МАТЕМАТИКА

УДК 519.6

ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ И ОРТОГОНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ЦИКЛИЧЕСКИХ СДВИГОВ

Е. В. Акиндинова, А. И. Барсукова, Л. А. Минин

Воронежский государственный университет

В статье изучаются базисы векторов, представляющих собой циклические сдвиги одного вектора. Предлагается способ построения ортонормированного базиса из собственных векторов дискретного преобразования Фурье в случае пространств четной размерности.

ВВЕДЕНИЕ

Дискретное преобразование Фурье (ДПФ) — это один из наиболее используемых методов в современных научных и технических расчетах. Вопрос о соотношении непрерывного и дискретного преобразований Фурье можно рассматривать не только с точки зрения численной реализации алгоритмов и оценки погрешности (см., например, [1—5]), но и изучая сохранение в дискретном случае тех или иных алгебраических свойств.

Хорошо известен ортонормированный базис из собственных функций непрерывного преобразования Фурье (функций Эрмита). Различные базисы из собственных векторов ДПФ рассматривались в работах [6—9], подробный исторический обзор приведен в [10].

В настоящей статье предложены ортонормированные базисы из циклических сдвигов одного вектора и из построенных на их основе собственных векторов ДПФ. Изучено изменение структуры спектра при модификации ДПФ.

При решении этих задач используются суммы Гаусса [10, 11, 12], с помощью которых можно аналитически считать ДПФ для широкого класса векторов.

1. СТРУКТУРА СПЕКТРА ДПФ

Рассмотрим обычное и модифицированное, со сдвигом на $1/2$ в аргументе, дискретные преобразования Фурье

$$(Fu)_j = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{l=0}^{n-1} u_l \varepsilon^{-lj}, \ j = 0,1,\ldots,n-1, \quad (1.1)$$

$$(\tilde{F}u)_j = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{l=0}^{n-1} u_l \varepsilon^{-(l+\frac{1}{2})(j+\frac{1}{2})}, \ j = 0,1,\ldots,n-1. \quad (1.2)$$

Здесь u — исходный вектор, $u \in \mathbb{C}^n$, Fu — его Фурье-образ, $\varepsilon = exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right)$, $\varepsilon^n = 1$.

Запишем также матрицы этих преобразований

$$F = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\varepsilon^{-jl}\right)_{j,l=0}^{n-1}, \ \tilde{F} = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\varepsilon^{-(l+\frac{1}{2})(j+\frac{1}{2})}\right)_{j,l=0}^{n-1}. \quad (1.3)$$

Хорошо известно, что $F^4 = \tilde{F}^4 = I$, где I — единичная матрица, то есть собственные числа этих матриц могут принимать одно из четырех значений ± 1 и $\pm i$. Кроме того, обе матрицы унитарные и имеют ортонормированные базисы из собственных векторов.

Введем следующие обозначения

$$E_\mu = \{u : Fu = \mu u\}, \ d_\mu = \dim E_\mu,$$
$$\tilde{E}_\mu = \{u : \tilde{F}u = \mu u\}, \ \tilde{d}_\mu = \dim \tilde{E}_\mu.$$

Задача о размерностях собственных подпространств E_μ при произвольных значениях n была полностью решена в начале XX века (см. обзор в [10]). Ключевым моментом в решении данной задачи оказался тот факт, что след матрицы F с точностью до множителя $\sqrt{n}$ совпадает с суммой Гаусса

$$S_n = \sum_{l=0}^{n-1} \varepsilon^{l^2}. \quad (1.4)$$

Вообще говоря, суммами Гаусса называются суммы более общего вида, где l^2 заменен многочленом от l с рациональными коэффициентами.

Наряду с (1.4) рассмотрим также сумму

$$\tilde{S}_n = \sum_{l=0}^{n-1} \varepsilon^{(l+\frac{1}{2})^2}. \tag{1.5}$$

В таблице 1 приведены известные значения этих сумм для разных n [10—12].

Таблица 1

Значения сумм S_n и $\tilde{S}_n$

n	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$
S_n	$\sqrt{n}(1+i)$	$\sqrt{n}$	0	$i\sqrt{n}$
$\tilde{S}_n$	0	$i\sqrt{n}$	$\sqrt{n}(1+i)$	$\sqrt{n}$

Любопытно заметить, что для величины $S_n + \tilde{S}_n$ можно записать единую формулу для всех n

$$S_n + \tilde{S}_n = \sqrt{n}(1+i).$$

В таблицах 2 и 3 указаны размерности собственных подпространств для матриц F и $\tilde{F}$.

Таблица 2

Размерности собственных подпространств для F

n	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$
d_1	$k+1$	$k+1$	$k+1$	$k+1$
d_{-i}	k	k	k	$k+1$
d_{-1}	k	k	$k+1$	$k+1$
d_i	$k-1$	k	k	k

Таблица 3

Размерности собственных подпространств для $\tilde{F}$

n	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$
d_1	k	k	$k+1$	$k+1$
$\tilde{d}_{-i}$	k	k	$k+1$	$k+1$
d_{-1}	k	$k+1$	k	k
d_i	k	k	k	$k+1$

Как видно из табл. 3, при $n = 4k$ все собственные подпространства $\tilde{E}_\mu$ имеют одинаковую размерность k. Следовательно, широко используемый в вычислительной практике сдвиг аргумента на $1/2$ может быть объяснен с точки зрения более полного соответствия алгебраических свойств непрерывного и дискретного преобразований Фурье.

2. ПОСТРОЕНИЕ ОРТОНОРМИРОВАННЫХ БАЗИСОВ ЦИКЛИЧЕСКИХ СДВИГОВ ВЕКТОРОВ

Рассмотрим ненулевой n-мерный вектор $u = (u_0, u_1, \dots, u_{n-1})$ и систему векторов $u^\alpha, \alpha = 0,1,2,\dots,n-1$, получающихся при циклическом сдвиге координат исходного вектора на α, то есть $(u^\alpha)_l = u_{l-\alpha}$. При этом мы предполагаем выполненным условие периодичности $u_l = u_{n+l}$. Справедлива

Теорема 1. *Векторы u^α образуют ортогональный базис в $\mathbb{C}^n$ тогда и только тогда, когда все коэффициенты Фурье вектора u по модулю равны.*

Доказательство. Предположим, что скалярное произведение $(u^\alpha, u^\beta) = 0$ при $\alpha \neq \beta$. Обозначим $\hat{u} = Fu$, тогда

$$(u^\alpha)_l = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} \hat{u}_j \varepsilon^{j(l-\alpha)},$$

$$(u^\alpha, u^\beta) = \sum_{l=0}^{n-1} (u^\alpha)_l \overline{(u^\beta)_l} =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{j,p=0}^{n-1} \hat{u}_j \hat{u}_p \varepsilon^{-j\alpha + p\beta} \sum_{l=0}^{n-1} \varepsilon^{l(j-p)}.$$

С учетом того, что $\frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1} \varepsilon^{l(j-p)} = \delta_{jp}$, получаем

$$(u^\alpha, u^\beta) = \sum_{j=0}^{n-1} \left|\hat{u}_j\right|^2 \varepsilon^{j(\beta-\alpha)} = 0.$$

Следовательно, вектор $w_j = \left|\hat{u}_j\right|^2$ ортогонален $\varepsilon^j, \varepsilon^{2j}, \dots, \varepsilon^{(n-1)j}$, тогда $w_j = \left|\hat{u}_j\right|^2 = const$. Теорема доказана.

Бесконечномерные аналоги данной теоремы, дающие общее представление функций, порождающих системы ортогональных целочисленных сдвигов через их образы Фурье, приведены практически во всех монографиях, посвященных теории всплесков (см., например, [13, 14]). В данном виде теорема 1, насколько нам известно, в литературе не встречалась.

Одна из таких систем циклических сдвигов может быть реализована с помощью сумм Гаусса. Справедлива

Теорема 2. *Системы векторов u^α с координатами*

$$(u^\alpha)_l = \frac{1}{\sqrt{n}} \varepsilon^{\frac{1}{2}(l-\alpha)^2}, \; n = 2m, \tag{2.1}$$

$$(u^{\alpha})_l = \frac{1}{\sqrt{n}} \varepsilon^{\frac{1}{2}(l+\frac{1}{2}-\alpha)^2}, \; n = 2m+1, \quad (2.2)$$

образуют ортонормированный базис в C^n.

Доказательство. Применим к u^{α} ДПФ и воспользуемся еще двумя суммами Гаусса (см. [10])

$$T_n = \sum_{l=0}^{n-1} \varepsilon^{\frac{1}{2}l^2} = \sqrt{n}\exp\left(\frac{\pi i}{4}\right), \; n = 2m, \quad (2.3)$$

$$\widetilde{T}_n = \sum_{l=0}^{n-1} \varepsilon^{\frac{1}{2}(l+\frac{1}{2})^2} = \sqrt{n}\exp\left(\frac{\pi i}{4}\right), \; n = 2m+1. \quad (2.4)$$

Тогда

$$(Fu^{\alpha})_j = \frac{1}{\sqrt{n}} \varepsilon^{-\frac{1}{2}(j-\alpha)^2} \varepsilon^{\frac{1}{2}\alpha^2} \exp\left(\frac{\pi i}{4}\right), \; n = 2m, \quad (2.5)$$

$$(Fu^{\alpha})_j = \frac{1}{\sqrt{n}} \varepsilon^{-\frac{1}{2}(j+\frac{1}{2}-\alpha)^2} \varepsilon^{\frac{1}{2}\alpha^2} \exp\left(\frac{\pi i}{4}\right), \quad n = 2m+1. \quad (2.6)$$

Отсюда следует, что $|Fu^{\alpha}|_j = \frac{1}{\sqrt{n}}$, то есть в силу теоремы 1 векторы ортогональны. Теорема доказана.

Заметим, что ортогональность векторов u^{α} легко проверить и без сумм Гаусса, непосредственно вычисляя скалярные произведения, но предлагаемый метод доказательства позволяет дополнительно установить тот интересный факт, что не только модули коэффициентов Фурье Fu^{α} равны, но и модули самих компонент векторов u^{α} равны, то есть векторы Fu^{α} также образуют ортонормированный базис.

Сдвиг на $1/2$ для нечетных n связан с условием периодичности $u_l = u_{n+l}$. Легко показать, что в общем случае вектор $(u^{\alpha})_l = \frac{1}{\sqrt{n}} \varepsilon^{\frac{1}{2}(l+\beta-\alpha)^2}$, $0 \le \beta < 1$, будет периодичным только при $\beta = 0$ в случае $n = 2m$ и $\beta = 1/2$ в случае $n = 2m+1$.

3. СХЕМА ПОСТРОЕНИЯ ОРТОНОРМИРОВАННОГО БАЗИСА ИЗ СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ ДПФ

Предположим, что для ненулевых векторов a, b, c, d выполнены следующие соотношения

$$Fa = a, \; Fb = -ib, \; Fc = -c, \; Fd = id. \quad (3.1)$$

Обозначим через u их сумму. Тогда

$$u = a + b + c + d,$$
$$Fu = a - ib - c + id,$$
$$F^2u = a - b + c + d,$$
$$F^3u = a + ib - c - id,$$

или, в матричном виде,

$$\begin{pmatrix} u \\ Fu \\ F^2u \\ F^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Данная матрица четвертого порядка унитарна, векторы a, b, c, d в силу унитарности F попарно ортогональны, поэтому и векторы u, Fu, F^2u, F^3u также попарно ортогональны.

Таким образом, один из способов построения ортонормированного базиса из собственных векторов ДПФ состоит в нахождении векторов u, обладающих следующим свойством

$$(F^p u, F^q u) = \delta_{p,q}, \; q = 1,2,3. \quad (3.3)$$

Матрица из формулы (3.2) возникает при реализации алгоритмов быстрого преобразования Фурье с основанием 4 (см., например, [1, 4]).

4. ОРТОНОРМИРОВАННЫЕ БАЗИСЫ ИЗ СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ ДПФ

Для случая, когда $n = 4k+2$, рассмотрим систему векторов u^{α}, v^{α}

$$(u^{\alpha})_l = \frac{1}{\sqrt{n}} \varepsilon^{\frac{1}{2}(l-\alpha)^2}, \; (v^{\alpha})_l = \frac{1}{\sqrt{n}} \varepsilon^{-\frac{1}{2}(l-\alpha)^2}. \quad (4.1)$$

Имеет место

Теорема 3. *Справедливы следующие равенства*

$$(u^{\alpha}, u^{\beta}) = \delta_{\alpha,\beta}, \; (v^{\alpha}, v^{\beta}) = \delta_{\alpha,\beta}, \quad \alpha, \beta = 0,1,\ldots,n-1, \quad (4.2)$$

$$(u^{\alpha}, v^{\beta}) = 0, \; \text{если } (\alpha+\beta) \text{ — четное число.} \quad (4.3)$$

Доказательство. Первая формула в (4.2) была доказана в теореме 2, вторая доказывается аналогично. Далее,

$$(u^{\alpha}, v^{\beta}) = \frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1} \varepsilon^{\frac{1}{2}(l-\alpha)^2 + \frac{1}{2}(l-\beta)^2} = \frac{1}{n}\varepsilon^{\frac{1}{4}(\alpha-\beta)^2} \sum_{l=0}^{n-1} \varepsilon^{(l-\frac{\alpha+\beta}{2})^2}.$$

Последняя сумма совпадает с S_n, если $(\alpha+\beta)$ — четное, и с $\tilde{S}_n$, если $(\alpha+\beta)$ — нечетное. Так как $S_{4k+2}=0$, то теорема доказана.

Применяя теперь схему рассуждений из параграфа 3, получим следующее утверждение.

Теорема 4. *Векторы* $u^{\alpha,\mu}\in E_\mu$, *задаваемые формулами*

$$
\begin{aligned}
(u^{\alpha,1})_l &= \frac{1}{\sqrt{n}}\left[\cos\left(\frac{h}{2}(l-\alpha)^2-\frac{h\alpha^2}{4}-\frac{\pi}{8}\right)+\right.\\
&\qquad\left.+\cos\left(\frac{h}{2}(l+\alpha)^2-\frac{h\alpha^2}{4}-\frac{\pi}{8}\right)\right],\\
(u^{\alpha,-1})_l &= \frac{1}{\sqrt{n}}\left[\sin\left(\frac{h}{2}(l-\alpha)^2-\frac{h\alpha^2}{4}-\frac{\pi}{8}\right)+\right.\\
&\qquad\left.+\sin\left(\frac{h}{2}(l+\alpha)^2-\frac{h\alpha^2}{4}-\frac{\pi}{8}\right)\right],\\
(u^{\alpha,i})_l &= \frac{1}{\sqrt{n}}\left[\sin\left(\frac{h}{2}(l+\alpha)^2-\frac{h\alpha^2}{4}+\frac{\pi}{8}\right)-\right.\\
&\qquad\left.-\sin\left(\frac{h}{2}(l-\alpha)^2-\frac{h\alpha^2}{4}+\frac{\pi}{8}\right)\right],\\
(u^{\alpha,-i})_l &= \frac{1}{\sqrt{n}}\left[\cos\left(\frac{h}{2}(l+\alpha)^2-\frac{h\alpha^2}{4}+\frac{\pi}{8}\right)-\right.\\
&\qquad\left.-\cos\left(\frac{h}{2}(l-\alpha)^2-\frac{h\alpha^2}{4}+\frac{\pi}{8}\right)\right],
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

образуют ортонормированный базис в пространстве векторов $\mathbb{C}^n$. *При этом* $\alpha=0,2,4,\ldots,2k$ *для* $u^{\alpha,\pm1}$; $\alpha=2,4,6\ldots,2k$ *для* $u^{\alpha,\pm i}$.

В случае $n=4k$ формула (4.3) принимает следующий вид

$(u^\alpha,v^\beta)=0,$ если $(\alpha+\beta)$ — нечетное число.

Поэтому вместо системы векторов (4.1) рассмотрим векторы

$$(u^\alpha)_l=\frac{1}{\sqrt{n}}\varepsilon^{\frac{1}{2}(l+\frac{1}{2}-\alpha)^2},\ (v^\alpha)_l=\frac{1}{\sqrt{n}}\varepsilon^{-\frac{1}{2}(l+\frac{1}{2}-\alpha)^2}, \tag{4.5}$$

для которых (4.3) уже выполнено. Кроме того, вместо преобразования Фурье F, задаваемого формулой (1.1), мы применяем $\tilde{F}$. В этом случае также получается ортонормированный базис $\tilde{u}^{\alpha,\mu}$ из собственных векторов $\tilde{F}$, которые задаются с помощью формул, аналогичных (4.4), с заменой l на $(l+1/2)$, а параметр α во всех четырех формулах принимает следующие значения $\alpha=0,2,4,\ldots,2k-2$.

В случае нечетного n данную схему реализовать пока не удалось. Причина затруднений состоит в том, что в этом случае ни одна из сумм S_n и $\tilde{S}_n$ не равна нулю.

Авторы выражают благодарность С. М. Ситнику за многочисленные полезные обсуждения результатов работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Крот А.М., Миневрина Е.Б.* Быстрые алгоритмы и программы цифровой спектральной обработки сигналов и изображений. — Минск.: Навука і тэхніка, 1995. — 407 с.

2. *Марпл. — мл. С.Л.* Цифровой спектральный анализ и его приложения. — М.: Мир, 1990. — 584 с.

3. *Наттерер. Ф.* Математические аспекты компьютерной томографии. — М.:Мир, 1990. — 288 с.

4. *Нуссбаумер Г.* Быстрое преобразование Фурье и алгоритмы вычисления сверток. — М.: Радио и связь, 1985. — 248 с.

5. *Самарский А.А., Николаев Е.С.* Методы решения сеточных уравнений. — М.: Наука, 1978.

6. *Benko I., Raduica M.* Les caracteres multiplicatifs et la diagonalization de la transformation Fourier sur $L^2(Z_p)$ // Analele Stü. Univ. Al. I. Cuza. LASI, 40, 1994. — P. 85—88.

7. *Farsi C., Watling N.* Quartic algebras // Can. J. Math, 44, 1992. — P. 1167—1191.

8. *Morton P.* On the eigenvectors of Shur's matrix // J. Number Theory, 12, 1980. — P. 122—127.

9. *Tolimieri R.* The construction of orthonormal bases diagonalizing the discrete Fourier transform // Adv. Appl. Math, 5, 1984. — P. 56—86.

10. *Berndt Bruce C., Evans Ronald J., Williams Kenneth S.* Gauss and Jacobi Sums. — A Wiley — Interscience Publication, 1988. — 584 p.

11. *Гаусс К.Ф.* Суммирование некоторых рядов особого вида. // Гаусс К.Ф. Труды по теории чисел. — М.: АН ССР, 1959. — С. 594—635.

12. *Стечкин С.Б.* Оценка сумм Гаусса. // Матем. заметки, т. 17, вып. 4, 1975. — С. 579—588.

13. *Добеши И.* Десять лекций по вейвлетам. — М.: РХД, 2001.

14. *Чуи Ч.* Введение в вэйвлеты. — М.: Мир, 2001. — 412 с.