ВЕСТНИК ВГУ, Серия: Физика, математика, 2004, № 2

УДК 517.958

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ ДВУХ УРАВНЕНИЙ, СВЯЗАННЫХ С ПРОСТРАНСТВЕННЫМИ МОДЕЛЯМИ ИОНИЗАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ В ПЛАЗМЕ

© 2004 Ю. В. Засорин

Воронежский государственный университет

В статье строятся точные решения задач Коши для двух пространственных уравнений в частных производных 4 порядка, описывающих ионизационные и релаксационные процессы в плазме. Доказывается наличие эффекта фокусировки волн, исследуется эволюция волновых пакетов. Дается также представление решений в терминах суперпозиции сжимающихся волновых пакетов.

ВВЕДЕНИЕ

Целью настоящей работы является исследование свойств решений двух уравнений, связанных с пространственными ионизационными колебаниями в холодной разреженной плазме (см. [1]).

$$L_{(i)}(D)u(t,\vec{r}) = f(t,\vec{r}),\ \ i = 1,2, \tag{1}$$

$$L_{(1)}(D) \equiv \frac{\partial^2}{\partial t\partial x} - \frac{\partial^4}{\partial x^4} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \tag{2}$$

$$L_{(2)}(D) \equiv \frac{\partial^2}{\partial t\partial x} - \frac{\partial^4}{\partial t\partial x^3} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \tag{3}$$

где t — безразмерное время, $\vec{r} = \{x,y,z\} \in R^3$ — безразмерная декартова система координат, $D = \{D_t, D'\}$, $D' = \{D_x, D_y, D_z\}$, $D_{(\cdot)} = \partial/\partial(\cdot)$. Здесь $u = u(t,\vec{r})$ — интегральная функция суммарного распределения заряженных частиц: $\partial u/\partial x = n_i - n_e$, где n_i и n_e — концентрации соответственно положительно заряженных ионов и электронов в точке $\vec{r} = \{x,y,z\}$ в момент времени t. Уравнения (1), (2) и (1), (3) являются обобщением на пространственный случай одномерных линеаризованных уравнений: Кортевега-де Фриза и так называемого регуляризованного длинноволнового уравнения (см. [1]).

1. ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ. БАЛАНС ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ И УСЛОВИЕ РЕЛАКСАЦИИ.

Пусть $R^4 = \{(t,\vec{r}) : t \in R, \vec{r} \in R^3\}$, $R^4_\pm = \{(t,\vec{r}) : \pm t > 0\}$. Через $\{x, r, \theta\}$, $r = \sqrt{y^2 + z^2}$ обозначим цилиндрическую систему координат в R^3. Как обычно, через $S'(R^n)$, $n = 3$ или 4, будем обозначать пространство Шварца распределений умеренного роста. Через $\overset{\circ}{S}{}'(\bar{R}^4_\pm) \subset S'(R^4)$ (см., напр., [2]) будем обозначать пространства распределений $T_\pm \subset S'(R^4)$, таких, что $\operatorname{supp}(T_\pm) \subset \bar{R}^4_\pm$ соответственно. В дальнейшем, если это не будет вызывать недоразумений, вместо обозначений $L_{(1)}(D)$, $L_{(2)}(D)$ и $L_{(i)}(D)$ будем использовать обобщающее обозначение $L(D)$.

Теперь, фиксируя $i = 1$ или $i = 2$, рассмотрим для каждого из уравнений (1), (2) или (1), (3) задачу Коши:

$$L(D)u(t,\vec{r}) = f(t,\vec{r}),\ \ (t,\vec{r}) \in R^4_\pm, \tag{4}$$

$$(D_x u)\big|_{t=+0} = h(\vec{r}),\ \ \vec{r} \in R^3, \tag{5}$$

$$D_x u(t,\vec{r}) = o(1),\ \ \vec{r} \to \infty, \tag{6}$$

где $u, f \in \overset{\circ}{S}{}'(\bar{R}^4_+)$, $h \in S'(R^3)$, причем:

$$f(t,\vec{r}), h(\vec{r}) = o(1),\ \ \vec{r} \to \infty. \tag{7}$$

При этом ограничения (6), (7) понимаются в смысле теории распределений.

Справедливо следующее утверждение:

Теорема 1. *Решения* $u \in \overset{\circ}{S}{}'(\bar{R}^4_+)$ *задач Коши (4)—(6) (для уравнений (1), (2) и (1), (3)) единственны с точностью до распределений вида* $v(t) \otimes 1(\vec{r})$.

Доказательство: Для случая $i = 1$ утверждение доказано в работе [3]. Для случая $i = 2$ утверждение теоремы доказывается аналогичным образом. ■

При естественном предположении существования обобщенного интеграла по переменным $\vec{r} \in R^3$ для распределения $D_x u(t,\cdot)$ введем понятие суммарного баланса заряженных частиц:

$$I(t) = \int_{R^3} D_x u(t,\vec{r})d\vec{r}. \tag{8}$$

Интегрируя теперь уравнение (4) по полосе $\{0 < t < t_0, \vec{r} \in R^3\}$, получаем, с учетом соотношений (5)—(8), что:

$$I(t) = \int_{R^3} h(\vec{r})d\vec{r} + \int_0^t dt' \int_{R^3} h(t',\vec{r})d\vec{r}. \tag{9}$$

Если имеет место релаксация процесса, то:

$$I(t) \to 0,\ t \to +\infty. \tag{10}$$

Объединяя соотношения (9), (10), получаем необходимое условие релаксации:

$$\int_{R^3} h(\vec{r})d\vec{r} + \int_{R^4} h(t,\vec{r})dtd\vec{r} = 0. \tag{11}$$

Замечание 1. Необходимо отметить, что ограничения вида (10), (11) являются лишь необходимыми, но не достаточными условиями релаксации, поскольку допускают наличие у $D_x u$ не исчезающей при $t \to +\infty$ осциллирующей компоненты. С другой стороны, более сильные ограничения: например, $\|D_x u\|_p \to 0$, $t \to +\infty$ (где $\|\cdot\|_p$ означает $L_p(R^3)$-норму) могут оказаться избыточными, поскольку, во-первых, как мы убедимся в дальнейшем, задача (4)—(6) **неразрешима** в классическом смысле; во-вторых, с чисто физической точки зрения, с ростом времени плазма релаксирует лишь к **квазинейтральному** состоянию (см., напр., [4], [5]), сохраняющему фоновые неоднородности.

2. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ КОШИ И ИХ СВОЙСТВА. РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ

Определение 1. Фундаментальным решением Коши для оператора $L_{(i)}(D)$ будем называть распределение $E_{(i)}(t,\vec{r}) \in S'(\bar{R}^4_+)$, удовлетворяющее уравнению:

$$L_{(i)}(D)E_{(i)}(t,\vec{r}) = 0,\ t > 0,\ \vec{r} \in R^3, \tag{12}$$

и условию:

$$(P_{(i)}(D_x)E_{(i)})\,|_{t=+0} = \delta(\vec{r}), \tag{13}$$

$$P_{(1)}(D_x) = D_x,\ P_{(2)}(D_x) = D_x - D_x^3. \tag{14}$$

Теорема 2. *Фундаментальные решения $E_{(i)}(t,\vec{r})$ операторов $L_{(i)}(D)$ имеют следующий вид:*

$$\begin{gathered} E_{(1)}(t,\vec{r}) = 4^{-1}3^{-1/3}\pi^{-1}t^{-4/3}\theta(t)\cdot Ai(\omega_1), \\ \omega_1 = -(x - r^2/4t)\cdot(3t)^{-1/3}, \end{gathered} \tag{15}$$

$$\begin{gathered} E_{(2)}(t,\vec{r}) = 48^{-1/3}\pi^{-1}(tr)^{-2/3}\theta(t)\cdot Ai(\omega_2), \\ \omega_1 = -(4/3)^{1/3}xr^{-2/3}t^{1/3} + (48)^{-1/3}r^{4/3}t^{-2/3}, \end{gathered} \tag{16}$$

где $\theta(\cdot)$ — функция Хевисайда, $Ai(\cdot)$ — функция Эйри 1-го рода (см., напр., [6]).

Доказательство: Фундаментальное решение Коши $E_{(1)}(t,\vec{r})$ построено в работе [3], а фундаментальное решение Коши $E_{(2)}(t,\vec{r})$ — в работе [7]. ■

На основании равенств (15), (16) и свойств функции Эйри $Ai(z)$ (см., напр., [6]) можно установить справедливость следующих асимптотических равенств:

$$E_{(1)}(t,\vec{r}) \sim \begin{cases} 2^{-3}3^{-1/3}\pi^{-3/2}t^{-4/3}\omega_1^{-1/4}e^{-\xi}, & \omega_1 \to +\infty; \\ 2^{-2}3^{-1/3}\pi^{-3/2}t^{-4/3}\,|\,\omega_1\,|^{-1/4} \times & \\ \times\cos(\xi - \pi/4), & \omega_1 \to -\infty; \end{cases} \tag{17}$$

$$E_{(2)}(t,\vec{r}) \sim \begin{cases} 2^{-7/3}3^{-1/3}\pi^{-3/2}t^{-2/3}r^{-2/3}\omega_2^{-1/4}e^{-\xi}, & \omega_2 \to +\infty; \\ 2^{-4/3}3^{-1/3}\pi^{-3/2}t^{-2/3}r^{-2/3}|\omega_2|^{-1/4} \times & \\ \times\cos(\xi - \pi/4), & \omega_2 \to -\infty; \end{cases} \tag{18}$$

$$E_{(1)}(t,\vec{r}) \sim 12^{-1}\pi^{-1}\Gamma(2/3)t^{-4/3},\ t \to +\infty; \tag{19}$$

$$E_{(2)}(t,\vec{r}) \sim$$

$$\sim \begin{cases} 2^{-5/2}3^{-1/4}\pi^{-3/2}t^{-3/4}\,|x|^{-1/4}\,r^{-1/2}e^{-\xi}, & x < 0; \\ 2^{-3/2}3^{-1/4}\pi^{-3/2}t^{-3/4}x^{-1/4}r^{-1/2} \times & \\ \times\cos(\xi - \pi/4), & x > 0; \end{cases} \quad t \to +\infty, \tag{20}$$

где $\xi = \xi_i = (2/3)\omega_i^{3/2}$; и, кроме того:

$$E_{(2)}(t,\vec{r}) \sim$$

$$\sim \begin{cases} 2^{-5/2}3^{-1/4}\pi^{-3/2}t^{-3/4}\,|\,x\,|^{-1/4}\,r^{-1/2} \times & \\ \times\exp(4\cdot 3^{-3/2}t^{1/2}\,|\,x\,|^{3/2}\,r^{-1}), & x < 0; \\ 2^{-3/2}3^{-1/4}\pi^{-3/2}t^{-3/4}x^{-1/4}r^{-1/2} \times & \\ \times\cos\left(4\cdot 3^{-3/2}t^{1/2}x^{3/2}r^{-1} - \pi/4\right), & x > 0 \end{cases} \quad r \to 0; \tag{21}$$

Теперь, из асимптотических равенств (17)—(21) несложно видеть, что:

$$\operatorname{sing\,supp}(E_{(1)} = \{t = 0; x0; r = 0\}; \tag{22}$$

$$\operatorname{sing\,supp}(E_{(2)} = \{t0; x0; r = 0\}. \tag{23}$$

Замечание 2. Сравнивая формулы (22) и (23), можно заметить, что сингулярные носители распределений $E_{(1)}$ и $E_{(2)}$ представляют собой полупрямые, совпадающие с положительной полуосью OX и представляющие собой канал пробоя. Однако для $E_{(1)}$ канал пробоя существует лишь в момент времени $t = 0$, а для $E_{(2)}$ — и во все последующие моменты времени, что хорошо согласуется с физикой реальных процессов (см. также [4]). При этом из формулы (21) следует, что решение $E_{(2)}$ сильно осциллирует в окрестности канала пробоя. Далее, из формул (17), (19) следует, что распределение $E_{(1)}$ осциллирует лишь при $x \to +\infty$, причем частота осцилляции затухает с ростом времени, а из формул (18), (20) — что решение $E_{(2)}$ осциллирует и при $x \to +\infty$, и при $r \to 0$, и при $t \to +\infty$, причем частота осцилляции неограниченно возрастает с ростом t.

Теперь, из равенств (15)—(23) непосредственной проверкой может быть установлена справедливость следующих свойств распределений $E_{(i)}$:

$$E_{(1)}\,|_{t=+0} = \theta(x) \otimes \delta(y,z), \tag{24}$$

$$E_{(2)}\,|_{t=+0} = (2^{-1} sign(-x) e^{-|x|} + \theta(x)) \otimes \delta(y,z), \tag{25}$$

$$L_{(i)} E_{(i)}(t,\vec{r}) = \delta(t) \otimes \delta(\vec{r}),\ (t,\vec{r}) \in R^4,\ i = 1,2, \tag{26}$$

$$(D')^{\alpha} E_{(i)}(t,\vec{r}) = o(1),\ \vec{r} \to \infty,\ i = 1,2. \tag{27}$$

При этом последнее равенство в случае $\alpha \neq \vec{0}$ справедливо лишь в смысле теории распределений.

Теперь, на основании свойств (12)—(14), (24)—(27) можно установить справедливость следующего утверждения:

Теорема 3. *Задачи Коши (4)—(6) для уравнений (1), 2 и (1), (2) корректно разрешимы в классе $\overset{\circ}{S}{}'(\bar{R}^4_+)$, а их решения могут быть представлены равенствами:*

$$\begin{aligned} u_i(t,\vec{r}) &= (Q_{(i)}(D_x) E_{(i)} * h(\cdot))(\vec{r}) + \\ &+ \int_0^t d\tau (E_{(i)}(t-\tau,\cdot) * f(\tau,\cdot))(\vec{r}), \end{aligned} \tag{28}$$

где

$$Q_{(1)} \equiv 1,\ \ Q_{(2)} = 1 - D_x^2, \tag{29}$$

а символ «$*$» означает свертку по пространственным переменным $\vec{r} \in R^3$.

3. ФОКУСИРОВКА ВОЛН И ЭВОЛЮЦИЯ ВОЛНОВЫХ ПАКЕТОВ

Введем в рассмотрение два распределения U, $V \in S'(R^4)$:

$$\left.\begin{aligned} U(t,\vec{r}) &\equiv U_{(i)}(t,\vec{r}) = \\ &= E_{(i)}(t,\vec{r}) + E_{(i)}(-t,-\vec{r}), \\ V(t,\vec{r}) &\equiv V_{(i)}(t,\vec{r}) = \\ &= E_{(i)}(t,\vec{r}) - E_{(i)}(-t,-\vec{r}), \end{aligned}\right\}\ i = 1,2. \tag{30}$$

Объединяя равенства (29) с (15), (16), получаем, что:

$$U_{(i)}(t,\vec{r}) = sign(t) V_{(i)}(t,\vec{r}) = \\ = \begin{cases} E_{(i)}(t,\vec{r}); & t > 0; \\ E_{(i)}(-t,-\vec{r}); & t < 0. \end{cases} \tag{31}$$

Теперь, из равенств (13), (24)—(27), получаем, с учетом (1), (2), что:

$$\pm(P_{(i)}(D_x) U_{(i)})\,|_{t=\pm 0} = (P_{(i)}(D_x) V_{(i)})\,|_{t=+0} = \delta(\vec{r}), \tag{32}$$

$$\left.\begin{aligned} L_{(i)}(D) U_{(i)}(t,\vec{r}) &= 2\delta(t) \otimes \delta(\vec{r}), \\ L_{(i)}(D) V_{(i)}(t,\vec{r}) &= 0, \end{aligned}\right\}\ (t,\vec{r}) \in R^4; \tag{33}$$

$$(P_{(i)}(D_x) V_{(i)}(t_1,\cdot) * V_{(i)}(t_2,\cdot))(\vec{r}) = V_{(i)}(t_1 + t_2, \vec{r}), \tag{34}$$

$$\begin{aligned} &(P_{(i)}(D_x) V_{(i)}(t_1,\cdot) * U_{(i)}(t_2,\cdot))(\vec{r}) = \\ &= sign(t_2) U_{(i)}(t_1 + t_2, \vec{r}), \end{aligned} \tag{35}$$

где операторы $P_{(i)}(D_x)$ определены равенствами (14).

Рассмотрим теперь вопрос о фокусировке волн. Положим в задаче Коши (4)—(6): $f(t,\vec{r}) \equiv 0$. Требуется ответить на вопрос: существуют ли такие распределения $h(\vec{r}) \in S'(R^3) \cap C^{\infty}(R^3)$ из условия (5), что производные $D_x u = D_x u_i$ соответствующих решений $u = u_i$ задач Коши (4)—(6) (при условии $f \equiv 0$) обладали бы в какой-либо момент времени $t' > 0$ особенностями типа δ-функции?

Ответ на этот вопрос положителен. Фиксируем произвольное $t' > 0$ и произвольную точку $\vec{r} \in R^3$. Также фиксируем $i = 1$ или 2. Положим:

$$h \equiv h_{(i)}(\vec{r}) = P_{(i)}(D_x)V_{(i)}(-t', \vec{r} - \vec{r}'). \qquad (36)$$

В силу формул (9), (33) и теоремы единственности получаем, что:

$$u \equiv u_i(t, \vec{r}) = Q_{(i)}(D_x)V_{(i)}(t - t', \vec{r} - \vec{r}'), \qquad (37)$$

где операторы $Q_{(i)}(D_x)$ определены равенствами (29).

Объединяя теперь (37) с равенствами (14), (29) и (32), получаем, что:

$$(D_x u_i)\,|_{t=t'} = \delta(\vec{r} - \vec{r}'). \qquad (38)$$

Таким образом, мы не только доказали наличие эффекта фокусировки волн, но и (см. равенство (38)), управляя начальными условиями (формула (36)) можем добиваться его в любой наперед заданный момент времени и в любой наперед заданной точке пространства. Кроме того, нами фактически доказана обратимость времени в задачах Коши (4)—(6) для уравнений (1), (2) и (1), (3).

Исследуем теперь эволюцию волновых пакетов в рассматриваемых нами релаксационных процессах. С этой целью удобно рассмотреть распределение:

$$W_{(i)}(t', t, \vec{r}, \vec{r}) = \alpha U_{(i)}(t - t', \vec{r} - \vec{r}') + \\ + \beta V_{(i)}(t - t', \vec{r} - \vec{r}'). \qquad (39)$$

Объединяя соотношения (15), (16), (30)—(33), можно заметить, что эволюция волнового пакета, описываемого распределением W, на самом деле описывает два разных типа волновых процессов. При $t < t'$ имеет место неустойчивый волновой процесс, с сжатием волнового пакета и приводящий в момент времени $t = t'$ к фокусировке в точке $\vec{r} = \vec{r}$ с выделением (поглощением) энергии величины 2α. После чего (при $t > t'$) имеет место устойчивый волновой процесс второго типа, сопровождающийся расплыванием волнового пакета.

Рассмотрим теперь другой важный вопрос: можно ли представить правую часть $f(t, \vec{r})$ уравнения (4) как суперпозицию фокусировок волновых пакетов, описываемых распределениями W из равенства (39)?

Ответ и на этот вопрос положителен. Действительно, представим функцию $h(\vec{r})$ из условия (5) в виде суперпозиции:

$$h(\vec{r}) = \int_0^\infty h(t', \vec{r})dt', \qquad (40)$$

так, чтобы каждой парциальной составляющей $h(t', \vec{r})$ соответствовал парциальный волновой пакет «первого типа», фокусирующийся в момент времени $t = t'$ с полным выделением энергии, т. е.:

$$L(D)w(t', t, \vec{r}) = 0, \; 0 < t < t', \; \vec{r} \in R^3, \qquad (41)$$

$$(D_x w)\,|_{t=+0} = h(t', \vec{r}), \; \vec{r} \in R^3, \qquad (42)$$

$$w \equiv 0, \; t > t'. \qquad (43)$$

Отметим, что формально разложение (40) может быть выполнено бесконечным числом способов; учет квантовомеханических механизмов ионизационных процессов в плазме накладывает на это разложение некоторые ограничения (см., напр., [5]), однако углубление в эти подробности не является предметом настоящей работы. Результат будет тем более интересен, если удастся установить, что при произвольно взятом распределении $h(t', \cdot) \in S'(R^3)$ соответствующее решение $w(t', t, \vec{r})$ задачи (41)—(43) удастся представить в виде:

$$w(t', t, \vec{r}) = \theta(t' - t)(g(t', \cdot) * V_{(i)}(t - t', \cdot))(\vec{r}). \qquad (44)$$

Для этого продифференцируем равенство (44) по переменной x и положим $t = 0$, после чего, воспользовавшись условием (42), групповым свойством (34) и равенством (32), немедленно получаем, что:

$$D_x g(t', \vec{r}) = (h(t', \cdot) * P^2_{(i)}(D_x)V_{(i)}(t', \cdot))(\vec{r}), \qquad (45)$$

или, объединяя равенства (14), (1) и (16), что:

$$g(t', \vec{r}) = \\ = (h(t', \cdot) * P_{(i)}Q_{(i)}(D_x)Q_{(i)}(D_x)V_{(i)}(t', \cdot))(\vec{r}), \qquad (46)$$

что и доказывает справедливость равенства (44).

Далее, заметим теперь, что из равенств (41), (43) следует, что:

$$L(D)w(t', t, \vec{r}) = F(t', \vec{r}) \otimes \delta(t - t'), \\ (t, \vec{r}) \in R^4, \qquad (47)$$

где $F(t', \cdot)$ — некоторое распределение из $S'(R^3)$, причем, в силу равенств (28), (42), получаем:

$$F(t', \cdot) = -(h(t', \cdot) * P_{(i)}(D_x)E_{(i)}(t', \cdot))(\vec{r}), \qquad (48)$$

после чего, объединяя последнее равенство с соотношениями (30)—(34), получаем еще одно важное соотношение между распределениями $h(t',\cdot)$ и $F(t',\cdot)$:

$$h(t',\vec{r}) = -(F(t',\cdot) * P_{(i)}(D_x)V_{(i)}(-t',\cdot))(\vec{r}). \quad (49)$$

Наконец, объединяя равенства (40), (44)—(49), получаем, с учетом обратимости времени t, новые представления решений $u = u_i(t,\vec{r})$ задачи Коши (4)—(6) для уравнений (1), (2) и (1), (3):

$$u_i(t,\vec{r}) = \int_t^{+\infty} w_i(t',t,\vec{r})dt', \quad (50)$$

где

$$w_i(t',t,\vec{r}) = \theta(t)\int_{R^3} h(t',\vec{r})Q_{(i)}(D_x)V(t,\vec{r}-\vec{r}')d\vec{r} \quad (51)$$

или

$$w_i(t',t,\vec{r}) = \theta(t)\int_{R^3} F(t',\vec{r})E(t'-t,\vec{r}'-\vec{r})d\vec{r}, \quad (52)$$

причем роль распределения F может играть распределение $f(t,\vec{r})$ из правой части уравнения (4).

Замечание 3. Заметим, что классическое представление (29) решения $u(t,\vec{r})$ задачи Коши (4)—(6) в терминах h и f предполагает одновременное знание этих распределений, что (см., напр., [5]) не всегда имеет место в реальных ситуациях, в то время как представление решения равенствами (50)—(52) предполагает знание лишь одного из этих распределений. К тому же, в силу ограничения (43), представления (50)—(52) более адекватно описывают процессы релаксации в плазме (см. Замечание 1), чем необходимое условие релаксации (11), не противореча ему.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х.* Солитоны и нелинейные волновые уравнения. — М.: Мир, 1988. — 694 с.

2. *Хермандер Л.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными. — М.: Мир, 1965. — 379 с. *Hormander L.* Linear partial differential operators. — Berlin—Gottingen — Heidelberg: Springer-Verlag, 1963.

3. *Засорин Ю.В., Придущенко М.В.* Точные решения пространственного уравнения Кадомцева—Петвиашвили. // Вестник ВГУ, серия физика, математика, 2002, № 2. — С. 133—136.

4. *Райзер Ю.П.* Физика газового разряда. — М.: Наука, 1987. — 592 с.

5. *Кадомцев Б.Б.* Коллективные явления в плазме. — М.: Наука, 1988. — 304 с.

6. *Олвер Ф.* Асимптотика и специальные функции. — М.: Наука, 1990. — 528 с.

7. *Засорин Ю.В.* Фундаментальные решения для уравнений в частных производных высших порядков: исторический обзор и современные результаты. // Вестник ВГУ, серия физика, математика, 2003, № 1. — С. 123—127.