УДК 537.86: 519.23

ПРИМЕНЕНИЕ ЛОКАЛЬНО-АДДИТИВНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ДЛЯ АНАЛИЗА ХАРАКТЕРИСТИК СОВМЕСТНЫХ ОЦЕНОК ПАРАМЕТРОВ СИГНАЛОВ ПРИ ЧАСТИЧНОМ НАРУШЕНИИ УСЛОВИЙ РЕГУЛЯРНОСТИ РЕШАЮЩЕЙ СТАТИСТИКИ*

© 2004 А. В. Захаров

Воронежский государственный университет

Рассмотрен асимптотический метод анализа эффективности совместных оценок параметров сигналов по методу максимального правдоподобия при частичном нарушении условий регулярности решающей статистики. На основе аддитивно-мультипликативного представления моментов решающей статистики получены общие асимптотические выражения для характеристик оценок. В качестве примера рассмотрены совместные оценки времени прихода и частоты импульсного сигнала с гауссовской случайной субструктурой.

ВВЕДЕНИЕ

Одним из наиболее распространенных методов измерения (оценки) параметров сигналов на фоне помех является метод максимального правдоподобия (МП) [1, 2]. Этот метод позволяет получить простые, но достаточно эффективные алгоритмы оценок параметров сигналов, и требует относительно небольшого объема априорной информации. Однако, обоснованный выбор того или иного алгоритма оценки в различных физических приложениях при наличии помех можно сделать лишь на основе анализа статистических характеристик оценок: функции распределения, смещения, дисперсии, рассеяния оценки и т.п.

Задача нахождения точных аналитических выражений для характеристик оценок параметров сигналов является достаточно сложной математической задачей даже в простейших случаях. Поэтому исследование алгоритмов оценки часто выполняется лишь методом компьютерного статистического моделирования на ЭВМ для фиксированных параметров сигнала и шума. Это затрудняет выявление общих закономерностей функционирования алгоритмов оценки, справедливых в широком диапазоне априорных условий.

* Работа выполнена при поддержке CRDF и Минобразования РФ (проект VZ-010-0).

В настоящее время существует несколько методов, позволяющих получить асимптотически точные (с ростом отношения сигнал-шум (ОСШ)) выражения для характеристик оценок максимального правдоподобия (ОМП). Возможность практического применения этих методов для расчета характеристик ОМП зависит от аналитических свойств решающей статистики алгоритма оценки — логарифма функционала отношения правдоподобия (ФОП).

Метод малого параметра [1, 3 и др.] позволяет найти асимптотически точные (с ростом ОСШ) выражения для характеристик совместных ОМП произвольного конечного числа параметров сигнала. Однако, для применения метода требуется выполнение условий регулярности решающей статистики алгоритма ОМП — логарифма ФОП, как функции всех оцениваемых параметров сигнала. Параметры сигнала, для которых условия регулярности выполняются, называют *регулярными*. В случае гауссовского логарифма ФОП условия регулярности сводятся к существованию непрерывных вторых производных для первых двух моментов логарифма ФОП, взятых по оцениваемым параметрам [1, 3].

Если производные моментов логарифма ФОП по оцениваемым параметрам имеют разрывы первого рода в точке истинных значений этих параметров, то условия регулярности логарифма ФОП нарушаются и метод малого параметра оказывается неприменимым. Такие параметры сигнала называют *разрывными* или неаналитическими [4—6]. Для вычисления асимптотически точных (с ростом ОСШ) выражений для характеристик *ОМП одного разрывного параметра* сигнала в [4 (гл. 6), 6 (п. 5.3)] разработан метод локально-марковской аппроксимации (ЛМА). Характеристики *совместных ОМП нескольких разрывных параметров* можно получить с помощью метода локально-аддитивной аппроксимации (ЛАА) совместно с методом ЛМА, как это сделано в [7]. Метод ЛАА применим, если моменты логарифма ФОП, как функции оцениваемых параметров сигнала, допускают *локальное аддитивно-мультипликативное представление* [7]. При таком представлении моменты логарифма ФОП выражаются в виде суммы конечного числа слагаемых, каждое из которых является произведением функций только одного оцениваемого параметра. Согласно методу ЛАА, аддитивно-мультипликативное представление моментов логарифма ФОП достаточно реализовать в малой окрестности точки истинных значений оцениваемых параметров.

На практике обработка сигналов часто производится в условиях *частичного* нарушения условий регулярности решающей статистики, когда неизвестны и *подлежат совместной оценке как разрывные, так и регулярные параметры.* В [4, 8] предложена методика вычисления асимптотически точных (с ростом ОСШ) выражений для характеристик *совместных ОМП одного разрывного и нескольких регулярных параметров* квазидетерминированных сигналов. В [9] эта методика обобщена для более широкого класса сигналов, включая гауссовские стохастические сигналы [10]. Результаты [9] позволяют записать асимптотически точные (с ростом ОСШ) выражения для характеристик *совместных ОМП произвольного конечного числа разрывных и регулярных параметров.* Для применения результатов [9], аналогично [7], необходимо локальное аддитивно-мультипликативное представление моментов логарифма ФОП по оцениваемым разрывным параметрам сигнала. Кроме того, аналогично [4, 8], накладываются локальные ограничения на первую и вторую производные моментов логарифма ФОП по оцениваемым регулярным параметрам сигнала.

Отметим, что локальное аддитивно-мультипликативное представление моментов логарифма ФОП возможно для широкого класса параметров сигналов. Например, при обработке импульса с гауссовской случайной субструктурой [10] в радио- и гидролокации, в связи, в радиоастрономии и др., такое представление моментов логарифма ФОП возможно для времени прихода, длительности, моментов появления и исчезновения импульса, а также для центральной частоты и ширины полосы частот спектральной плотности случайной субструктуры. Вместе с тем указанные параметры в общих выражениях для моментов логарифма ФОП обычно не выделяются в явном виде, а входят как формальные параметры модулирующей функции (огибающей) сигнала и его спектральной плотности. Поэтому проверка локальных ограничений [9] для первой и второй производных моментов логарифма ФОП по этим параметрам в общем виде оказывается затруднительной. Требуется конкретизация модулирующей функции и спектральной плотности сигнала, что ограничивает общность получаемых результатов.

В ряде случаев указанные трудности можно преодолеть, если для вычисления характеристик совместных оценок разрывных и регулярных параметров воспользоваться методом ЛАА [7] с учетом необходимых обобщений на случай регулярных параметров. При этом достаточно требовать локального аддитивно-мультипликативного представления моментов логарифма ФОП по двум векторным параметрам — вектору разрывных и вектору регулярных параметров. Тогда использование метода ЛАА [7] позволит, аналогично [9], свести задачу нахождения характеристик совместных ОМП разрывных и регулярных параметров сигнала к двум более простым задачам: к расчету 1) характеристик совместных ОМП разрывных параметров при известных регулярных параметрах и 2) характеристик совместных ОМП регулярных параметров при известных разрывных параметрах. Для вычисления характеристик совместных ОМП разрывных параметров сигнала при априори известных регулярных параметрах можно применить методы ЛАА и ЛМА, как это сделано в [7]. Для нахождения характеристик совместных ОМП регулярных параметров сигнала при априори известных разрывных параметрах можно воспользоваться методом малого параметра [1, 3].

Возможность применения метода ЛАА при частичном сохранении условий регулярности логарифма ФОП объясняется тем, что в методе не используется свойство регулярности решающей статистики. Метод ЛАА (с учетом некоторых изменений) применим как при выполнении, так и при нарушении условий регулярности решающей статистики для всех или части совместно оцениваемых параметров. Нужно, чтобы допускалось локальное аддитивно-мультипликативное представление моментов логарифма ФОП по этим параметрам.

Рассмотрим применение метода ЛАА для расчета асимптотических характеристик совместных ОМП произвольного (но конечного) числа разрывных и регулярных параметров сигнала.

1. ОЦЕНКИ МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ ПАРАМЕТРОВ СИГНАЛОВ

Постановка задачи оценки

Пусть на вход устройства обработки в течение интервала наблюдения $t \in [0;T]$ поступает смесь

$$x(t) = s(t,\mathbf{l}_0,\boldsymbol{\Theta}_0) \otimes n(t), \;\; t \in [0;T] \qquad (1)$$

полезного информационного сигнала $s(t,\mathbf{l}_0,\boldsymbol{\Theta}_0)$ и шума $n(t)$. Здесь $\otimes$ означает в общем случае произвольную комбинацию сигнала и шума, например, аддитивную, мультипликативную и т.п.

Сигнал $s(t,\mathbf{l}_0,\boldsymbol{\Theta}_0)$ характеризуется векторами информативных параметров $\mathbf{l}_0 = \|l_{01}, l_{02}, \ldots, l_{0p}\|$ и $\boldsymbol{\Theta}_0 = \|\Theta_{01}, \Theta_{02}, \ldots, \Theta_{0r}\|$, содержащих $p \ge 1$ и $r \ge 1$ скалярных параметров соответственно. Пусть параметры l_{01}, l_{02}, ..., l_{0p} являются разрывными, а параметры $\Theta_{01}, \Theta_{02}, ..., \Theta_{0r}$ — регулярными параметрами сигнала. Считаем, что разрывные параметры l_{0i}, $i = 1,2,..,p$ принимаемого сигнала $s(t,\mathbf{l}_0,\boldsymbol{\Theta}_0)$ неизвестны и принимают значения из априорной области определения $\mathbf{l}_0 \in \Re_l$. Регулярные параметры Θ_{0j}, $j = 1,2,..,r$ принимаемого сигнала также неизвестны и принимают значения из области определения $\boldsymbol{\Theta}_0 \in \Re_\theta$.

На основе наблюдаемых данных $x(t)$ (1) и имеющейся априорной информации о сигнале и шуме необходимо измерить (оценить) разрывные l_{0i}, $i = 1,2,..,p$ и регулярные параметры Θ_{0j}, $j = 1,2,..,r$ принимаемого сигнала $s(t,\mathbf{l}_0,\boldsymbol{\Theta}_0)$.

Алгоритмы оценки максимального правдоподобия (МП)

Согласно методу МП [1—3], для получения совместных оценок (измерения) неизвестных параметров $(\mathbf{l}_0,\boldsymbol{\Theta}_0)$ сигнала $s(t,\mathbf{l}_0,\boldsymbol{\Theta}_0)$ следует на основе наблюдаемых данных $x(t)$ формировать решающую статистику — логарифм $L(\mathbf{l},\boldsymbol{\Theta}) = \ln \Lambda(\mathbf{l},\boldsymbol{\Theta})$ функционала отношения правдоподобия (ФОП) $\Lambda(\mathbf{l},\boldsymbol{\Theta})$, как функцию векторов $\mathbf{l} = \|l_1, l_2, \ldots, l_p\|$ и $\boldsymbol{\Theta} = \|\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_r\|$ разрывных и регулярных параметров сигнала. Выражение для логарифма ФОП

$$L(\mathbf{l},\boldsymbol{\Theta}) \equiv L(l_1, l_2, \ldots, l_p, \Theta_1, \Theta_2, .., \Theta_r) \qquad (2)$$

в каждом конкретном случае можно найти, исходя из вероятностного (статистического) описания принимаемого сигнала и шума. Согласно определению [1—3], функционал отношения правдоподобия $\Lambda(\mathbf{l},\boldsymbol{\Theta})$ задается как предел

$$\Lambda(\mathbf{l},\boldsymbol{\Theta}) = \lim_{\Delta \to 0,\, N \to \infty} [W(\mathbf{X}|\mathbf{l},\boldsymbol{\Theta}) / W_0(\mathbf{X})],$$

где $W(\mathbf{X}|\mathbf{l},\boldsymbol{\Theta})$ — условная плотность вероятности выборки $X = \|x_1, x_2, \ldots, x_N\|$, $x_i = x(t_i)$ из наблюдаемых данных $x(t)$ в моменты времени $t_i = i\Delta$ при условии, что векторы неизвестных параметров принимаемого сигнала равны $\mathbf{l},\boldsymbol{\Theta}$, а $W_0(\mathbf{X})$ — плотность вероятности выборки $\mathbf{X}$ при отсутствии сигнала в наблюдаемых данных. Здесь N — количество элементов x_i выборки $\mathbf{X}$, $\Delta = T/N$ — временной шаг выборки, а предел вычисляется при постоянном значении длительности интервала наблюдения $N\Delta = T$. Согласно определению, ФОП $\Lambda(\mathbf{l},\boldsymbol{\Theta})$ и соответствующий логарифм ФОП $L(\mathbf{l},\boldsymbol{\Theta}) = \ln \Lambda(\mathbf{l},\boldsymbol{\Theta})$ характеризуют плотность вероятности значений $\mathbf{l},\boldsymbol{\Theta}$ параметров принимаемого сигнала при заданной реализации наблюдаемых данных $x(t)$.

Обозначим $\Re = \Re_l \bigcup \Re_\theta$ — априорная область возможных значений оцениваемых параметров $(\mathbf{l}_0,\boldsymbol{\Theta}_0)$, являющаяся объединением априорных областей $\Re_l$ и $\Re_\theta$ возможных значений разрывных $\mathbf{l}_0$ и регулярных

Θ_0 параметров. Тогда совместные ОМП $l_{1m}, l_{2m},.., l_{pm}$ и $\Theta_{1m}, \Theta_{2m},.., \Theta_{rm}$ разрывных l_{01}, $l_{02},..., l_{0p}$ и регулярных параметров Θ_{01}, Θ_{02}, ..., Θ_{0r} сигнала вычисляются как координаты $l_1, l_2,.., l_p$ и $\Theta_1, \Theta_2,.., \Theta_r$ положения абсолютного максимума логарифма ФОП (2) в пределах априорной области $\Re$, т.е.

$$(l_{1m}, l_{2m},.., l_{pm}, \Theta_{1m}, \Theta_{2m},..., \Theta_{rm}) = \\ = \arg\sup_{(\mathbf{l},\mathbf{\Theta})\in\Re} L(l_1, l_2,.., l_p, \Theta_1, \Theta_2,..., \Theta_r). \quad (3)$$

Аналогично вектора $\mathbf{l}_m = \|l_{1m}, l_{2m},.., l_{pm}\|$ и $\mathbf{\Theta}_m = \|\Theta_{1m}, \Theta_{2m},..., \Theta_{rm}\|$ совместных ОМП параметров $\mathbf{l}_0$ и $\mathbf{\Theta}_0$ можно записать в виде

$$(\mathbf{l}_m, \mathbf{\Theta}_m) = \arg\sup_{(\mathbf{l},\mathbf{\Theta})\in\Re} L(\mathbf{l}, \mathbf{\Theta}) \quad (4а)$$

или

$$\mathbf{l}_m = \arg\sup_{\mathbf{l}\in\Re_l} L(\mathbf{l}, \mathbf{\Theta}_m), \quad \mathbf{\Theta}_m = \arg\sup_{\mathbf{\Theta}\in\Re_\theta} L(\mathbf{l}_m, \mathbf{\Theta}). \quad (4б)$$

Если необходимо формировать (анализировать) только ОМП $\mathbf{l}_m$ (или $\mathbf{\Theta}_m$) разрывных (или регулярных) параметров, то оценки удобно представить как [1]

$$\mathbf{l}_m = \arg\sup_{\mathbf{l}\in\Re_l}\left[\sup_{\mathbf{\Theta}\in\Re_\theta} L(\mathbf{l}, \mathbf{\Theta})\right] = \arg\sup_{\mathbf{l}\in\Re_l} L_{m1}(\mathbf{l}),$$
$$\mathbf{\Theta}_m = \arg\sup_{\mathbf{\Theta}\in\Re_\theta}\left[\sup_{\mathbf{l}\in\Re_l} L(\mathbf{l}, \mathbf{\Theta})\right] = \arg\sup_{\mathbf{\Theta}\in\Re_\theta} L_{m2}(\mathbf{\Theta}), \quad (5)$$

где решающие статистики $L_{m1}(\mathbf{l})$ и $L_{m2}(\mathbf{\Theta})$ оценок $\mathbf{l}_m$ и $\mathbf{\Theta}_m$ разрывных и регулярных параметров сигнала получаются максимизацией решающей статистики $L(\mathbf{l}, \mathbf{\Theta})$ (2) по регулярным $\mathbf{\Theta}$ и разрывным $\mathbf{l}$ параметрам соответственно:

$$L_{m1}(\mathbf{l}) = \sup_{\mathbf{\Theta}\in\Re_\theta} L(\mathbf{l}, \mathbf{\Theta}), \quad L_{m2}(\mathbf{\Theta}) = \sup_{\mathbf{l}\in\Re_l} L(\mathbf{l}, \mathbf{\Theta}). \quad (6)$$

Если обозначить

$$\mathbf{l}_A(\mathbf{\Theta}) = \arg\sup_{\mathbf{l}\in\Re_l} L(\mathbf{l}, \mathbf{\Theta}), \quad \mathbf{\Theta}_A(\mathbf{l}) = \arg\sup_{\mathbf{\Theta}\in\Re_\theta} L(\mathbf{l}, \mathbf{\Theta}),$$

то функционалы $L_{m1}(\mathbf{l})$ и $L_{m2}(\mathbf{\Theta})$ можно определить как сечения логарифма ФОП $L(\mathbf{l}, \mathbf{\Theta})$ (2) поверхностями $\mathbf{\Theta} = \mathbf{\Theta}_A(\mathbf{l})$ и $\mathbf{l} = \mathbf{l}_A(\mathbf{\Theta})$ соответственно, т.е.

$$L_{m1}(\mathbf{l}) = L[\mathbf{l}, \mathbf{\Theta}_A(\mathbf{l})], \quad L_{m2}(\mathbf{\Theta}) = L[\mathbf{l}_A(\mathbf{\Theta}), \mathbf{\Theta}]. \quad (7)$$

Если регулярные параметры $\mathbf{\Theta}_0$ априори известны, то совместные ОМП $\mathbf{l}_{m0} = \|l_{1m0}, l_{2m0},.., l_{pm0}\|$ разрывных параметров $\mathbf{l}_0$ запишутся как [1—3]

$$\mathbf{l}_{m0} = \arg\sup_{\mathbf{l}\in\Re_l} L_{01}(\mathbf{l}), \quad L_{01}(\mathbf{l}) = L(\mathbf{l}, \mathbf{\Theta}_0). \quad (8)$$

Решающая статистика $L_{01}(\mathbf{l})$ алгоритма оценки (8) является сечением логарифма ФОП $L(\mathbf{l}, \mathbf{\Theta})$ (2) поверхностью $\mathbf{\Theta} = \mathbf{\Theta}_0$. Асимптотически точные (с ростом ОСШ) выражения для характеристик совместных ОМП $\mathbf{l}_{m0}$ (8) разрывных параметров $\mathbf{l}_0$ при априори известных регулярных параметрах $\mathbf{\Theta}_0$ можно найти с помощью методов ЛАА и ЛМА, как это сделано в [7].

Если разрывные параметры $\mathbf{l}_0$ априори известны, то совместные ОМП $\mathbf{\Theta}_{m0} = \|\Theta_{1m0}, \Theta_{2m0},.., \Theta_{rm0}\|$ регулярных параметров $\mathbf{\Theta}_0$ определяются как

$$\mathbf{\Theta}_{m0} = \arg\sup_{\mathbf{\Theta}\in\Re_\theta} L_{02}(\mathbf{\Theta}), \quad L_{02}(\mathbf{\Theta}) = L(\mathbf{l}_0, \mathbf{\Theta}). \quad (9)$$

Решающая статистика $L_{02}(\mathbf{\Theta})$ алгоритма оценки (9) является сечением логарифма ФОП $L(\mathbf{l}, \mathbf{\Theta})$ поверхностью $\mathbf{l} = \mathbf{l}_0$. Асимптотически точные (с ростом ОСШ) выражения для характеристик совместных ОМП $\mathbf{\Theta}_{m0}$ (9) регулярных параметров $\mathbf{\Theta}_0$ при априори известных разрывных параметрах $\mathbf{l}_0$ сигнала можно найти с помощью метода малого параметра [1, 3].

В общем случае $\mathbf{\Theta}_A(\mathbf{l}) \neq \mathbf{\Theta}_0$ и $\mathbf{l}_A(\mathbf{\Theta}) \neq \mathbf{l}_0$, поэтому совместные ОМП $\mathbf{l}_m$ и $\mathbf{\Theta}_m$ (3)-(5) разрывных и регулярных параметров сигнала не совпадают с соответствующими ОМП $\mathbf{l}_{m0}$ (8) разрывных параметров при известных регулярных параметрах и с ОМП $\mathbf{\Theta}_{m0}$ (9) регулярных параметров при известных разрывных параметрах. Метод малого параметра и метод ЛМА непосредственно неприменимы для нахождения характеристик совместных ОМП $(\mathbf{l}_m, \mathbf{\Theta}_m)$ (3)—(5) разрывных и регулярных параметров сигнала.

Рассмотрим применение метода ЛАА для вычисления асимптотически точных (с ростом ОСШ z) выражений для характеристик совместных ОМП (3)—(5) *разрывных и регулярных параметров сигнала.* Для этого конкретизируем локальные представления статистических характеристик логарифма ФОП (2), вытекающие из свойств разрывных и регулярных параметров сигналов.

2. ЛОКАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК РЕШАЮЩЕЙ СТАТИСТИКИ АЛГОРИТМА ОЦЕНКИ

Эффективность ОМП (3)—(5) однозначно определяется статистическими характеристиками логарифма ФОП (2). При анализе ОМП удобно представить логарифм ФОП (2) в виде суммы $L(\mathbf{l},\Theta) = S(\mathbf{l},\Theta) + N(\mathbf{l},\Theta)$, где $S(\mathbf{l},\Theta) =< L(\mathbf{l},\Theta) >$ — сигнальная функция (детерминированная составляющая логарифма ФОП), а $N(\mathbf{l},\Theta) = L(\mathbf{l},\Theta) - \langle L(\mathbf{l},\Theta)\rangle$ — шумовая функция (флуктуационная составляющая). Здесь и далее < > означает усреднение по реализациям наблюдаемых данных $x(t)$ (1) (или по реализациям логарифма ФОП (2)) при фиксированных истинных значениях $\mathbf{l}_0$ и Θ_0 оцениваемых параметров сигнала [1].

Следуя [1, 3—10 и др.], будем считать, что логарифм ФОП $L(\mathbf{l},\Theta)$ является гауссовским случайным полем [11]. Тогда для вычисления характеристик ОМП (3)—(5) достаточно ограничиться анализом поведения первых двух моментов логарифма ФОП: сигнальной функции $S(\mathbf{l},\Theta)$ и корреляционной функции $K(\mathbf{l}_1,\Theta_1,\mathbf{l}_2,\Theta_2) = \langle N(\mathbf{l}_1,\Theta_1)N(\mathbf{l}_2,\Theta_2)\rangle$ шумовой функции $N(\mathbf{l},\Theta)$. Здесь обозначено: $\mathbf{l}_j = \|l_{j1}, l_{j2},\ldots,l_{jp}\|$, $\Theta_j = \|\Theta_{j1},\Theta_{j2},\ldots,\Theta_{jr}\|$, $j = 1,2$ — вектора разрывных и регулярных параметров сигнала.

Аналогично [1, 3-10 и др.] полагаем, что сигнальная функция $S(\mathbf{l},\Theta)$ в пределах априорной области $\Re$ имеет единственный максимум в точке $\mathbf{l} = \mathbf{l}_0$, $\Theta = \Theta_0$, причем эта точка является внутренней точкой области $\Re$, а реализации шумовой функции $N(\mathbf{l},\Theta)$ непрерывны с вероятностью 1. Тогда выходное отношение сигнал—шум (ОСШ) для алгоритма ОМП (3)—(5) запишется в виде [1]

$$z = S(\mathbf{l}_0,\Theta_0)\Big/\sqrt{< N^2(\mathbf{l}_0,\Theta_0) >} = A_S / \sigma_N, \quad (10)$$

где $A_S = S(\mathbf{l}_0,\Theta_0) > 0$ — величина абсолютного максимума сигнальной функции, а $\sigma_N^2 = \langle N^2(\mathbf{l}_0,\Theta_0)\rangle$ — дисперсия шумовой функции при $\mathbf{l} = \mathbf{l}_0$, $\Theta = \Theta_0$. Для нахождения асимптотических (с ростом ОСШ z) выражений для характеристик ОМП (3)—(5) считаем, что ОСШ z (10) настолько велико, что достигается *высокая апостериорная точность* оценок [1, 3, 4, 6]. При этом совместные ОМП $\mathbf{l}_m$, Θ_m (3)—(5) расположены в малой окрестности точки $\mathbf{l} = \mathbf{l}_0$, $\Theta = \Theta_0$ максимума сигнальной функции, а при $z \to \infty$ оценки $\mathbf{l}_m$ и Θ_m сходятся к значениям $\mathbf{l}_0$ и Θ_0 в среднеквадратическом [1,4,6]. Тогда для расчета характеристик ОМП (3)-(5) достаточно учитывать поведение сигнальной функции $S(\mathbf{l},\Theta)$ и корреляционной функции $K(\mathbf{l}_1,\Theta_1,\mathbf{l}_2,\Theta_2)$ *в малой окрестности* точки $\mathbf{l} = \mathbf{l}_0$, $\Theta = \Theta_0$, причем с ростом ОСШ z (10) величина этой окрестности уменьшается.

Конкретизируем *локальные* (в малой окрестности точки $(\mathbf{l}_0,\Theta_0)$) *представления первых двух моментов логарифма ФОП* , позволяющие применить метод ЛАА для вычисления характеристик совместных оценок (3)-(5) разрывных и регулярных параметров сигнала.

2.1. Аддитивно-мультипликативное представление моментов логарифма ФОП по векторам разрывных и регулярных параметров

Рассмотрим в области $\Re$ значений параметров $\mathbf{l},\Theta$ малую окрестность $\Re_\delta$ точки $(\mathbf{l}_0,\Theta_0)$. Обозначим $\delta_{li} = \max|l_i - l_{0i}|$, $l_i \in \Re_\delta$ — величина максимального отклонения точек окрестности $\Re_\delta$ от точки $(\mathbf{l}_0,\Theta_0)$ по координате l_i, соответствующей разрывному параметру l_{0i}, а $\delta_{\theta i} = \max|\Theta_i - \Theta_{0i}|$, $\Theta_i \in \Re_\delta$ — по координате Θ_i, соответствующей регулярному параметру Θ_{0i}. Введем максимальные отклонения $\delta_l = \max(\delta_{l1},\delta_{l2},..,\delta_{lp})$ и $\delta_\theta = \max(\delta_{\theta 1},\delta_{\theta 2},..,\delta_{\theta r})$ точек области $\Re_\delta$ от точки $(\mathbf{l}_0,\Theta_0)$ по разрывным и регулярным параметрам соответственно, а $\delta = \max(\delta_l,\delta_\theta)$ — по всем оцениваемым параметрам сигнала.

Пусть в окрестности $\Re_\delta$ точки $(\mathbf{l}_0,\Theta_0)$ сигнальная функция $S(\mathbf{l},\Theta)$ и корреляционная функция $K(\mathbf{l}_1,\Theta_1,\mathbf{l}_2,\Theta_2)$ допускают асимптотические (при $\delta \to 0$) аддитивно-мультипликативные представления

$$\begin{gathered} S(\mathbf{l},\Theta) = \sum_{k=1}^{v} A_{Sk} S_{Uk}(\mathbf{l}) S_{Rk}(\Theta) + o(\delta^2), \\ K(\mathbf{l}_1,\Theta_1,\mathbf{l}_2,\Theta_2) = \\ = \sum_{k=1}^{u} \sigma_{Nk}^2 K_{Uk}(\mathbf{l}_1,\mathbf{l}_2) K_{Rk}(\Theta_1,\Theta_2) + o(\delta^2), \end{gathered} \quad (11)$$

где $S_{Rk}(\Theta)$ и $K_{Rk}(\Theta_1,\Theta_2)$ — функции, зависящие только от регулярных параметров, $S_{Uk}(\mathbf{l})$ и $K_{Uk}(\mathbf{l}_1,\mathbf{l}_2)$ — функции, зависящие только от разрывных параметров сигнала, $o(\delta^2)$ — величина большего порядка малости, чем δ^2, а $v \ge 1$ и $u \ge 1$ — произвольное, но конечное количество слагаемых в суммах.

Параметры $\Theta(\Theta_i)$ являются регулярными, так что функции $S_{Rk}(\Theta)$ и $K_{Rk}(\Theta_1,\Theta_2)$ непрерывны и непрерывно дифференцируемы в рассматриваемой окрестности точки $(\mathbf{l}_0,\Theta_0)$ как минимум дважды [1, 3, 4, 6].

Функции $S_{Rk}(\Theta)$ и $K_{Rk}(\Theta_1,\Theta_2)$ нормируем так, чтобы выполнялись условия

$$S_{Rk}(\Theta_0)=1,\ K_{Rk}(\Theta_0,\Theta_0)=1. \tag{12}$$

Параметры $\mathbf{l}(\mathbf{l}_i)$ являются разрывными, так что функции $S_{Uk}(\mathbf{l})$ и $K_{Uk}(\mathbf{l}_1,\mathbf{l}_2)$ непрерывны, но их первые производные могут иметь разрывы первого рода в точках $\mathbf{l}=\mathbf{l}_0$ и $\mathbf{l}_1=\mathbf{l}_2$ соответственно [4-6]. Аналогично (12), функции $S_{Uk}(\mathbf{l})$ и $K_{Uk}(\mathbf{l}_1,\mathbf{l}_2)$ нормируем так, что

$$S_{Uk}(\mathbf{l}_0)=1,\ K_{Uk}(\mathbf{l}_0,\mathbf{l}_0)=1. \tag{13}$$

Из (11)—(13) следует, что константы A_{Sk} удовлетворяют условиям

$$\sum_{k=1}^{v} A_{Sk}+o(\delta^2)=A_S, \tag{14}$$

где $A_S=S(\mathbf{l}_0,\Theta_0)$ — величина максимума сигнальной функции $S(\mathbf{l},\Theta)$. При этом

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{v} A_{Sk}S_{Uk}(\mathbf{l})+o(\delta^2)=A_S S_U(\mathbf{l}),\\&\sum_{k=1}^{v} A_{Sk}S_{Rk}(\Theta)+o(\delta^2)=A_S S_R(\Theta),\end{aligned} \tag{15}$$

где функции

$$\begin{aligned}&S_U(\mathbf{l})=\sum_{k=1}^{v} A_{Sk}S_{Uk}(\mathbf{l})/A_S+o(\delta^2)=S(\mathbf{l},\Theta_0)/A_S,\\&S_R(\Theta)=\sum_{k=1}^{v} A_{Sk}S_{Rk}(\Theta)/A_S+o(\delta^2)=S(\mathbf{l}_0,\Theta)/A_S\end{aligned} \tag{16}$$

являются нормированными сечениями сигнальной функции $S(\mathbf{l},\Theta)$ поверхностями $\Theta=\Theta_0$ и $\mathbf{l}=\mathbf{l}_0$ соответственно. Сечения $S_U(\mathbf{l})$ и $S_R(\Theta)$ будем называть нормированными сигнальными функциями по разрывным и регулярным параметрам сигнала. Из свойств сигнальной функции $S(\mathbf{l},\Theta)$ следует, что функции $S_U(\mathbf{l})$ и $S_R(\Theta)$ (16) достигают максимума при $\mathbf{l}=\mathbf{l}_0$ и $\Theta=\Theta_0$ соответственно, а величины этих максимумов, согласно (12), (13), нормированы так, что $S_U(\mathbf{l}_0)=1$, $S_R(\Theta_0)=1$.

Из (11)—(13) также следует, что константы σ_{Nk}^2 удовлетворяют условиям

$$\sum_{k=1}^{u} \sigma_{Nk}^2+o(\delta^2)=\sigma_N^2, \tag{17}$$

где σ_N^2 — дисперсия шумовой функции $N(\mathbf{l},\Theta)$ в точке $(\mathbf{l}_0,\Theta_0)$. Аналогично (15)

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{u} \sigma_{Nk}^2K_{Uk}(\mathbf{l}_1,\mathbf{l}_2)+o(\delta^2)=\sigma_N^2K_U(\mathbf{l}_1,\mathbf{l}_2),\\&\sum_{k=1}^{u} \sigma_{Nk}^2K_{Rk}(\Theta_1,\Theta_2)+o(\delta^2)=\sigma_N^2K_R(\Theta_1,\Theta_2),\end{aligned} \tag{18}$$

где функции

$$\begin{aligned}K_U(\mathbf{l}_1,\mathbf{l}_2)&=\sum_{k=1}^{u}\sigma_{Nk}^2K_{Uk}(\mathbf{l}_1,\mathbf{l}_2)/\sigma_N^2+o(\delta^2)=\\&=K(\mathbf{l}_1,\Theta_0,\mathbf{l}_2,\Theta_0)/\sigma_N^2,\\K_R(\Theta_1,\Theta_2)&=\sum_{k=1}^{u}\sigma_{Nk}^2K_{Rk}(\Theta_1,\Theta_2)/\sigma_N^2+o(\delta^2)=\\&=K(\mathbf{l}_0,\Theta_1,\mathbf{l}_0,\Theta_2)/\sigma_N^2\end{aligned} \tag{19}$$

являются нормированными сечениями корреляционной функции $K(\mathbf{l}_1,\Theta_1,\mathbf{l}_2,\Theta_2)$ поверхностями $\Theta_1=\Theta_0$, $\Theta_2=\Theta_0$ и $\mathbf{l}_1=\mathbf{l}_0$, $\mathbf{l}_2=\mathbf{l}_0$ соответственно. При этом сечения (19) удовлетворяют свойствам корреляционных функций. В частности, функции $K_U(\mathbf{l}_1,\mathbf{l}_2)$, $K_R(\Theta_1,\Theta_2)$ достигают максимума при $\mathbf{l}_1=\mathbf{l}_2$, $\Theta_1=\Theta_2$, причем, согласно (12), (13), выполняются условия $K_U(\mathbf{l}_0,\mathbf{l}_0)=1$ и $K_R(\Theta_0,\Theta_0)=1$. Кроме того, выполняются условия $K_U(\mathbf{l}_1,\mathbf{l}_2)=K_U(\mathbf{l}_2,\mathbf{l}_1)$, $K_R(\Theta_1,\Theta_2)=K_R(\Theta_2,\Theta_1)$ симметрии корреляционных функций. Поэтому сечения $K_U(\mathbf{l}_1,\mathbf{l}_2)$ и $K_R(\Theta_1,\Theta_2)$ будем называть нормированными корреляционными функциями шумовой функции по разрывным и регулярным параметрам сигнала.

Таким образом, считаем, что сигнальная функция и корреляционная функция шумовой функции в малой окрестности точки $(\mathbf{l}_0,\Theta_0)$ допускают аддитивно-мультипликативное представление (11). Разрывные и регулярные параметры $\mathbf{l}$ и Θ в выражениях для моментов (11) логарифма ФОП асимптотически разделяются. Такое аддитивно-мультипликативное представление должно быть точным хотя бы асимптотически (при $\delta\to 0$). При конечных (но малых) значениях δ аддитивно−мультипликативное представление должно осуществляться с точностью до величин большего порядка малости, чем δ^2.

Отметим, что представление (11) моментов логарифма ФОП часто встречается при обработке сигналов с неизвестными частотными и временными параметрами. Например, при обработке импульса с гауссовской случайной субструктурой [10], имеющей непрерывно дифференцируемую спектральную плотность, представление (11) моментов логарифма ФОП возможно по времени прихода, длительности, моментам появления и исчезновения импульса (разрывные параметры) и по центральной частоте, ширине полосы частот спектральной плотности случайной субструктуры импульса (регулярные параметры). При обработке радиоимпульса с прямоугольной огибающей представление (11) возможно по времени прихода, длительности (разрывные параметры) и частоте несущей, доплеровскому сдвигу частоты (регулярные параметры) [1, 6].

2.2. Локальные представления моментов логарифма ФОП по регулярным параметрам

Рассмотрим локальные представления составляющих $S_{Rk}(\Theta)$, $K_{Rk}(\Theta_1,\Theta_2)$, а также нормированных сигнальной функции $S_R(\Theta)$ (16) и корреляционной функции $K_R(\Theta_1,\Theta_2)$ (19), описывающих поведение моментов логарифма ФОП по регулярным параметрам.

Обозначим $\Re_{\theta\delta}=\Re_\theta\bigcap\Re_\delta$ — δ-окрестность точки $\Theta=\Theta_0$ в пределах области $\Re_\theta$ возможных значений регулярных параметров сигнала, Так как параметры Θ_i, $i=1,2,..,r$ являются *регулярными*, то моменты логарифма ФОП $L(\mathbf{l},\Theta)$ непрерывны и непрерывно дифференцируемы по этим параметрам [4, 6]. Поэтому считаем, что функции $S_{Rk}(\Theta)$, $K_{Rk}(\Theta_1,\Theta_2)$ непрерывны и непрерывно дифференцируемы в пределах области значений $\Re_\theta$ регулярных параметров, в том числе внутри окрестности $\Re_{\theta\delta}$ точки $\Theta=\Theta_0$. При этом в точке Θ_0 функции $S_{Rk}(\Theta)$ и $K_{Rk}(\Theta_1,\Theta_2)$ непрерывно дифференцируемы как минимум дважды [1—4, 6].

Дополнительно будем считать, что функции $S_{Rk}(\Theta)$ достигают максимума в точке $\Theta=\Theta_0$, а функции $K_{Rk}(\Theta_1,\Theta_2)$ достигают максимума при $\Theta_1=\Theta_2=\Theta_0$ и удовлетворяют условиям симметрии $K_{Rk}(\Theta_1,\Theta_2)=K_{Rk}(\Theta_2,\Theta_1)$. Тогда для всех $i=1,2,..,r$ выполняются условия

$$\begin{gathered}
\partial S_{Rk}(\Theta)/\partial\Theta_i\Big|_{\Theta=\Theta_0}=0,\\
\partial K_{Rk}(\Theta_1,\Theta_0)/\partial\Theta_{1i}\Big|_{\Theta_1=\Theta_0}=0,\\
\partial K_{Rk}(\Theta_0,\Theta_2)/\partial\Theta_{2i}\Big|_{\Theta_2=\Theta_0}=0.
\end{gathered}\tag{20}$$

В силу дифференцируемости составляющих $S_{Rk}(\Theta)$ и $K_{Rk}(\Theta_1,\Theta_2)$, представим их с помощью разложения в r-мерный ряд Тейлора по параметрам Θ_i, $i=1,2,..,r$ в малой (при $\delta_\theta\to 0$) окрестности $\Re_{\theta\delta}$ точки $\Theta=\Theta_0$:

$$\begin{gathered}
S_{Rk}(\Theta)=1-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}A''_{kij}\,(\Theta_i-\Theta_{0i})\times\\
\times(\Theta_j-\Theta_{0j})+o(\delta_\theta^2),\\
K_{Rk}(\Theta_1,\Theta_2)=\\
=1+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\vartheta''_{kij}(\Theta_{1i}-\Theta_{0i})(\Theta_{1j}-\Theta_{0j})+\\
+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\vartheta''_{kij}(\Theta_{2i}-\Theta_{0i})(\Theta_{2j}-\Theta_{0j})+\\
+\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\eta''_{kij}\,(\Theta_{1i}-\Theta_{0i})(\Theta_{2j}-\Theta_{0j})+o(\delta_\theta^2).
\end{gathered}\tag{21}$$

Здесь A''_{kij}, ϑ''_{kij}, η''_{kij} — независящие от $\Theta(\Theta_i)$ константы, определяемые как

$$\begin{gathered}
A''_{kij}=-\partial^2 S_{Rk}(\Theta)/\partial\Theta_i\partial\Theta_j\Big|_{\Theta=\Theta_0},\\
\vartheta''_{kij}=\partial^2 K_{Rk}(\Theta,\Theta_0)/\partial\Theta_i\partial\Theta_j\Big|_{\Theta=\Theta_0},\\
\eta''_{kij}=\partial^2 K_{Rk}(\Theta_1,\Theta_2)/\partial\Theta_{1i}\partial\Theta_{2j}\Big|_{\Theta_i=\Theta_0,\ i=1,2},
\end{gathered}\tag{22}$$

причем $A''_{kii}>0$, $\vartheta''_{kii}<0$. При получении разложения (21) учтены условия нормировки (12), а также условия (20).

Подставляя разложения (21) в (15),(18), находим асимптотические (при $\delta_\theta\to 0$) представления нормированных сигнальной функции $S_R(\Theta)$ и корреляционной функции $K_R(\Theta_1,\Theta_2)$ в малой окрестности $\Re_{\theta\delta}$ точки $\Theta=\Theta_0$:

$$\begin{gathered}
S_R(\Theta)=1-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}A''_{ij}\,(\Theta_i-\Theta_{0i})\times\\
\times(\Theta_j-\Theta_{0j})+o(\delta_\theta^2),\\
K_R(\Theta_1,\Theta_2)=\\
=1+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\vartheta''_{ij}\,(\Theta_{1i}-\Theta_{0i})(\Theta_{1j}-\Theta_{0j})+\\
+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\vartheta''_{ij}\,(\Theta_{2i}-\Theta_{0i})(\Theta_{2j}-\Theta_{0j})+\\
+\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\eta''_{ij}\,(\Theta_{1i}-\Theta_{0i})(\Theta_{2j}-\Theta_{0j})+o(\delta_\theta^2).
\end{gathered}\tag{23}$$

Здесь A''_{ij}, ϑ''_{ij}, η''_{ij} — независящие от $\Theta(\Theta_i)$ константы, которые определяются как

$$A''_{ij}=\sum_{k=1}^{v}A_{Sk}\,A''_{kij}\big/A_S=-\frac{\partial^2 S_R(\Theta)}{\partial\Theta_i\partial\Theta_j}\Big|_{\Theta=\Theta_0},$$

$$\vartheta''_{ij}=\sum_{k=1}^{u}\sigma_{Nk}^2\,\vartheta''_{kij}\big/\sigma_N^2=\frac{\partial^2 K_R(\Theta,\Theta_0)}{\partial\Theta_i\partial\Theta_j}\Big|_{\Theta=\Theta_0},$$

$$\eta''_{ij} = \sum_{k=1}^{u} \sigma_{Nk}^2 \eta''_{kij} \big/ \sigma_N^2 = \frac{\partial^2 K_R(\Theta_1, \Theta_2)}{\partial\Theta_{1i}\partial\Theta_{2j}}\Big|_{\Theta_l=\Theta_0}, \quad l = 1,2, \tag{24}$$

причем $A''_{ii} > 0$, $\vartheta''_{ii} < 0$. Из (23) следует, что при $\delta_\theta \to 0$ справедливы асимптотические представления

$$S_R(\Theta) = 1 - \mathrm{O}(\delta_\theta^2), \quad K_R(\Theta_1, \Theta_2) = 1 + \mathrm{O}(\delta_\theta^2), \tag{25}$$

где $\mathrm{O}(\delta)$ — величина того же порядка малости, что и δ. Представления (25) моментов логарифма ФОП являются характерными для регулярных параметров сигналов [1—4, 6].

2.3. Локальные представления моментов логарифма ФОП по разрывным параметрам

Рассмотрим характеристики составляющих $S_{Uk}(\mathbf{l})$, $K_{Uk}(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2)$, а также сигнальной функции $S_U(\mathbf{l})$ (16) и корреляционной функции $K_U(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2)$ (19), описывающих поведение моментов логарифма ФОП по разрывным параметрам.

Так как параметры l_i, $i = 1,2,..,p$ являются *разрывными*, то моменты логарифма ФОП непрерывны, но непрерывно не дифференцируемы по параметрам l_i при $l_i = l_{0i}$ [4, 6]. Первые производные моментов логарифма ФОП по параметрам l_i имеют разрывы первого рода при $l_i = l_{0i}$. Поэтому считаем, что составляющие $S_{Uk}(\mathbf{l})$ и $K_{Uk}(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2)$ сигнальной и корреляционной функций (11) непрерывны. Производные функций $S_{Uk}(\mathbf{l})$ по параметрам l_i, $i = 1,2,..,p$ могут иметь разрывы первого рода при $l_i = l_{0i}$. Производные составляющих $K_{Uk}(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2)$ по параметрам l_{ji}, $j = 1,2$, $i = 1,2,..,p$ также могут иметь разрывы первого рода при $l_{1i} = l_{2i} = l_{0i}$. В остальных точках области определения функции $S_{Uk}(\mathbf{l})$ и $K_{Uk}(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2)$ считаем непрерывно дифференцируемыми.

Обозначим $\Re_{l\delta} = \Re_l \cap \Re_\delta$ — δ-окрестность точки $\mathbf{l} = \mathbf{l}_0$ в пределах области $\Re_l$ возможных значений вектора $\mathbf{l}$ разрывных параметров сигнала. Аналогично [7, 9], будем считать, что в окрестности $\Re_{l\delta}$ нормированные сигнальная функция $S_U(\mathbf{l})$ (16) и корреляционная функция $K_U(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2)$ (19) шумовой функции логарифма ФОП по разрывным параметрам допускают *локальные аддитивно-мультипликативные представления*. Это значит [7,9], что составляющие $S_{Uk}(\mathbf{l})$ и $K_{Uk}(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2)$ нормированных сигнальной функции (16) и корреляционной функции (19) в малой ($\delta_l \to 0$) окрестности $\Re_{l\delta}$ точки $\mathbf{l} = \mathbf{l}_0$ допускают асимптотически мультипликативные представления

$$S_{Uk}(\mathbf{l}) = \prod_{i=1}^{p} S_{Uki}(l_i) + o(\delta_l), \quad k = 1,2,..,v,$$
$$K_{Uk}(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2) = \prod_{i=1}^{p} K_{Uki}(l_{1i}, l_{2i}) + o(\delta_l), \quad k = 1,2,..,u \tag{26}$$

где функции $S_{Uki}(l_i)$ и $K_{Uki}(l_{1i}, l_{2i})$ зависят только от i-го разрывного параметра $l_i (l_{1i}, l_{2i})$. В результате, все составляющие $S_{Uk}(\mathbf{l})$ и $K_{Uk}(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2)$ нормированных сигнальной функции $S_U(\mathbf{l})$ (16) и корреляционной функции $K_U(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2)$ (19) факторизуются по разрывным параметрам.

Конкретизируем локальные представления составляющих $S_{Uki}(l_i)$ исходя из свойств разрывных параметров.

Обозначим $\Im_i$, $i = 1,2,..,p$ — интервалы $[l_{0i} - \delta_{li}; l_{0i} + \delta_{li}]$ значений разрывных параметров l_i в пределах рассматриваемой окрестности $\Re_{l\delta}$ точки $\mathbf{l} = \mathbf{l}_0$, где $2\delta_{li}$ — длина интервала $\Im_i$. Введем в рассмотрение подинтервалы

$$\Im_{i1} \equiv [l_{0i} - \delta_{li}; l_{0i}], \; \Im_{i2} \equiv [l_{0i}; l_{0i} + \delta_{li}], \quad i = 1,2,..,p, \tag{27}$$

интервалов $\Im_i$, причем $\Im_{i1} \cup \Im_{i2} = \Im_i$. Следуя [7, 9], ограничимся рассмотрением класса разрывных параметров, для которых факторизованные составляющие $S_{Uki}(l_i)$, $i = 1,2,..,p$, $k = 1,2,...,v$ (26) нормированной сигнальной функции $S_U(\mathbf{l})$ (16) на каждом из подинтервалов $\Im_{ij}$, $j = 1,2$ окрестности $\Im_i$ точки $l_i = l_{0i}$ допускают асимптотическое представление

$$S_{Uki}(l_i) = 1 - d_{ki}^{(j)} \left| l_i - l_{0i} \right| + o(\delta_{li}), \quad l_i \in \Im_{ij}, \; j = 1,2 \tag{28}$$

при $\delta_{li} \to 0$. Здесь $d_{ki}^{(j)}$ — постоянные, не зависящие от значений l_i в пределах рассматриваемого подинтервала $l_i \in \Im_{ij}$. Для различных значений j величины $d_{ki}^{(j)}$ могут отличаться.

Представление (28) охватывает широкий класс функций, характеризующих форму факторизованных составляющих нормированной сигнальной функции логарифма ФОП по разрывным параметрам. Приведем некоторые примеры.

1) Если $d_{ki}^{(1)} = -d_{ki}^{(2)} = d_{ki}$, то получаем линейную составляющую

$$S_{Uki}(l_i) = 1 + d_{ki}(l_i - l_{0i}) + o(\delta_{li}).$$

Эта составляющая непрерывно дифференцируема в точке $l_i = l_{0i}$ и встречается при анализе оценок разрывных энергетических параметров сигналов [4, 6].

2) Если $d_{ki}^{(1)} = d_{ki}^{(2)} = d_{ki}$, то получаем треугольную составляющую

$$S_{Uki}(l_i) = 1 - d_{ki}\left| l_i - l_{0i}\right| + o(\delta_{li}),$$

часто встречающуюся при анализе оценок разрывных неэнергетических параметров сигналов[4, 6, 8]. Такая функция непрерывно не дифференцируема в точке $l_i = l_{0i}$ и имеет в этой точке разрыв первого рода.

3) Если $d_{ki}^{(1)} = d_{ki}$, $d_{ki}^{(2)} = 0$, $l_{0i} = 1$, то получаем ступенчатую составляющую

$$S_{Uki}(l_i) = \min(l_i, 1) + o(\delta_{li}),$$

которая часто встречается при анализе оценок разрывных энергетических параметров сигналов [4, 6]. Такая функция также непрерывно не дифференцируема в точке $l_i = l_{0i}$ и имеет в этой точке разрыв первого рода.

4) Если $d_{ki}^{(1)} = d_{ki}^{(2)} = 0$, то составляющая $S_{Uki}(l_i) = 1 + o(\delta_{li})$ не зависит от параметра l_i и может быть исключена из представления (26).

Таким образом, в общем случае составляющие $S_{Uki}(l_i)$ (28) непрерывно не дифференцируемы в точке $l_i = l_{0i}$, причем первые производные этих функций в точке $l_i = l_{0i}$ имеют разрыв первого рода.

Конкретизируем локальные представления составляющих $K_{Uki}(l_{1i}, l_{2i})$.

Обозначим $\aleph_i$, $i = 1, 2, .., p$ — области значений параметров l_{1i}, l_{2i} в окрестности точки l_{0i}, удовлетворяющие условиям $l_{1i}, l_{2i} \in \in [l_{0i} - \delta_{li}; l_{0i} + \delta_{li}]$. Введем в рассмотрение подобласти $\aleph_{ij}$, $j = 1, 2, .., 6$ области $\aleph_i$ значений параметров l_{1i} и l_{2i}, удовлетворяющие условиям

$$\begin{gathered} l_{0i} - \delta_{li} \le l_{1i} \le l_{2i} \le l_{0i}, \text{ если } l_{1i}, l_{2i} \in \aleph_{i1}; \\ l_{0i} - \delta_{li} \le l_{2i} \le l_{1i} \le l_{0i}, \text{ если } l_{1i}, l_{2i} \in \aleph_{i2}; \\ l_{0i} \le l_{1i} \le l_{2i} \le l_{0i} + \delta_{li}, \text{ если } l_{1i}, l_{2i} \in \aleph_{i3}; \\ l_{0i} \le l_{2i} \le l_{1i} \le l_{0i} + \delta_{li}, \text{ если } l_{1i}, l_{2i} \in \aleph_{i4}; \\ l_{0i} - \delta_{li} \le l_{1i} \le l_{0i} \le l_{2i} \le l_{0i} + \delta_{li}, \ l_{1i}, l_{2i} \in \aleph_{i5}; \\ l_{0i} - \delta_{li} \le l_{2i} \le l_{0i} \le l_{1i} \le l_{0i} + \delta_{li}, \ l_{1i}, l_{2i} \in \aleph_{i6} l \end{gathered} \tag{29}$$

причем $\aleph_{i1} \cup \aleph_{i2} \cup \aleph_{i3} \cup \aleph_{i4} \cup \aleph_{i5} \cup \aleph_{i6} = \aleph_i$. Аналогично (28) будем считать, что факторизованные составляющие $K_{Uki}(l_{1i}, l_{2i})$ в (19) на каждой из подобластей $\aleph_{ij}$, $j = 1, 2, .., 6$ в окрестности точки l_{0i} допускают представление

$$\begin{gathered} K_{Uki}(l_{1i}, l_{2i}) = 1 - c_{ki0}^{(j)} \left|l_{2i} - l_{1i}\right| - \\ - c_{ki1}^{(j)} \left|l_{1i} - l_{0i}\right| - c_{ki2}^{(j)} \left|l_{2i} - l_{0i}\right| + o(\delta_{li}), \\ l_{1i}, l_{2i} \in \aleph_{ij}, \ j = 1, 2, .., 6. \end{gathered} \tag{30}$$

Здесь $c_{kim}^{(j)}$, $m = 0, 1, 2$ — постоянные, не зависящие от значений l_{1i}, l_{2i} на рассматриваемой подобласти $\aleph_{ij}$. Для различных j постоянные $c_{kim}^{(j)}$ могут отличаться.

Представление (30) охватывает широкий класс функций, характеризующих форму факторизованных составляющих нормированной корреляционной функции логарифма ФОП по разрывным параметрам. Приведем некоторые примеры.

1) Если $c_{ki1}^{(j)} = c_{ki2}^{(j)} = 0$, а $c_{ki0}^{(j)} = c_{ki}$ для всех $j = 1, 2, .., 6$, тогда получаем

$$K_{Uki}(l_{1i}, l_{2i}) = 1 - c_{ki} \left|l_{2i} - l_{1i}\right| + o(\delta_{li}).$$

Такие составляющие корреляционной функции логарифма ФОП часто встречаются при анализе оценок неэнергетических разрывных параметров квазидетерминированных [4, 6, 8] и стохастических [10] сигналов.

2) Если $c_{ki0}^{(j)} = c_{ki0}$ для всех $j = 1, 2, .., 6$, $c_{ki1}^{(j)} = 0$ при $j = 1, 4, 5, 6$, $c_{ki2}^{(j)} = 0$ при $j = 2, 3, 5, 6$, а также $c_{ki1}^{(j)} = c_{ki}$ при $j = 2, 3$ и $c_{ki2}^{(j)} = c_{ki}$ при $j = 1, 4$, то

$$K_{Uki}(l_{1i}, l_{2i}) = 1 - c_{ki0} \left|l_{2i} - l_{1i}\right| - \begin{cases} c_{ki} \min(\left|l_{2i} - l_{0i}\right|, \left|l_{1i} - l_{0i}\right|) + o(\delta_{li}), \\ \text{если } (l_{2i} - l_{0i})(l_{1i} - l_{0i}) \ge 0; \\ o(\delta_{li}), \text{ если } (l_{2i} - l_{0i})(l_{1i} - l_{0i}) < 0. \end{cases}$$

Такие составляющие встречается при анализе оценок неэнергетических разрывных параметров стохастических сигналов [10].

3) Пусть $l_{0i} = 1$, $c_{ki0}^{(j)} = 0$ для всех $j = 1, 2, .., 6$, $c_{ki1}^{(j)} = 0$ при $j = 2, 4, 6$, $c_{ki1}^{(j)} = 1$ при $j = 1, 5$, $c_{ki1}^{(j)} = -1$ при $j = 3$, $c_{ki2}^{(j)} = 0$ при $j = 1, 3, 5$, $c_{ki2}^{(j)} = 1$ при $j = 2, 6$, а также $c_{ki2}^{(j)} = -1$ при $j = 4$. Тогда получаем составляющие

$$K_{Uki}(l_{1i}, l_{2i}) = \min(l_{2i}, l_{1i}) + o(\delta_{li}),$$

которые встречаются при анализе оценок энергетических разрывных параметров квазидетерминированных [4, 6] и стохастических [10] сигналов.

4) Если $l_{0i} = 1$, $c_{ki0}^{(j)} = 0$ для всех $j = 1,2,..,6$, $c_{ki1}^{(j)} = 0$ при $j = 2,3,4,6$, $c_{ki1}^{(j)} = 1$ при $j = 1,5$, $c_{ki2}^{(j)} = 0$ при $j = 1,3,4,5$, $c_{ki2}^{(j)} = 1$ при $j = 2,6$, то получаем

$$K_{Uki}(l_{1i}, l_{2i}) = \min(1, l_{2i}, l_{1i}) + o(\delta_{li}).$$

Такие составляющие встречается при анализе оценок энергетических разрывных параметров стохастических сигналов [10].

5) Если $c_{ki0}^{(j)} = c_{ki1}^{(j)} = c_{ki2}^{(j)} = 0$ для всех $j = 1,2,..,6$, то $K_{Uki}(l_{1i}, l_{2i}) = 1 + o(\delta_{li})$. Такая составляющая может быть исключена из представления (26).

Таким образом, в общем случае функции $K_{Uki}(l_{1i}, l_{2i})$ (30) непрерывно не дифференцируемы по параметрам l_{i1}, l_{i2} при $l_{1i} = l_{0i}$, $l_{2i} = l_{0i}$, причем первые производные этих функций в точке l_{0i} имеют разрыв первого рода.

Подставляя выражения (28), (30) в (26), находим асимптотические (при $\delta_l \to 0$) представления составляющих $S_{Uk}(\mathbf{l})$, $K_{Uk}(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2)$ в окрестности $\Re_{l\delta}$ точки $\mathbf{l} = \mathbf{l}_0$:

$$\begin{gathered} S_{Uk}(\mathbf{l}) = 1 - \sum_{i=1}^{p} d_{ki}^{(j)} \left| l_i - l_{0i} \right| + o(\delta_l) \\ \text{при } l_i \in \Im_{ij},\ j = 1,2, \\ K_{Uk}(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2) = 1 + \sum_{i=1}^{P} c_{ki0}^{(j)} \left| l_{2i} - l_{1i} \right| + \\ + \sum_{i=1}^{P} c_{ki1}^{(j)} \left| l_{1i} - l_{0i} \right| + \sum_{i=1}^{P} c_{ki2}^{(j)} \left| l_{2i} - l_{0i} \right| + o(\delta_l) \\ \text{при } l_{1i}, l_{2i} \in \aleph_{ij},\ j = 1,2,..,6. \end{gathered} \tag{32}$$

Здесь $\Im_{ij}$ и $\aleph_{ij}$ — области значений параметров l_i и l_{1i}, l_{2i}, удовлетворяющие условиям (27) и (29). Подставляя выражения (32) в (16), (19), находим асимптотические (при $\delta_l \to 0$) представления нормированных сигнальной функции $S_U(\mathbf{l})$ и корреляционной функции $K_U(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2)$ в окрестности $\Re_{l\delta}$ точки $\mathbf{l} = \mathbf{l}_0$:

$$\begin{gathered} S_U(\mathbf{l}) = 1 - \sum_{i=1}^{P} d_i^{(j)} \left| l_i - l_{0i} \right| + o(\delta_l) \\ \text{при } l_i \in \Im_{ij},\ j = 1,2, \end{gathered} \tag{33}$$

$$\begin{gathered} K_U(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2) = 1 + \sum_{i=1}^{P} c_{i0}^{(j)} \left| l_{2i} - l_{1i} \right| + \sum_{i=1}^{P} c_{i1}^{(j)} \left| l_{1i} - l_{0i} \right| + \\ + \sum_{i=1}^{P} c_{i2}^{(j)} \left| l_{2i} - l_{0i} \right| + o(\delta_l) \\ \text{при } l_{1i}, l_{2i} \in \aleph_{ij},\ j = 1,2,..,6. \end{gathered}$$

Здесь

$$\begin{gathered} d_i^{(j)} = \sum_{k=1}^{v} A_{Sk}\, d_{ki}^{(j)} \big/ A_S,\ \ c_{ij}^{(j)} = \sum_{k=1}^{u} \sigma_{Nk}^2\, c_{kij}^{(j)} \big/ \sigma_N^2, \\ j = 0,1,2,\ \ i = 1,2,..,p \end{gathered} \tag{34}$$

— константы, не зависящие от значений $\mathbf{l}(\mathbf{l}_i)$ в пределах рассматриваемых подобластей $l_i \in \Im_{ij}$ (27), $l_{1i}, l_{2i} \in \aleph_{ij}$ (29).

Из (33) следует, что при $\delta_l \to 0$ справедливы асимптотические представления

$$S_U(\mathbf{l}) = 1 - \mathrm{O}(\delta_l),\ \ K_U(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2) = 1 + \mathrm{O}(\delta_l).$$

Такие представления моментов логарифма ФОП, в отличие от (25), являются характерными для разрывных параметров сигналов [4—6].

3. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ЛОКАЛЬНО-АДДИТИВНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ДЛЯ АНАЛИЗА СОВМЕСТНЫХ ОЦЕНОК РАЗРЫВНЫХ И РЕГУЛЯРНЫХ ПАРАМЕТРОВ

3.1. Асимптотическое представление распределения совместных оценок разрывных и регулярных параметров

Рассмотрим асимптотически точные (с ростом ОСШ (10)) аппроксимации для характеристик совместных ОМП (3), (4) разрывных и регулярных параметров сигнала с учетом рассмотренных в п. 2 локальных характеристик моментов логарифма ФОП. Считаем, что ОСШ (10) настолько велико, что достигается высокая апостериорная точность оценок [1,4,6] и для расчета характеристик ОМП (3), (4) достаточно учитывать только локальное поведение моментов логарифма ФОП $L(\mathbf{l}, \boldsymbol{\Theta})$ в малой δ – окрестности $\Re_\delta$ точки $(\mathbf{l}_0, \boldsymbol{\Theta}_0)$.

Воспользовавшись разложениями (21) и (32), получим асимптотические (при $\delta \to 0$) представления сигнальной функции $S(\mathbf{l}, \boldsymbol{\Theta})$ и корреляционной функции $K(\mathbf{l}_1, \boldsymbol{\Theta}_1, \mathbf{l}_2, \boldsymbol{\Theta}_2)$ шумовой функции логарифма ФОП (2) в окрестности $\Re_\delta$ точки $(\mathbf{l}_0, \boldsymbol{\Theta}_0)$. Для этого подставим (21), (32) в (11). Ограничиваясь в полученных выражениях учетом слагаемых, имеющих не более, чем второй порядок малости по δ, и, выполняя преобразования с учетом выражений (23), (33), находим

$$\begin{gathered} S(\mathbf{l},\Theta) = A_S[S_U(\mathbf{l}) + S_R(\Theta) - 1] + o(\delta^2), \\ K(\mathbf{l}_1,\Theta_1,\mathbf{l}_2,\Theta_2) = \\ = \sigma_N^2[K_U(\mathbf{l}_1,\mathbf{l}_2) + K_R(\Theta_1,\Theta_2) - 1] + o(\delta^2) \end{gathered} \tag{35}$$

при $\delta \to 0$. Здесь функции $S_U(\mathbf{l})$ и $S_R(\Theta)$ являются нормированными сечениями (16) сигнальной функции $S(\mathbf{l},\Theta)$, а функции $K_U(\mathbf{l}_1,\mathbf{l}_2)$ и $K_R(\Theta_1,\Theta_2)$ — нормированными сечениями (19) корреляционной функции $K(\mathbf{l}_1,\Theta_1,\mathbf{l}_2,\Theta_2)$.

Таким образом, первые два момента гауссовского логарифма ФОП $L(\mathbf{l},\Theta)$ допускают локально-аддитивное представление (35) в окрестности точки $(\mathbf{l}_0,\Theta_0)$, так что разрывные и регулярные параметры в выражениях для моментов логарифма ФОП *асимптотически разделяются*.

Введем в рассмотрение гауссовскую случайную величину M_0 с математическим ожиданием A_S и дисперсией σ_N^2, причем случайная величина M_0 и логарифм ФОП $L(\mathbf{l},\Theta)$ статистически независимы. Обозначим $M(\mathbf{l},\Theta) = L(\mathbf{l},\Theta) + M_0$. Так как ОМП не меняются при добавлении случайной величины к решающей статистике, то совместные ОМП (4) можно представить в виде $(\mathbf{l}_m,\Theta_m) = \arg\sup\limits_{(\mathbf{l},\Theta)\in\Re} M(\mathbf{l},\Theta)$ или

$$\begin{gathered} \mathbf{l}_m = \arg\sup_{\mathbf{l}\in\Re_l} M(\mathbf{l},\Theta_m), \\ \Theta_m = \arg\sup_{\Theta\in\Re_\theta} M(\mathbf{l}_m,\Theta). \end{gathered} \tag{36}$$

Обозначим $M_U(\mathbf{l})$, $M_R(\Theta)$ - статистически независимые совместно гауссовские случайные поля, математические ожидания $S_{MU}(\mathbf{l})$, $S_{MR}(\Theta)$ и корреляционные функции $K_{MU}(\mathbf{l}_1,\mathbf{l}_2)$, $K_{MR}(\Theta_1,\Theta_2)$ которых в окрестности точек $\mathbf{l} = \mathbf{l}_0$, $\Theta = \Theta_0$ представляются в виде

$$\begin{gathered} S_{MU}(\mathbf{l}) = A_S S_U(\mathbf{l}), \\ S_{MR}(\Theta) = A_S S_R(\Theta), \\ K_{MU}(\mathbf{l}_1,\mathbf{l}_2) = \sigma_N^2 K_U(\mathbf{l}_1,\mathbf{l}_2), \\ K_{MR}(\mathbf{l}_1,\mathbf{l}_2) = \sigma_N^2 K_R(\mathbf{l}_1,\mathbf{l}_2). \end{gathered} \tag{37}$$

Согласно (35),(37), при $\delta \to 0$ решающая статистика $M(\mathbf{l},\Theta) = L(\mathbf{l},\Theta) + M_0$ ОМП (36) в окрестности $\Re_\delta$ точки $(\mathbf{l}_0,\Theta_0)$ сходится по распределению к сумме статистически независимых гауссовских случайных полей $M_U(\mathbf{l})$ и $M_R(\Theta)$, т.е.

$$M(\mathbf{l},\Theta) \to^P M_U(\mathbf{l}) + M_R(\Theta),\ \delta \to 0.$$

Как отмечалось выше, характеристики ОМП при больших ОСШ z (10) определяются поведением решающей статистики в малой окрестности $\Re_\delta$ точки $(\mathbf{l}_0,\Theta_0)$, причем при $z \to \infty$ величина δ этой окрестности стремится к нулю. Будем считать, что ОСШ z настолько велико, а величина $\delta(\delta_l,\delta_\theta)$ окрестности $\Re_\delta$ точки $(\mathbf{l}_0,\Theta_0)$ настолько мала, что в пределах этой окрестности справедливы представления (37) моментов случайных полей $M_U(\mathbf{l})$ и $M_R(\Theta)$. Тогда совместную плотность вероятности $W(\mathbf{l},\Theta)$ оценок $(\mathbf{l}_m,\Theta_m)$ (36) при указанных значениях ОСШ z можно аппроксимировать произведением

$$W(\mathbf{l},\Theta) = W_U(\mathbf{l})W_R(\Theta), \tag{38}$$

где $W_U(\mathbf{l})$ и $W_R(\Theta)$ — плотности вероятностей векторов $\mathbf{l}_e = \|l_{1e}, l_{2e},.., l_{pe}\|$ и $\Theta_e = \|\Theta_{1e},\Theta_{2e},...,\Theta_{re}\|$ эквивалентных оценок разрывных $\mathbf{l}_0$ и регулярных Θ_0 параметров сигнала соответственно:

$$\begin{gathered} \mathbf{l}_e = \arg\sup_{\mathbf{l}\in\Re_{l\delta}}[M_U(\mathbf{l}) + M_R(\Theta_e)] = \arg\sup_{\mathbf{l}\in\Re_{l\delta}} M_U(\mathbf{l}), \\ \Theta_e = \arg\sup_{\Theta\in\Re_{\theta\delta}}[M_U(\mathbf{l}_e) + M_R(\Theta)] = \arg\sup_{\Theta\in\Re_{\theta\delta}} M_R(\Theta). \end{gathered} \tag{39}$$

Здесь $\Re_{l\delta} = \Re_l \cap \Re_\delta$ и $\Re_{\theta\delta} = \Re_\theta \cap \Re_\delta$ — малые окрестности точки $(\mathbf{l}_0,\Theta_0)$ в пределах области $\Re_\delta$, соответствующие только разрывным и только регулярным параметрам. Точность представления (38), (39) возрастает с увеличением ОСШ z, причем $\delta \to 0$ при $z \to \infty$.

Таким образом, характеристики совместных ОМП $\mathbf{l}_m$ и Θ_m (4) разрывных $\mathbf{l}_0$ и регулярных Θ_0 параметров сигнала асимптотически (с ростом ОСШ z) совпадают с соответствующими характеристиками эквивалентных оценок $\mathbf{l}_e$ и Θ_e (39). Совместные ОМП $\mathbf{l}_m$, Θ_m (4) сходятся по распределению к эквивалентным оценкам $\mathbf{l}_e$ и Θ_e (39) при $z \to \infty$, т.е.

$$(\mathbf{l}_m,\Theta_m) \to^P (\mathbf{l}_e,\Theta_e),\ z \to \infty.$$

Так как случайные поля $M_U(\mathbf{l})$ и $M_R(\Theta)$ статистически независимы, то оценки $\mathbf{l}_e$ и Θ_e (39) также статистически независимы. Поэтому совместные ОМП $\mathbf{l}_m$ и Θ_m (4) асимптотически (с ростом ОСШ) статистически независимы.

Согласно (16),(37), математическое ожидание $S_{MU}(\mathbf{l})$ решающей статистики $M_U(\mathbf{l})$ алгоритма (39) оценки $\mathbf{l}_e$ в окрестности $\Re_{l\delta}$ точки $\mathbf{l}=\mathbf{l}_0$ совпадает с математическим ожиданием $S_{01}(\mathbf{l}) = S(\mathbf{l},\Theta_0)$ решающей статистики $L_{01}(\mathbf{l}) = L(\mathbf{l},\Theta_0)$ алгоритма ОМП $\mathbf{l}_{m0}$ (8) разрывных параметров сигнала. Согласно (19), (37), корреляционная функция $K_{MU}(\mathbf{l}_1,\mathbf{l}_2)$ статистики $M_U(\mathbf{l})$ в окрестности $\Re_{l\delta}$ точки $\mathbf{l}=\mathbf{l}_0$ совпадает с корреляционной функцией $K_{01}(\mathbf{l}_1,\mathbf{l}_2) = K(\mathbf{l}_1,\Theta_0,\mathbf{l}_2,\Theta_0)$ статистики $L_{01}(\mathbf{l})$. При этом случайные поля $M_U(\mathbf{l})$ и $L_{01}(\mathbf{l})$ имеют гауссовское распределение вероятностей. Следовательно, характеристики эквивалентной оценки $\mathbf{l}_e$ (39) асимптотически (с ростом ОСШ z) совпадают с характеристиками ОМП $\mathbf{l}_{m0}$ (8) разрывных параметров при априори известных регулярных параметрах сигнала. Оценки $\mathbf{l}_e$ (39) и $\mathbf{l}_{m0}$ (8) разрывных параметров $\mathbf{l}_0$ сигнала асимптотически эквивалентны по распределению, т.е. $\mathbf{l}_e \to^P \mathbf{l}_{m0}$ при $z\to\infty$.

Аналогично получаем, что математическое ожидание $S_{MR}(\Theta)$ решающей статистики $M_R(\Theta)$ алгоритма (39) оценки Θ_e в окрестности $\Re_{\theta\delta}$ точки $\Theta=\Theta_0$ совпадает с математическим ожиданием $S_{02}(\Theta) = S(\mathbf{l}_0,\Theta)$ решающей статистики $L_{02}(\Theta) = L(\mathbf{l}_0,\Theta)$ алгоритма ОМП Θ_{m0} (9) регулярных параметров. Корреляционная функция $K_{MR}(\Theta_1,\Theta_2)$ решающей статистики $M_R(\Theta)$ совпадает с корреляционной функцией $K_{02}(\Theta_1,\Theta_2) = K(\mathbf{l}_0,\Theta_1,\mathbf{l}_0,\Theta_2)$ статистики $L_{02}(\Theta)$. При этом случайные поля $M_R(\Theta)$ и $L_{02}(\Theta)$ имеют гауссовское распределение вероятностей. Следовательно, характеристики эквивалентной оценки Θ_e (39) асимптотически (с ростом ОСШ z) совпадают с характеристиками ОМП Θ_{m0} (9) разрывных параметров при априори известных регулярных параметрах сигнала. Оценки Θ_e (39) и Θ_{m0} (9) регулярных параметров Θ_0 сигнала асимптотически эквивалентны по распределению, т.е. $\Theta_e \to^P \Theta_{m0}$ при $z\to\infty$.

Таким образом, в качестве асимптотических характеристик ОМП $\mathbf{l}_m$ (4) можно рассматривать характеристики ОМП $\mathbf{l}_{m0}$ (8) разрывных параметров сигнала при априори известных регулярных параметрах. Характеристики ОМП $\mathbf{l}_{m0}$ (8) можно найти с помощью методов ЛАА и ЛМА, как это сделано в [7]. В качестве асимптотических характеристик ОМП Θ_m (4) можно рассматривать характеристики ОМП Θ_{m0} (8) регулярных параметров сигнала при априори известных разрывных параметрах. Характеристики ОМП Θ_{m0} (9) можно найти с помощью метода малого параметра [1,3]. При этом следует учитывать, что совместные ОМП $\mathbf{l}_m$ и Θ_m асимптотически (с ростом ОСШ) статистически независимы, так что их совместная плотность вероятности допускает представление (38).

Воспользовавшись асимптотической эквивалентностью характеристик оценок $\mathbf{l}_m,\Theta_m$ (4) и $\mathbf{l}_{m0},\Theta_{m0}$ (8),(9) , запишем асимптотически точные (с ростом ОСШ) выражения характеристик совместных ОМП $\mathbf{l}_m,\Theta_m$ (4).

3.2. Характеристики совместных оценок разрывных и регулярных параметров

Регулярные параметры. Используя метод малого параметра [1,3] для вычисления характеристик совместных оценок Θ_{m0} (9), находим, что условная (при фиксированном Θ_0) совместная плотность вероятности $W_R(\Theta)$ оценок Θ_m (4) является гауссовской и определяется по формуле

$$W_R(\Theta_m) = \frac{z^r}{\sqrt{(2\pi)^r}}\sqrt{\det(\mathbf{A}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{A}^T)}\times$$
$$\times\exp\left[-\frac{z^2}{2}(\Theta_m-\Theta_0)^T\mathbf{A}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{A}^T(\Theta_m-\Theta_0)\right], \quad (40)$$

где z — ОСШ (10), $\mathbf{A}=\|A''_{ij}\|$ и $\mathbf{K}=\|\eta''_{ij}\|$ — матрицы размером $r\times r$ с элементами A''_{ij} и η''_{ij}, $i,j=1,2,..,r$ (24) соответственно, а символы “T” и “−1”означают операции транспонирования и обращения матрицы соответственно.

Используя распределение (40), находим условные (при фиксированном Θ_0) вектор смещений $\mathbf{b}=\|b_i\|$ и матрицу рассеяний $\mathbf{V}=\|V_{ij}\|$ с элементами $b_i=\langle\Theta_{im}-\Theta_{0i}\rangle$ и $V_{ij}=\langle(\Theta_{im}-\Theta_{0i})(\Theta_{jm}-\Theta_{0j})\rangle$, $i,j=1,2,..,r$, причем [1]

$$\mathbf{b}=0,\ b_i=0,\ \mathbf{V}=(\mathbf{A}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{A}^T)^{-1}/z^2,$$
$$V_{ij}=\sum_{k=1}^{r}\sum_{m=1}^{r}\hat{A}_{ki}\hat{A}_{mj}\eta''_{km}/z^2(\det\mathbf{A})^2. \quad (41)$$

Здесь $\hat{A}_{ij}$, $i,j = 1,2,..,r$ — алгебраические дополнения матрицы **A**. Таким образом, совместные ОМП $\mathbf{\Theta}_m$ (4) регулярных параметров являются асимптотически несмещенными. Из (41) находим условные смещение $b \equiv b_1$ и рассеяние $V \equiv V_{11}$ оценки Θ_{1m} одного ($r = 1$) регулярного параметра Θ_{01} [1,3]:

$$b = 0,\ \ V = \frac{1}{z^2\mathbf{\Psi}},$$
$$\mathbf{\Psi} = \frac{(A_{11}'')^2}{\eta_{11}''} =$$
$$= \left\{ \left[\frac{\partial^2 S_R(\Theta)}{\partial\Theta^2} \right]^2 \Bigg/ \frac{\partial^2 K_R(\Theta_{11},\Theta_{21})}{\partial\Theta_{11}\partial\Theta_{21}} \right\} \Bigg|_{\substack{\Theta=\Theta_{11}= \\ =\Theta_{21}=\Theta_{01}}} . \tag{42}$$

Выражения (40)—(42) для характеристик совместных ОМП $\mathbf{\Theta}_m$ (4) регулярных параметров сигнала являются асимптотически точными, их точность возрастает с увеличением ОСШ z (10).

Разрывные параметры. Воспользуемся методами ЛАА и ЛМА, как это делается в [7], для вычисления характеристик совместных оценок $\mathbf{l}_{m0}$ (8). Из (33) следует, что сечения $S_{Ui}^*(l_i) = S_U(\mathbf{l})\big|_{l_k=l_{0k},k=1,2,..p,k\neq i}$, $i = 1,2,..,p$ нормированной сигнальной функции $S_U(\mathbf{l})$ по каждому из разрывных параметров l_i в окрестности точки $\mathbf{l} = \mathbf{l}_0$ допускают асимптотическое (при $\delta_l \to 0$) представление

$$S_{Ui}^*(l_i) = 1 - d_i^{(j)}\left|l_i - l_{0i}\right| + o(\delta_l)$$
$$\text{при } l_i \in \Im_{ij},\ j = 1,2, \tag{43}$$

где постоянные $d_i^{(j)}$, $i = 1,2,..,p$ определяются из (34), а $\Im_{ij}$, $j = 1,2$ - области значений параметров l_i, удовлетворяющие условиям (27). Согласно (33), соответствующие сечения $K_{Ui}^*(l_{1i},l_{2i}) = K_U(\mathbf{l}_1,\mathbf{l}_2)\big|_{l_{jk}=l_{0k},j=1,2,k=1,2,..,p,k\neq i}$ нормированной корреляционной функции $K_U(\mathbf{l}_1,\mathbf{l}_2)$ при $\delta_l \to 0$ представляются как

$$K_{Ui}^*(l_{1i},l_{2i}) = 1 + c_{i0}^{(j)}\left|l_{2i} - l_{1i}\right| +$$
$$+ c_{i1}^{(j)}\left|l_{1i} - l_{0i}\right| + c_{i2}^{(j)}\left|l_{2i} - l_{0i}\right| + o(\delta_l)$$
$$\text{при } l_{1i}, l_{2i} \in \aleph_{ij},\ j = 1,2,..,6, \tag{44}$$

где постоянные $c_{im}^{(j)}$, $i = 1,2,..,p$, $m = 0,1,2$ определяются из (34), а $\aleph_{ij}$, $j = 1,2,..,6$ — области значений параметров удовлетворяющие условиям (29).

Обозначим $\Delta(\mathbf{l}) = [L(\mathbf{l},\mathbf{\Theta}_0) - L(\mathbf{l}^*,\mathbf{\Theta}_0)]/\sigma_N^2$ — нормированный функционал приращений логарифма ФОП по разрывным параметрам, где $\mathbf{l}^* = \left\|l_1^*, l_2^*, \ldots, l_p^*\right\|$ - фиксированное значение вектора $\mathbf{l}$ разрывных параметров сигнала из окрестности $\Re_{l\delta}$ точки $\mathbf{l} = \mathbf{l}_0$. Введем $K_\Delta(\mathbf{l}_1,\mathbf{l}_2) = \left\langle [\Delta(\mathbf{l}_1) - \langle\Delta(\mathbf{l}_1)\rangle][\Delta(\mathbf{l}_2) - \langle\Delta(\mathbf{l}_2)\rangle] \right\rangle =$
$= K_U(\mathbf{l}_1,\mathbf{l}_2) - K_U(\mathbf{l}_1,\mathbf{l}^*) - K_U(\mathbf{l}^*,\mathbf{l}_2) + K_U(\mathbf{l}^*,\mathbf{l}^*)$ — корреляционная функция нормированных приращений $\Delta(\mathbf{l})$ логарифма ФОП. Следуя [7], рассмотрим класс разрывных параметров, для которых сечения $S_{Ui}^*(l_i)$ нормированной сигнальной функции $S_U(\mathbf{l})$ при $\delta_l \to 0$ допускают представления (43), а сечения $K_{\Delta i}^*(l_{1i},l_{2i}) = K_\Delta(\mathbf{l}_1,\mathbf{l}_2)\big|_{l_{jk}=l_{0k},j=1,2,k=1,2,..,p,k\neq i}$ корреляционной функции $K_\Delta(\mathbf{l}_1,\mathbf{l}_2)$ при $\delta_l \to 0$ представляются в виде [7]

$$K_{\Delta i}^*(l_{1i},l_{2i}) = \begin{cases} \begin{cases} B_{1i}\min\left(\left|l_{1i} - l_i^*\right|,\left|l_{2i} - l_i^*\right|\right) + C_{1i} + o(\delta_l), \\ \text{если } l_{1i}, l_{2i} < l_{0i}; \end{cases} \\ \begin{cases} B_{2i}\min\left(\left|l_{1i} - l_i^*\right|,\left|l_{2i} - l_i^*\right|\right) + C_{2i} + o(\delta_l), \\ \text{если } l_{1i}, l_{2i} \geq l_{0i}; \end{cases} \\ \quad \text{при } (l_{1i} - l_i^*)(l_{2i} - l_i^*) \geq 0; \\ 0, \text{ при } (l_{1i} - l_i^*)(l_{2i} - l_i^*) < 0. \end{cases} \tag{45}$$

Здесь $B_{ki} > 0$, $C_{ki} \geq 0$, $k = 1,2$, $i = 1,2,..,p$, причем константы C_{ki} могут зависеть от выбранных значений l_i^*.

Представление (45) несколько ограничивает класс разрывных параметров сигнала по сравнению с разложением (44), следующим из формулы (33). Однако, для широкого класса разрывных параметров, удовлетворяющих разложению (44), справедливо и представление (45). В [7] приведены примеры сечений корреляционных функций, которые допускают разложения (44) и (45).

Воспользовавшись результатами [7], получаем, что совместные ОМП l_{im}, $i = 1,2,..,p$ разрывных параметров сигнала асимптотически статистически независимы. Условная (при фиксированном $\mathbf{l}_0$) совместная плотность вероятности $W_U(\mathbf{l})$ оценок $\mathbf{l}_m$ (3), (4) определяется по формуле

$$W_U(\mathbf{l}_m) \equiv W_U(l_{1m}, l_{2m}, \ldots, l_{pm}) = \prod_{i=1}^{p} W_{Ui}(l_{im}), \tag{46}$$

где $W_{Ui}(l_{im})$, $i = 1,2,..,p$ — условные плотности вероятностей ОМП l_{im} (3), (4):

$$W_{Ui}(l_i) = \begin{cases} 2z_{1i}^2 W_0[2z_{1i}^2(l_{0i} - l_i), 1/R_i] \text{ при } l_i < l_{0i}; \\ 2z_{2i}^2 W_0[2z_{2i}^2(l_i - l_{0i}), R_i] \text{ при } l_i \geq l_{0i}; \end{cases} \tag{47}$$

$$W_0(x,u) = \Phi\left(\sqrt{\frac{|x|}{2}}\right) - 1 +$$
$$+\frac{2+u}{u}\exp\left(|x|\frac{1+u}{u^2}\right)\left\{1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{|x|}{2}}\left[\frac{2+u}{u}\right]\right)\right\}.$$

Здесь $\Phi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \exp\left(-t^2/2\right)dt\Big/\sqrt{2\pi}$ — интеграл вероятности, $R_i = B_{1i}d_i^{(2)}\Big/d_i^{(1)}B_{2i} = \chi_i z_{2i}/z_{1i}$, $\chi_i = \sqrt{B_{1i}/B_{2i}}$, а параметры $z_{1i} = A_S d_i^{(1)}\Big/\sqrt{B_{1i}}$ и $z_{2i} = A_S d_i^{(2)}\Big/\sqrt{B_{2i}}$ при больших ОСШ z являются величинами порядка z (10).

Используя (47), находим условные (при фиксированном $\mathbf{l}_0$) смещения $b_i = \langle l_{im} - l_{0i}\rangle$ и рассеяния $V_i = \langle (l_{im} - l_{0i})^2\rangle$ оценок l_{im}, $i = 1,2,..,p$:

$$b_i = \frac{2R_i + 1}{2z_{2i}^2(R_i+1)^2} - \frac{R_i(R_i+2)}{2z_{1i}^2(R_i+1)^2},$$
$$V_i = \frac{5R_i^2 + 6R_i + 2}{2z_{2i}^4(R_i+1)^3} + \frac{R_i(2R_i^2 + 6R_i + 5)}{2z_{1i}^4(R_i+1)^3}. \qquad (48)$$

Моменты ошибок оценок l_{im} более высокого порядка получены в [7]. Точность формул (46)-(48) возрастает с увеличением ОСШ z (с увеличением z_{1i} и z_{2i}).

4. ХАРАКТЕРИСТИКИ СОВМЕСТНЫХ ОЦЕНОК ЧАСТОТНЫХ И ВРЕМЕННЫХ ПАРАМЕТРОВ ИМПУЛЬСА С ГАУССОВСКОЙ СЛУЧАЙНОЙ СУБСТРУКТУРОЙ

Рассмотрим в качестве примера совместные ОМП времени прихода λ_0 и частоты ν_0 узкополосного импульса со случайной субструктурой [10, 18]

$$s(t) = \xi(t)I\left[(t-\lambda_0)/\tau\right], \qquad (49)$$

наблюдаемого на фоне аддитивного гауссовского белого шума $n(t)$ с односторонней спектральной плотностью N_0. Здесь $I(x)=1$ при $|x|<1/2$, $I(x)=0$ при $|x|\ge 1/2$ — прямоугольная модулирующая функция, τ — длительность импульса, $\xi(t)$ — узкополосный стационарный центрированный гауссовский случайный процесс, описывающий случайную субструктуру сигнала. Спектральную плотность случайной субструктуры сигнала можно представить в виде [10]

$$G(\omega) = (\gamma/2)G_0\{[(\nu_0 - \omega)/\Omega] + G_0[(\nu_0+\omega)/\Omega]\}.$$

Здесь обозначено: γ — интенсивность, ν_0 и Ω — центральная частота и ширина полосы частот спектральной плотности, а непрерывно дифференцируемая функция $G_0(x)\ge 0$ описывает форму спектральной плотности $G(\omega)$ и нормирована так, что $\max G_0(x) = 1$, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} G_0^2(x)dx = 1$. Время корреляции узкополосного случайного процесса $\xi(t)$ значительно меньше длительности τ импульса (49), т.е.

$$\mu = \tau\Omega/2\pi \gg 1, \quad \nu_0 \gg \Omega. \qquad (50)$$

Задача обработки сигналов (49) со случайной субструктурой встречается в различных приложениях радиофизики и радиотехники. Примерами импульсов (49) могут быть отраженные локационные сигналы [12], радиоимпульсы, искаженные модулирующей помехой [13], сигналы в спектроскопии и астрономии [14, 15] и др. Случайные сигналы (49) могут быть использованы в качестве шумовой импульсной несущей в системах передачи информации [16].

Для получения совместных ОМП λ_m и ν_m времени прихода λ_0 и частоты ν_0 случайного импульса (49) необходимо по наблюдаемой реализации $x(t) = s(t) + n(t)$ смеси сигнала и шума формировать логарифм ФОП $L(\lambda,\nu)$ как функцию оцениваемых параметров. При выполнении (50) находим [10, 18]

$$L(\lambda,\nu) = M(\lambda,\nu) - \frac{\tau\Omega}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\ln\left[1 + qG_0(x)\right]dx,$$
$$M(\lambda,\nu) = \frac{1}{N_0}\int\limits_{\lambda-\tau/2}^{\lambda+\tau/2} y^2(t,\nu)dt, \qquad (51)$$

где $q = \gamma/N_0$, $y(t,\nu) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x(t')h(t-t',\nu)dt'$ — отклик фильтра с импульсной переходной функцией $h(t,\nu)$ на принимаемую реализацию $x(t)$, причем передаточная функция $H(\omega,\nu)$ этого фильтра удовлетворяет условию

$$\left|H(\omega,\nu)\right|^2 = H_0\left[(\nu-\omega)/\Omega\right] + H_0\left[(\nu+\omega)/\Omega\right],$$
$$H_0(x) = qG_0(x)/[1 + qG_0(x)].$$

Пусть время прихода и частота случайного импульса принимают значения из априорных интервалов $\lambda_0 \in [\lambda_{\min};\lambda_{\max}]$ и $\nu_0 \in [\nu_{\min};\nu_{\max}]$. Тогда совместные ОМП λ_m и ν_m времени прихода и частоты импульса (49) определяются как

$$(\nu_m,\lambda_m) = \arg\sup_{\lambda,\nu} M(\lambda,\nu),$$
$$\lambda \in [\lambda_{\min};\lambda_{\max}], \; \nu \in [\nu_{\min};\nu_{\max}], \qquad (52)$$

т.е. являются координатами λ и ν положения абсолютного максимума функционала $M(\lambda,\nu)$ на интервалах $\lambda \in [\lambda_{\min};\lambda_{\max}]$, $\nu \in [\nu_{\min};\nu_{\max}]$ соответственно.

Воспользовавшись методом ЛАА, найдем характеристики совместных ОМП λ_m, ν_m (52). Решающая статистика $M(\lambda,\nu)$ (51) является асимптотически (при $\mu \to \infty$) гауссовским случайным полем [10]. Будем считать [10], что величина μ настолько велика, что выполняется условие гауссовости функционала (51).

Обозначим $\eta = \lambda/\tau$, $\eta_j = \lambda_j/\tau$, $\kappa = \nu/\Omega$, $\kappa_j = \nu_j/\Omega$, $j = 0,1,2$ — нормированные время прихода и частота случайного сигнала. Функционал (51) представим в виде суммы $M(\lambda,\nu) = S(\eta,\kappa) + N(\eta,\kappa) + B$, где $S(\eta,\kappa) = \langle M(\eta\tau,\kappa\Omega)\rangle - B$ — сигнальная функция, $N(\eta,\kappa) = M(\eta\tau,\kappa\Omega) - \langle M(\eta\tau,\kappa\Omega)\rangle$ — шумовая функция, а $B = \mu q \int_{-\infty}^{\infty} \{G_0(x)/[1+qG_0(x)]\}dx$ — несущественное постоянное слагаемое.

При выполнении (50) аналогично [10] находим сигнальную функцию

$$\begin{gathered} S(\eta,\kappa) = S_0 C_1(\eta-\eta_0) C_{20}(\kappa-\kappa_0), \;\; S_0 = \mu q^2, \\ C_1(\eta) = \begin{cases} 1-|\eta|, \text{ при } |\eta| \le 1; \\ 0, \text{ при } |\eta| > 1; \end{cases} \\ C_{20}(\kappa) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_0(x) \;\; G_0(x+\kappa)}{1+qG_0(x)} dx \end{gathered} \tag{53}$$

и корреляционную функцию шумовой функции

$$\begin{gathered} K(\eta_1,\eta_2,\kappa_1,\kappa_2) = \langle N(\eta_1,\kappa_1) N(\eta_2,\kappa_2)\rangle = \\ = D_1 R_1(\eta_1,\eta_2,\eta_0) R_2(\kappa_1,\kappa_2,\kappa_0) + \\ + D_0 C_1(\eta_1-\eta_2) C_2(\kappa_1-\kappa_2), \\ D_0 = \mu q^2, \;\; D_1 = \mu q^3, \\ C_2(\kappa) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_0(x)G_0(x-\kappa)dx}{[1+qG_0(x)][1+qG_0(x-\kappa)]}, \\ R_1(\eta_1,\eta_2,\eta_0) = \\ = \begin{cases} \begin{cases} 1-|\eta_1-\eta_2| - \min(|\eta_2-\eta_0|,|\eta_1-\eta_0|), \\ \text{при } (\eta_2-\eta_0)(\eta_1-\eta_0) \ge 0; \\ 1-|\eta_1-\eta_2|, \text{ при } (\eta_2-\eta_0)(\eta_1-\eta_0) < 0; \end{cases} \\ \text{если } \max(|\eta_1-\eta_2|,|\eta_2-\eta_0|,|\eta_1-\eta_0|) < 1; \\ 0, \text{ если } \max(|\eta_1-\eta_2|,|\eta_2-\eta_0|,|\eta_1-\eta_0|) \ge 1; \end{cases} \end{gathered} \tag{54}$$

$$\begin{gathered} R_2(\kappa_1,\kappa_2,\kappa_0) = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_0(x-\kappa_1)G_0(x-\kappa_2)G_0(x-\kappa_0)}{[1+qG_0(x-\kappa_1)][1+qG_0(x-\kappa_2)]} \times \\ \times [2+qG_0(x-\kappa_0)]dx. \end{gathered}$$

Анализ выражений (53), (54) позволяет сделать следующие выводы.

1) Производные моментов (53), (54) решающей статистики (51) по времени η имеют разрывы первого рода в точке $\eta = \eta_0$. В силу дифференцируемости функции $G_0(x)$, моменты (53), (54) непрерывно дифференцируемы по частоте κ. Тогда время прихода λ_0 импульса (49) является разрывным параметром, а частота ν_0 — регулярным параметром. Следовательно, здесь рассматривается совместная оценка одного разрывного и одного регулярного параметров ($r = p = 1$).

2) Сигнальная функция $S(\eta,\kappa)$ (53) достигает абсолютного максимума при $\eta = \eta_0$, $\kappa = \kappa_0$, т.е. в точке истинных значений времени прихода и частоты. При этом $A_S = S_0^2 C_{20}^2(0)$, $\sigma_N^2 = D_1 R_2(0,0,0) + D_0 C_2(0)$, а ОСШ (10) определяется как

$$z = \frac{A_S}{\sigma_N} = \sqrt{\mu} q \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_0^2(x)dx}{1+qG_0(x)} \right]. \tag{55}$$

3) Моменты (53), (54) решающей статистики (51) допускают аддитивно-мультипликативные представления (11) при $v = 1$, $u = 2$, где следует положить $\mathbf{l} = \eta$, $\Theta = \kappa$, $\mathbf{l}_j = \eta_j$, $\Theta_j = \kappa_j$, $j = 0,1,2$, причем

$$\begin{gathered} A_{S1} = A_S = S_0 C_{20}(0), \quad \sigma_{N1}^2 = D_1 R_2(0,0,0), \\ \sigma_{N2}^2 = D_0 C_2(0), \quad S_{U1}(\eta) = C_1(\eta-\eta_0), \\ S_{R1}(\kappa) = C_{20}(\kappa-\kappa_0)/C_{20}(0), \\ K_{U1}(\eta_1,\eta_2) = R_1(\eta_1,\eta_2,\eta_0), \\ K_{U2}(\eta_1,\eta_2) = C_1(\eta_1-\eta_2), \\ K_{R1}(\kappa_1,\kappa_2) = R_1(\kappa_1,\kappa_2,\kappa_0)/R_1(0,0,0), \\ K_{R2}(\kappa_1,\kappa_2) = C_2(\kappa_1-\kappa_2)/C_2(0). \end{gathered}$$

4) Составляющие $S_{R1}(\kappa)$ и $K_{R1}(\kappa_1,\kappa_2)$, $K_{R2}(\kappa_1,\kappa_2)$ моментов логарифма ФОП достигают максимума при $\kappa = \kappa_0$ и $\kappa_j = \kappa_0$, $j = 1,2$, так что выполняются условия (20). Для этих составляющих справедливы разложения (21) при $r = 1$.

5) Составляющие $S_{U1}(\eta)$, $K_{U1}(\eta_1,\eta_2)$ и $K_{U2}(\eta_1,\eta_2)$ допускают представления (32) при

$p=1$, где $d_{1i}^{(1)}=d_{1i}^{(2)}=1$, $c_{1i0}^{(j)}=c_{2i0}^{(j)}=1$ для всех $j=1,2,..,6$, $c_{1i1}^{(j)}=0$ при $j=1,4,5,6$, $c_{1i1}^{(j)}=1$ при $j=2,3$, $c_{1i2}^{(j)}=0$ при $j=2,3,5,6$, $c_{1i2}^{(j)}=1$ при $j=1,4$, $c_{2i1}^{(j)}=c_{2i2}^{(j)}=0$ для всех $j=1,2,..,6$. При этом сечения нормированных сигнальной функции $S_U(\eta)$ и корреляционной функции $K_U(\eta_1,\eta_2)$ по разрывному параметру допускают представления (43), (44), (45), где $d_i^{(1)}=d_i^{(2)}=1$, $C_{1i}=C_{2i}=0$, $B_{1i}=B_{2i}=\sigma_N^2/(2-g)$,

$$g=\frac{D_1R_2(0,0,0)}{\sigma_N^2}=q\int_{-\infty}^{\infty}\frac{G_0^3(x)[2+qG_0(x)]}{[1+qG_0(x)]^2}dx. \quad (56)$$

Таким образом, выполнены все условия применимости метода ЛАА. Тогда характеристики ОМП λ_m и ν_m можно получить из (40)—(42) и (46)—(48). Учитывая, что в данном случае $z_{1i}^2=z_{2i}^2=z^2/(2-g)$ и $R_i=1$, находим условные смещение (систематическую ошибку) и рассеяние (средний квадрат ошибки) ОМП λ_m времени прихода λ_0 импульса (49):

$$b_t=\langle\lambda_m-\lambda_0\rangle=0,$$
$$V_t=\langle(\lambda_m-\lambda_0)^2\rangle=13\tau^2\,\frac{(2-g)^2}{8z^4}, \quad (57)$$

где z и g определяются из (55), (56). Воспользовавшись выражениями (42) находим условные смещение и рассеяние ОМП ν_m частоты ν_0 сигнала (49):

$$b_f=\langle\nu_m-\nu_0\rangle=0,$$
$$V_f=\langle(\lambda_m-\lambda_0)\rangle^2=\Omega^2/z^2\Psi,$$
$$\Psi=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{[dG_0(x)/dx]^2}{[1+qG_0(x)]^2}dx\Bigg/\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{G_0^2(x)dx}{1+qG_0(x)}\right]^2. \quad (58)$$

Выражения (57),(58) для характеристик ОМП (52) совпадают с соответствующими выражениями для характеристик надежных оценок времени прихода и частоты случайного импульса, полученными в [18]. Выражения (57), (58) являются асимптотически точными, их точность возрастает с увеличением ОСШ z (55). Из результатов моделирования оценок на ЭВМ, приведенных в [18], следует, что формулы (57), (58) обладают удовлетворительной точностью уже при $z\geq 1.5-2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Куликов Е.И., Трифонов А.П.* Оценка параметров сигналов на фоне помех. М.: Сов. радио, 1978. 296 с.

2. *Тихонов В.И.* Оптимальный прием сигналов. М.: Радио и связь, 1983. 320 с.

3. *Куликов Е.И.* Методы измерения случайных процессов. М.: Радио и связь, 1986. 272 с.

4. Прикладная теория случайных процессов и полей / Васильев К.К., Драган Я.Л., Казаков В.А. и др.; Под ред. К. К. Васильева, В. А. Омельченко. Ульяновск: УлГТУ, 1995. 256 с.

5. *Ибрагимов И.А., Хасьминский Р.З.* Асимптотическая теория оценивания. М.: Наука, 1979. 528 с.

6. *Трифонов А.П., Шинаков Ю.С.* Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех. М.: Радио и связь, 1986. 264 с.

7. *Трифонов А.П., Захаров А.В.* Эффективность совместных оценок параметров сигналов при нарушении условий регулярности решающей статистики // Вестник ВГУ. Сер. Физика. Математика. 2002. № 1. С. 59—68.

8. *Трифонов А.П., Бутейко В.К.* Характеристики совместных оценок параметров сигнала при частичном нарушении условий регулярности // Радиотехника и электроника. 1991. Т. 36. № 2. С. 319—327.

9. *Трифонов А.П., Захаров А.В., Воробьев А.М.* Асимптотические характеристики совместных оценок параметров сигналов // Вестник Воронежского государственного университета. Сер. Физика. Математика. 2003. № 2. С. 77—92.

10. *Трифонов А.П., Нечаев Е.П., Парфенов В.И.* Обнаружение стохастических сигналов с неизвестными параметрами. Воронеж: Изд-во ВГУ, 1991. 246 с.

11. *Тихонов В.И.* Статистическая радиотехника. М.: Радио и связь, 1982. 624 с.

12. Вопросы статистической теории радиолокации / П. А. Бакут, И. А. Большаков, Б. М. Герасимов и др.; Под ред. Г. П. Тартаковского. М.: Сов. радио, 1963. Т. 1. 426 с.

13. *Кремер И.Я., Владимиров В.И., Карпухин В.И.* Модулирующие помехи и прием радиосигналов. М.: Сов. радио, 1972. 480 с.

14. *Ван-Трис Г.* Теория обнаружения, оценок и модуляции. В 3-х томах. Т. 3 / Пер с англ. под ред. В. Т. Горяинова. М.: Сов. радио, 1977. 644 с.

15. *Ахманов С.А., Дьяков Ю.Э., Чиркин А.С.* Введение в статистическую радиофизику и оптику. М.: Наука, 1981. 640 с.

16. *Харкевич А.А.* Передача сигналов, модулированных шумом. Избранные труды. Т. 2. М.: Наука, 1973. С. 524—529.

17. *Трифонов А.П., Захаров А.В.* Прием сигналов с неизвестной задержкой при наличии модулирующей помехи // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1986. Т. 29. № 4. С. 36—41.

18. *Трифонов А.П., Захаров А.В.* Характеристики совместной оценки времени прихода и частоты случайного радиоимпульса // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 2002. Т. 45. № 5. С. 3—13.