rho^2 \Delta C.$$

Это — энергия, вкладываемая в контур за период. Теперь подсчитаем энергию, теряемую за период в сопротивлении R за счет преобразования части электромагнитной энергии в теплоту:

$$W_R = \frac{I_m^2 R}{2} T = \frac{I_m^2 R}{2} \frac{2\pi}{\omega_0} = \pi I_m^2 R\sqrt{LC}. \quad (10)$$

Параметрический резонанс будет иметь место, если $W_T > W_R$ или

$$\frac{L}{C}\Delta C > \pi R\sqrt{LC}, \frac{\Delta C}{C} > \frac{\pi}{Q}, \quad (11)$$

где $Q = \frac{\rho}{R}$ — добротность контура. Получено простое условие параметрического резонанса: относительное изменение емкости по порядку должно быть больше добротности в минус первой степени.

Проведем аналогичную оценку при изменении индуктивности. По формуле (4) получаем запасенную в индуктивности энергию до и после уменьшения индуктивности

$$W_{L1} = \frac{\Phi_m^2}{2L}, W_{L2} = \frac{\Phi_m^2}{2(L-\Delta L)}.$$

При этом получается следующее вложение энергии в контур:

$$\Delta W_L = W_{L2} - W_{L1} = \frac{\Phi_m^2}{2L}\frac{\Delta L}{L-\Delta L} = \frac{LI_m^2}{2}\frac{\Delta L}{L-\Delta L}.$$

В случае $\Delta L \ll L$

$$\Delta W_L \approx \frac{I_m^2}{2}\Delta L = \frac{1}{2} I_m^2 \Delta L. \quad (12)$$

За период контур получит энергию

$$\Delta W_T = 2\Delta W_L = I_m^2 \Delta L. \quad (13)$$

Параметрический резонанс реализуется при условии $\Delta W_T > \Delta W_R$ или

$$\Delta L > \pi R\sqrt{LC} \text{ или } \frac{\Delta L}{L} > \frac{\pi}{Q}. \quad (14)$$

Как и в случае емкости, относительное изменение индуктивности должно быть по порядку величины больше обратной добротности контура. Получилось простое условие параметрического резонанса в случае скачкообразного изменения индуктивности.

Мы рассмотрели случаи, когда емкость скачкообразно уменьшалась именно в тот момент, когда запасенная в ней энергия максимальна, точно так же уменьшалась и индуктивность в том моменте, когда запасенная в ней энергия максимальна. Аналогично можно рассмотреть случаи скачкообразного увеличения емкости и индуктивности в тот момент, когда запасенные в них энергии максимальны. Тогда получатся такие же приращения энергии, как и раньше по выражениям (9) и (13) только со знаками «минус», т.е. энергия не вкладывается в контур, а отбирается от него.

Теперь можно, используя полученные сведения, рассмотреть случай одновременного изменения обеих реактивностей. Здесь возможно много вариантов. Ограничимся рассмотрением двух наиболее характерных случаев: а) $\rho = \mathrm{const}$, б) $\omega_0 = \mathrm{const}$. Случай а) равнозначен $\frac{L(t)}{C(t)} = \mathrm{const}$, поэтому такое изменение реактивностей естественно назвать синхронным. Случай б) равнозначен условию $L(t)\cdot C(t) = \mathrm{const}$, такое изменение реактивностей будем называть асинхронным.

Рассмотрим синхронное изменение реактивностей $L(t) = \mathrm{const}\, C(t)$, $\Delta L = \mathrm{const}\,\Delta C$. Допустим, что емкость и индуктивность уменьшаются тогда, когда запасенная в емкости энергия максимальна. Тогда в контур вносится энергия (8) за счет изменения емкости

$$\Delta W_c = \frac{1}{2} I_m^2 \rho^2 \Delta C = \frac{1}{2} I_m^2 L \frac{\Delta C}{C}. \quad (15)$$

Через четверть периода, когда энергия контура перекачается в индуктивность, индуктивность и емкость одновременно, скачком увеличиваются. Тогда энергия выкачивается из контура за счет изменения индуктивности. Величина этой энергии определяется по формуле (15), со знаком «минус»:

$$\Delta W_L = -\frac{1}{2} I_m^2 \Delta L = -\frac{1}{2} I_m^2 L \frac{\Delta L}{L} = -\frac{1}{2} I_m^2 L \frac{\Delta C}{C}.$$

Получилось, что энергия (12), которая раньше была вложена в контур, через четверть периода согласно (13) была выкачана из контура. Это значит, что при синхронном изменении реактивностей параметрический контур неустойчивым быть не может, в таком случае параметрический резонанс не возникает. Можно показать с помощью второго метода Ляпунова, что это заключение справедливо при любом, одном и том же законе изменения во времени емкости и индуктивности. Следовательно, если контур возбудился из-за изменения во времени одной (допустим, емкости), то его можно стабилизировать, изменяя синхронно во времени другую реактивность (индуктивность).

Рассмотрим случай асинхронного изменения реактивностей $C(t)L(t)=\mathrm{const}$. Имеем $L(t)=\dfrac{\mathrm{const}}{C(t)}$, $\Delta L=-\mathrm{const}\ \dfrac{\Delta C}{C^2}$. В этом случае формулы (8) и (12) могут быть приведены к виду

$$\Delta W_C=\frac{1}{2}I_m^2\rho^2\Delta C=\frac{1}{2}I_m^2L\frac{\Delta C}{C},$$
$$\Delta W_L=\frac{1}{2}I_m^2\Delta L=\frac{1}{2}I_m^2L\frac{\Delta L}{L}=-\frac{1}{2}I_m^2L\frac{\Delta C}{C}.$$

Получается, что когда емкость убывает, индуктивность возрастает. Если емкость накачивает энергию в контур, то в этот момент индуктивность выкачивает энергию из контура. Результат зависит от соотношения запасенных энергий в обеих реактивностях в этот момент. В нашем случае изменения реактивностей во времени особые, поэтому следует ожидать и особого результата. Пусть в некоторый момент времени вся энергия контура сосредоточена в емкости, при этом емкость скачком уменьшается, вследствие чего энергия в контур накачивается. В это же время индуктивность скачком увеличивается, за счет этого, вообще говоря, энергия должна выкачиваться из контура. Но в этот момент энергия в индуктивности равна нулю, поэтому выкачивания не происходит. Через четверть периода вся энергия контура будет сосредоточена в индуктивности, в этот момент индуктивность скачком уменьшается, а емкость скачком увеличивается. За счет того, что индуктивность уменьшается, энергия накачивается в контур. При увеличении емкости энергия должна выкачиваться из контура, но в данный момент времени энергии в емкости нет, поэтому выкачивания энергии не происходит. И далее все периодически повторяется. Получается, что энергия через каждые четверть периода накачивается в контур то емкостью, то индуктивностью. При асинхронном изменении реактивностей контур может быть либо неустойчивым, либо устойчивым, но эта устойчивость по сравнению с другими аналогичными случаями наиболее близка к неустойчивости. Это утверждение нуждается в пояснении. Допустим, при некоторых законах изменения реактивностей $L(t)$, $C(t)$ имеем асинхронное изменение, причем можно вводить задержку или упреждение во времени в каком-нибудь из этих законов, скажем, для емкости $C(t+t_0)$, t_0 можем задавать произвольно, т.е. сам закон изменения емкости не меняется, но может быть сдвинут во времени, при $t_0=0$ получается асинхронное изменение. Теперь высказанное выше утверждение можно сформулировать точно. Если при асинхронном изменении реактивностей ($t_0=0$) контур устойчив, то при любом t_0 он будем тем более устойчив. Если при $t_0=0$ контур неустойчив, то, вообще говоря, при любом t_0 ничего нельзя сказать об устойчивости контура.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Решение сложной физической задачи, как правило, представляет собой своеобразный сплав из выстроенной логической последовательности физических и математических закономерностей. Удельный вес тех и других может быть разным, но в идеале для каждой задачи он должен быть вполне определенным. Удивительная гармония между физическими и математическими подходами содержится в творчестве академика Л. И. Мандельштама [4]. В частности, в статье [5] анализируется параметрический контур с изменяющейся во времени емкостью с позиций энергетики. Интересно отметить, что в радиофизической литературе незаслуженно мало внимания уделяется параметрическому контуру с обеими изменяющимися во времени реактивностями, хотя очевидно, что в таком случае потенциальные возможности контура заметно расширяются. Именно эта задача рассмотрена в настоящей статье, причем решалась она исключительно физическими методами. Они дали возможность, по-видимому, впервые выделить характерные, синхронные и асинхронные, случаи изменения реактивностей. Области применимости физических и математических решений различны, они взаимно дополняют друг друга и позволяют, как бы рассмотреть проблему с разных позиций. Иллюстрацией к этому может быть параметрический контур по рис. 1, в котором реактивности постоянны , а активное сопротивление $R = R(t) > 0$ может изменяться во времени по любому закону без каких-либо ограничений, оставаясь всегда положительным. Решение этой задачи математическими методами не получается. С физической точки зрения решение находится элементарно. Поступления энергии в контур нет, в то же время расход ее, т.е. преобразование в теплоту в активном сопротивлении , не прекращается. Следовательно, такой контур асимптотически устойчив. Бывает и наоборот, т.е. полезная информация извлекается только после решения сложной математической задачи. Подход и результаты настоящей статьи могут быть обобщены в двух направлениях: применительно к более сложным параметрическим радиоцепям и применительно к нелинейным радиоцепям. Существует, к сожалению, мало известный в радиофизических кругах принцип линейного включения, утверждающий, что любое решение нелинейной системы может быть представлено как решение эквивалентной линейной системы. Здесь под линейной системой подразумевается именно параметрическая система.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Якубович В.А., Старжинский В.М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. — М.: Наука, 1972. — 718 с.

2. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967. — 472 с.

3. *Зайцев В.Ф., Полянин А.Д.* Справочник по линейным обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Факториал, 1997. — 304 с.

4. Академик Л.И. Мандельштам. Лекции по теории колебаний. — М.: Наука, 1972. — 470 с.

5. *Мандельштам Л.И.* О возбуждении колебаний в электрической колебательной системе при помощи периодического изменения емкости. — Полное собрание трудов. — Т. 2. — Изд. АН СССР, 1947. — С. 63—69.