ВЕСТНИК ВГУ, Серия: Физика, математика, 2004, № 2

УДК 517.98

О ПОЛУГРУППАХ ЛИНЕЙНЫХ ОТНОШЕНИЙ*

© 2004 А. С. Загорский

Воронежский государственный университет

В данной работе рассматриваются полугруппы линейных отношений на банаховых пространствах с изолированной точкой спектра $\lambda = \infty$ и показывается, что исследование таких полугрупп сводится к исследованию полугрупп обычных ограниченных операторов. Основными результатами работы являются лемма 3.8 и теорема 4.2.

Мотивацией для исследования полугрупп линейных отношений стала проблема продолжения решения $x(t,x_0)$ абстрактной задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t), \ t \ge 0 \\ x(0) = x_0 \end{cases} \qquad (*)$$

на полуось $\mathbb{R}_-$. Задача построения функции $x(t,x_0)$ при $t<0$ связана с исследованием полугруппы $S(t) = (T(t))^{-1}$ обратной к полугруппе $T(t)x_0 = x(t,x_0)$ решений абстрактной задачи Коши (*). Так как операторы полугруппы T могут не являться непрерывно обратимыми, то полугруппа S, в общем случае, является полугруппой линейных отношений.

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Для более детального ознакомления с этими и другими понятиями можно использовать монографию [1] и статью [2].

Определение 1.1. *Линейное подпространство $A \subseteq X \times Y$ называется **линейным отношением** между линейными пространствами X и Y.*

Если пространства X и Y — нормированные, а подпространство $A \subseteq X \times Y$ замкнуто в $X \times Y$, то линейное отношение называется замкнутым. Множество замкнутых линейных отношений из X в Y обозначим $LR(X,Y)$. Если $X = Y$, то положим $LR(X) = LR(X,X)$. Множество линейных замкнутых операторов $LO(X,Y)$ с областью определения из X и значениями в Y, считается включенным (при отождествлении их с графиком) в $LR(X,Y)$.

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 04-01-00141.

Определение 1.2. ***Полугруппой*** *замкнутых линейных отношений на линейном пространстве X называется отображение $T:(0,\infty) \to \to LR(X)$ обладающее свойством $T(t+s) = = T(t)T(s)$ для любых $t,s>0$.*

Следует заметить, что любая полугруппа замкнутых операторов является также полугруппой замкнутых отношений, а простейшим примером полугруппы отношений не являющейся полугруппой операторов, как было отмечено в начале статьи, является полугруппа T построенная по вырожденной полугруппе линейных операторов S следующим образом $T(t) = (S(t))^{-1}$ (определение обратного к линейному отношению приведено ниже).

Определение 1.3. *Подпространство $D(A) = \{x \in X \mid \exists y \in Y, (x,y) \in A\}$ называется **областью определения** линейного отношения $A \subseteq X \times Y$.*

Определение 1.4. ***Ядро*** *отношения есть $KerA = \{x \in D(A) \mid (x,0) \in A\}$.*

Определение 1.5. Через Ax, $x \in D(A)$, обозначим множество $\{y \in Y \mid (x,y) \in A\}$.

Определение 1.6. ***Область его значений***

$$\operatorname{Im} A = \{y \in Y \mid \exists x \in D(A), (x,y) \in A\} = \bigcup_{x \in D(A)} Ax.$$

Определение 1.7. ***Суммой*** *двух линейных отношений $A,B \subseteq X \times Y$ называется линейное отношение $A+B \subseteq X \times Y$ вида $A+B = = \{(x,y) \in X \times Y \mid x \in D(A) \cap D(B), y \in Ax+Bx\}$, $D(A+B) = D(A) \cap D(B)$. Под $Ax+Bx$ понимается алгебраическая сумма двух множеств Ax и Bx.*

Определение 1.8. ***Произведением*** *линейных отношений $A \subseteq X \times Y$, $B \subseteq Y \times Z$, называется линейное подпространство из $X \times Z$ вида $BA = \{(x,z) \in X \times Z \mid \exists y \in D(B) \subseteq Y$ такой, что $(x,y) \in A$, $(y,z) \in B\}$.*

Определение 1.9. ***Обратным*** *к линейному отношению* $A \subseteq X \times Y$ *называется линейное отношение* $A^{-1} = \{(y,x) \in Y \times X \mid (x,y) \in A\} \subseteq \subseteq Y \times X$.

Определение 1.10. *Отношение* $A \in LR(X,Y)$ *называется* ***инъективным,*** *если* $KerA = \{0\}$, *и* ***сюръективным,*** *если* $\operatorname{Im} A = Y$.

Определение 1.11. *Пусть* $A \in LR(X)$. *Линейное подпространство* $X_0 \subseteq X$ *назовем* ***инвариантным подпространством для отношения*** A, *если* $Ax \cap X_0 \neq \oslash \forall x \in X_0 \cap D(A)$.

Определение 1.12. *Пусть* $A \in LR(X)$, $X_0 \subseteq X$ *— инвариантное относительно* A *подпространство.* ***Сужением отношения*** A ***на*** X_0 *назовем отношение* $A_0 = A \cap (X_0 \times X_0)$, *то есть* $D(A_0) = D(A) \cap X_0$ *и* $A_0 x = Ax \cap \cap X_0 \forall x \in D(A_0)$.

Определение 1.13. *Будем говорить, что отношение* $A \in LR(X)$ *обладает свойством* ***стабилизации степеней,*** *если существует натуральное число* m *такое, что:*

$$A^{m-1}0 \subset A^m 0 = A^{m+1}0,$$

$$D(A^{m-1}) \supset D(A^m) = D(A^{m+1}).$$

Число m называется **степень стабилизации** степеней отношения A и обозначается m_A или $m(A)$.

Определение 1.14. ***Расширенным спектром*** *отношения* $A \in LR(X)$ *называется подмножество* $\tilde{\sigma}(A)$ *из расширенной комплексной плоскости* $\tilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, *которое совпадает с* $\sigma(A)$, *если* $A0 = \{0\}$ *и* $D(A) = X$. *В противном случае* $\tilde{\sigma}(A) = \sigma(A) \cup \{\infty\}$. *Множество* $\tilde{\rho}(A) = \tilde{\mathbb{C}} \setminus \tilde{\sigma}(A)$ *называют* ***расширенным резольвентным множеством*** *линейного отношения* A.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В этом разделе приведены результаты из теории линейных отношений, используемые в данной работе. Более детально эти и другие факты рассмотрены в [2] и [3].

Теорема 2.1. *Пусть* X *— конечномерное линейное пространство,* $A \in LR(X)$. *Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) $\exists k \in N : D(A^k) \oplus A^k 0 = X$;

2) $D(A^m) \oplus A^m 0 = X \forall m \geq m_A$;

3) Собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям, линейно независимы;

4) $|\tilde{\sigma}(A)| \dim X$, *где под* $|\tilde{\sigma}(A)|$ *понимается количество точек в* $\tilde{\sigma}(A)$;

5) $\rho(A) \neq \oslash$.

Лемма 2.1. Пусть A — линейное отношение обладающее свойством стабилизации степеней и $\rho(A) \neq \oslash$, тогда

$$D(A^m) = \operatorname{Im} \int_\gamma R(\lambda, A) d\lambda,$$

$$A^m 0 = Ker \int_\gamma R(\lambda, A) d\lambda \ \forall m \geq m_A,$$

где γ *— жорданов контур такой, что* $\sigma(A)$ *лежит внутри контура, а* $\tilde{\sigma}(A) \setminus \sigma(A)$ *вне его.*

Лемма 2.2. *Пусть* X *— банахово пространство и линейное отношение* $A \in LR(X)$ *обладает свойством стабилизации степеней. Тогда* $X_0 = D(A^m)$ *и* $X_\infty = A^m 0$ *— инвариантные относительно* A *подпространства* $\forall m \geq m_A$.

Лемма 2.3. *Пусть линейное отношение* $A \in LR(X)$ *и* X *— банахово пространство для некоторого* $k \in \mathbb{N}$ *допускающее разложение в прямую сумму* $X = D(A^k) \oplus A^k 0$. *Тогда сужения* $A_0 = A \cap (D(A^k) \times D(A^k))$ *и* $A_\infty = A \cap (A^k 0 \times A^k 0)$ *линейного отношения* A *на подпространства* $D(A^k)$ *и* $A^k 0$ *обладают свойством* $A_0 \oplus A_\infty = A$.

Теорема 2.2 *Пусть* $A \in LR(X)$ *и X — конечномерное пространство для некоторого* $m \in N, m \geq m_A$ *допускающее разложение в прямую сумму* $X = X_0 \oplus X_\infty$ *(где* $X_0 = D(A^m)$, $X_\infty = A^m 0$*). Тогда* $A_0 \in EndX_0$, $A_\infty 0 = A0$, $A_\infty^{-1} \in \in EndX_\infty$ *— нильпотентный оператор с индексом нильпотентности равным* m_A *(где* $A_0 = A \cap (X_0 \times X_0)$, $A_\infty = A \cap (X_\infty \times X_\infty)$ *).*

Теорема 2.3. *Пусть X — банахово пространство,* $A \in LR(X)$, $X = X_0 \oplus X_\infty$, *где* $X_0 = D(A^m)$, $X_\infty = A^m 0$ *для некоторого* $N \ni m \geq m_A$, $A = A_0 \oplus A_\infty$, *где* $A_0 = A \cap (X_0 \times X_0)$, $A_\infty = A \cap \cap (X_\infty \times X_\infty)$. *Тогда* $\sigma(A_0) = \sigma(A)$, $\tilde{\sigma}(A_\infty) = \infty$.

3. БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ

Пусть X — банахово пространство на котором определена полугруппа линейных отношений $\{T(t), t > 0\}$.

Лемма 3.1. *Для любых линейных отношений* A *и* B *верно* $A + B = A|_{D(A) \cap D(B)} + C$, *где* C *— любое линейное отношение, обладающее свойствами:*

1. $Cx = Bx \forall x \in D(A) \cap D(B)$;

2. $D(C) \supseteq D(A) \cap D(B)$.

◄ Равенство следует из определения суммы линейных отношений ►

Лемма 3.2. *Для любых линейных отношений A и B верно равенство* $I_{D(B)}A + A0 = A|_{D(BA)}$.

◀ Имеют место следующие равенства $D(I_{D(B)}A + A0) = D(I_{D(B)}A) = A^{-1}D(I_{D(B)}) = A^{-1}D(B) = D(BA) = D(A|_{D(BA)})$.

Так как по определению произведения линейных отношений $Ax \cap D(B) \neq \varnothing \forall x \in D(BA)$, то для любого $x \in D(BA)$ верно $Ax = Ax \cap D(B) + A0 = I_{D(B)}Ax + A0$.

Таким образом так, как отношения $I_{D(B)}A + A0$ и $A|_{D(BA)}$ имеют одинаковые области определения и принимают одинаковые значения на каждом векторе из области определения, то они равны ▶

Лемма 3.3. $(T(t) - \lambda I)(T(s) - \mu I) = (T(s) - \mu I)(T(t) - \lambda I) \quad \forall t, s > 0,\ \lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

Имеют место следующие равенства $(T(t) - \lambda I)(T(s) - \mu I) = T(t)T(s) - \lambda I_{D(T(t))}T(s) - T(t)\mu I_{D(T(s))} + \lambda I_{D(T(t))}\mu I_{D(T(s))} = T(t)T(s) + T(s)0 - \lambda I_{D(T(t))}T(s) - \mu T(t)I_{D(T(s))} + \lambda\mu I_{D(T(t))\cap D(T(s))} =$ (по лемме 3.2) $= T(t)T(s) - \lambda T(s)|_{D(T(t)T(s))} - \mu T(t)I_{D(T(s))} + \lambda\mu I_{D(T(t))\cap D(T(s))} =$ (по лемме 3.1) $= T(t)T(s) - \lambda T(s)|_{D(T(t))} - \mu T(t)I_{D(T(s)D(T(t))} + \lambda\mu I_{D(T(t))\cap D(T(s))} =$ (по лемме 3.2) $= T(t)T(s) - \lambda T(s)|_{D(T(t))} - \mu I_{D(T(s))}T(t) + T(t)0 + \lambda\mu I_{D(T(t))\cap D(T(s))} = T(t)T(s) - \lambda T(s)I_{D(T(t))} - \mu I_{D(T(s))}T(t) + \lambda\mu I_{D(T(t))\cap D(T(s))} = T(t)T(s) - \mu I_{D(T(s))}T(t) - T(s)\lambda I_{D(T(t))} + \lambda I_{D(T(t))}\mu I_{D(T(s))} = (T(s) - \mu I)(T(t) - \lambda I)$ ▶

Следствие 3.1. $R(\lambda, T(t))R(\mu, T(s)) = R(\mu, T(s))R(\lambda, T(t)) \quad \forall t, s > 0, \quad \lambda \in \rho(T(t)),\ \mu \in \rho(T(s))$.

Лемма 3.4. *Если* $\infty \in \tilde{\rho}(T(s))$ *для некоторого* $s > 0$, *то* $\infty \in \tilde{\rho}(T(t))$ *для любого* $t > 0$.

◀ Возьмем произвольное $t > 0$ и $n \in \mathbb{N}$ такое, что $n \geq t/s$. Тогда $T(t)0 \subseteq T(ns)0 = (T(s))^n 0 = \{0\}$ и $D(T(t)) \supseteq D(T(ns)) = D((T(s))^n) = X$ так как $\infty \in \tilde{\rho}((T(s))^n)$. Таким образом $T(t)0 = 0$ и $D(T(t)) = X$. Поэтому $\infty \in \tilde{\rho}(T(t))$ ▶

Следствие 3.2. *Если* $\infty \in \tilde{\sigma}(T(s))$ *для некоторого* $s > 0$, *то* $\infty \in \tilde{\sigma}(T(t))$ *для любого* $t > 0$.

Следствие 3.3. *Если* $0 \in \rho(T(s))$ *для некоторого* $s > 0$, *то* $0 \in \rho(T(t))$ *для любого* $t > 0$.

Следствие 3.4. *Если* $0 \in \sigma(T(s))$ *для некоторого* $s > 0$, *то* $0 \in \sigma(T(t))$ *для любого* $t > 0$.

Предположение 3.1. *Пусть далее множество* $\sigma(T(t)) \subset C$ *компактно для любого* $t > 0$. *Тогда точка расширенного спектра* $\lambda = \infty$ *является изолированной и для любого отношения* $T(t)$ *можно построить жорданов контур* $\gamma(t)$ *такой, что* $\sigma(T(t))$ *лежит внутри контура, а* $\tilde{\sigma}(A) \setminus \sigma(A)$ *вне его.*

Введем следующие обозначения:

1. $P(t) = \int\limits_{\gamma(t)} R(\lambda, T(t))d\lambda$;
2. $X_0(t) = \operatorname{Im} P(t)$;
3. $X_\infty(t) = Ker P(t)$;
4. $T(t)_{0(s)} = T(t) \cap (X_0(s) \times X_0(s))$;
5. $T(t)_{\infty(s)} = T(t) \cap (X_\infty(s) \times X_\infty(s))$.

Лемма 3.5. $R(\lambda, T(t))P(s) = P(s)R(\lambda, T(t)) \quad \forall t, s > 0,\ \lambda \in \rho(T(t))$.

◀ Перестановочность следует из следствия 3.1 ▶

Следствие 3.5. *Подпространства* $X_0(s)$ *и* $X_\infty(s)$ *инвариантны относительно* $T(t)$, *причем* $T(t) = T(t)_{0(s)} \oplus T(t)_{\infty(s)}$ и $\tilde{\sigma}(T(t)) = \tilde{\sigma}(T(t)_{0(s)}) \cup \tilde{\sigma}(T(t)_{\infty(s)})$.

Следствие 3.6. *Отображение* $T_{i(s)} : (0,\infty) \to LR(X_i(s))$ *является полугруппой, определяемой равенством* $T_{i(s)}(t) = T(t)_{i(s)},\ i \in \{0, \infty\}$.

Замечание 3.1. *В дальнейшем, чтобы подчеркнуть, что отношение* $T(t) \cap (X_i(s) \times X_i(s))$ *является элементом полугруппы, будем обозначать его, как в следствии 3.6, через* $T_{i(s)}(t), i \in \{0, \infty\}$.

Лемма 3.6. *Для любых* $t, s > 0$ *верно включение* $\infty \in \tilde{\rho}(T_{0(s)}(t))$.

◀ Включение следует из леммы 3.4, так как $\infty \in \tilde{\rho}(T_{0(s)}(s)) \forall s > 0$ ▶

Лемма 3.7. *Для любых* $t, s > 0$ *справедливо равенство* $\tilde{\sigma}(T_{\infty(s)}(t)) = \{\infty\}$.

◀ Включение $\tilde{\sigma}(T_{\infty(s)}(t)) \supseteq \{\infty\}$ вытекает из следствия 3.2 так как $\tilde{\sigma}(T_{\infty(s)}(s)) = \{\infty\}$.

Докажем включение $\tilde{\sigma}(T_{\infty(s)}(t)) \subseteq \{\infty\}$.

Предположим противное. Тогда существуют $p, q > 0$ такие, что $\tilde{\sigma}(T_{\infty(q)}(p)) = \{\infty\} \cup M$. Так как в $\tilde{\sigma}(T(p))$ точка $\lambda = \infty$ изолированная, то и в $\tilde{\sigma}(T_{\infty(q)}(p))\lambda = \infty$ также изолированная точка, поэтому можно построить контур γ такой, что M лежит внутри контура, а $\{\infty\}$ вне его. Рассмотрим проектор $P = \int\limits_{\gamma} R(\lambda, T_{\infty(q)}(p))d\lambda$. Так как по следствию 3.1 для любых $t_1, t_2 > 0$ операторы $R(\lambda, T_{\infty(q)}(t_1))$ и $R(\lambda, T_{\infty(q)}(t_2))$ перестановочны, то по следствию 6 отображение $S : (0, \infty) \to LR(X_\infty(q))$ определяемое равенством $S(t) = T_{\infty(q)}(t) \cap (\operatorname{Im} P \times \operatorname{Im} P)$ будет являться полугруппой на подпространстве $\operatorname{Im} P$ и поэтому в силу того, что $\infty \notin \sigma(S(p)) = \tilde{\sigma}(S(p))$ по лемме 1 $\infty \notin \tilde{\sigma}(S(t)) \forall t > 0$. С другой стороны, $\tilde{\sigma}(S(t)) = \tilde{\sigma}(T_{\infty(q)}(t) \cap (\operatorname{Im} P \times \operatorname{Im} P)) \subseteq \tilde{\sigma}(T_{\infty(q)}(t)) = \{\infty\}\ \forall t > 0$. Из $\infty \notin \tilde{\sigma}(S(t))\ \forall t > 0$ и $\tilde{\sigma}(S(t)) \subseteq$

$\subseteq \{\infty\}$ $\forall t > 0$ получаем, что $\tilde{\sigma}(S(t)) = \varnothing$ $\forall t > 0$, но это противоречит теореме о непустоте спектра линейного отношения ►

Следствие 3.7. $\tilde{\sigma}(T_{0(s)}(t)) = \sigma(T(t))$ $\forall t, s > 0$.

◄ Так как $\tilde{\sigma}(T(t)) = \tilde{\sigma}(T_{0(s)}(t)) \cup \tilde{\sigma}(T_{\infty(s)}(t)) = \tilde{\sigma}(T_{0(s)}(t)) \cup \{\infty\}$, то $\sigma(T(t)) = \tilde{\sigma}(T(t)) \setminus \{\infty\} = \tilde{\sigma}(T_{0(s)}(t)) \setminus \{\infty\} = \sigma(T_{0(s)}(t)) = \tilde{\sigma}(T_{0(s)}(t))$ по лемме 3.6 ►

Лемма 3.8. *Для любых* $t, s > 0$ *и* $i \in \{0, \infty\}$ *верно равенство* $X_i(t) = X_i(s)$.

$$P(t) = \int_{\gamma(t)} R(\lambda, T(t))d\lambda =$$
$$\int_{\gamma(t)} R(\lambda, T_{0(s)}(t) \oplus T_{\infty(s)}(t))d\lambda =$$
$$\int_{\gamma(t)} R(\lambda, T_{0(s)}(t))d\lambda \oplus \int_{\gamma(t)} R(\lambda, T_{\infty(s)}(t))d\lambda.$$

Так как $\sigma(T(t))$ находится внутри контура $\gamma(t)$, то $\sigma(T_{0(s)}(t)) = \tilde{\sigma}(T_{0(s)}(t)) = \sigma(T(t))$ также находится внутри $\gamma(t)$. Поэтому $\int_{\gamma(t)} R(\lambda, T_{0(s)}(t))d\lambda = I_{D(T_{0(s)}(t))} = I_{X_0(s)}$.

Так как $\{\infty\}$ находится вне контура $\gamma(t)$, то $\tilde{\sigma}(T_{\infty(s)}(t)) = \{\infty\}$ также находится вне $\gamma(t)$. Поэтому $\int_{\gamma(t)} R(\lambda, T_{\infty(s)}(t))d\lambda = 0_{D(T_{\infty(s)}(t))} = 0_{X_\infty(s)}$.

Таким образом, $P(t) = \int_{\gamma(t)} R(\lambda, T_{0(s)}(t))d\lambda \oplus$ $\oplus \int_{\gamma(t)} R(\lambda, T_{\infty(s)}(t))d\lambda = I_{X_0(s)} \oplus 0_{X_\infty(s)}$, откуда получаем $X_0(t) = \operatorname{Im} P(t) = X_0(s)$ и $X_\infty(t) = KerP(t) = = X_\infty(s)$ ►

4. КОНЕЧНОМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ

Пусть теперь пространство X конечномерно. Тогда в силу компактности спектра $\sigma(T(t))$ и леммы 2.1 получаем $X_0(t) = D(T(t)^{m(t)})$ и $X_\infty(t) = T(t)^{m(t)}0$, где $m(t)$ — степень стабилизации отношения $T(t)$. Поэтому $D(T(t)^{m(t)}) = D(T(s)^{m(s)}) = X_0$ и $T(t)^{m(t)}0 = T(s)^{m(s)}0 = X_\infty$.

Теорема 4.1. *Для любых* $t, s > 0$ *верно равенство* $T(s)X_\infty(t) = X_\infty(t)$.

◄ $T(s)X_\infty(t) = T(s)T(t)^{m(t)}0 = T(t)^{m(t)}T(s)0 \supseteq T(t)^{m(t)}0 = X_\infty(t)$. Таким образом $T(s)X_\infty(t) \supseteq X_\infty(t)$ $\forall t, s > 0$.

Так как $T(s)X_\infty(t) \supseteq X_\infty(t)$ $\forall t, s > 0$, то для любого $r > 0$ и достаточно большого n такого, что $n > r/t$ верно $T(nt - r)X_\infty(t) \supseteq X_\infty(t)$. Поэтому $T(nt)X_\infty(t) \supseteq T(r)X_\infty(t)$, откуда получаем $X_\infty(t) = T(t)^{m(t)}0 = T(nt)T(t)^{m(t)}0 = T(nt)X_\infty(t) \supseteq T(r)X_\infty(t)$. Т.е. $X_\infty(t) \supseteq T(r)X_\infty(t)$ $\forall t, r > 0$.

Таким образом $T(s)X_\infty(t) = X_\infty(t)$ $\forall t, s > 0$.►

Следствие 4.1. *Операторы* $(T_\infty(t))^{-1} \in End(X_\infty)$ *нильпотентны.*

◄Доказательство следует из теоремы 2.2 ►

Лемма 4.1. *Для любого* $t > 0$ *операторы* $(T_\infty(t))^{-1} \in End(X_\infty)$ *нулевые.*

◄ Если $n > \dim X_\infty$, то по следствию 1 для любого $t > 0$ $(T_\infty(t/n))^{-1}$ — нильпотентный оператор из $End(X_\infty)$, причем так как $n > \dim X_\infty$, то $(T_\infty(t/n))^{-n} = 0 \in End(X_\infty)$. Поэтому $0 = (T_\infty(t/n))^{-n} = (T_\infty(nt/n))^{-1} = (T_\infty(t))^{-1}$ ►

Следующая теорема является основным результатом данной работы и описывает структуру полугруппы линейных отношений при выполнении условия изолированности точки спектра $\lambda = \infty$ сформулированного в предположении 3.1.

Теорема 4.2. *Для любого* $t > 0$ *верны равенства*:

1. $D(T_\infty(t)) = \{0\}$;
2. $T_\infty(t)0 = X_\infty$;
3. $D(T(t)) = X_0$;
4. $T(t)0 = X_\infty$;
5. $D(T(t)) \oplus T(t)0 = X$;
6. $\operatorname{Im} T(t) \oplus KerT(t) = X$.

◄ Равенства 1. и 2. следуют из леммы 4.1

Равенство 3. получаем в силу $D(T(t)) = D(T_0(t)) \oplus D(T_\infty(t)) = X_0 \oplus \{0\} = X_0$.

Равенство 4. получаем в силу $T(t)0 = T_0(t)0 \oplus T_\infty(t)0 = \{0\} \oplus X_\infty = X_\infty$.

Равенство 5. получаем в силу $X = X_0 \oplus X_\infty = D(T(t)) \oplus T(t)0$.

Равенство 6. следует из равенства 5. ►

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Cross R.* Multivalued linear operators. New York: M. Dekker, 1998.

2. *Баскаков А.Г., Чернышов К.И.* Спектральный анализ линейных отношений и вырожденные полугруппы операторов // Матем. сборник, 2002, т. 193, № 11, С. 3—42.

3. *Загорский А.С., Хатько В.В.* О некоторых свойствах линейных отношений на конечномерных линейных пространствах // Вестник ВГУ, серия физ.-мат., 2002, вып. 2, С. 59—62.