УДК 519.27.

ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ЗНАЧЕНИЙ АДДИТИВНОГО КВАДРАТИЧНОГО ФУНКЦИОНАЛА ОТ ТРАЕКТОРИЙ ВИНЕРОВСКОГО ПРОЦЕССА

© 2004 Ю. П. Вирченко, Н. Н. Витохина

Белгородский государственный университет

Развивается подход к вычислению распределений вероятностей статистики отсчетов значений квадратичных функционалов от гауссовских случайных процессов. Вычислена характеристическая функция суммы квадратов значений винеровского процесса W, которая в непрерывном пределе переходит в результат М. Каца для характеристической функции значений интегрального квадратичного функционала $J[W]$ от траекторий винеровского процесса. Построено равномерно сходящееся на $[0,\infty)$ разложение для плотности распределения случайной величины $J[W]$.

1. ВВЕДЕНИЕ

С аналитической точки зрения, гауссовские случайные процессы являются, по-видимому, простейшими случайными процессами. Это связано с тем, что гауссовская форма частных многоточечных распределений гауссовских процессов позволяет вычислить явно характеристический функционал каждого гауссовского процесса и применять для их исследования хорошо разработанные методы анализа в гильбертовом пространстве. В настоящее время класс гауссовских случайных процессов, по крайней мере стационарных, является хорошо изученным [1]. В частности, принципиально, решена задача вычисления характеристических функций распределений вероятностей для значений квадратичных функционалов от траекторий гауссовских процессов [2] $\{X(t); t\in\mathfrak{D}\}$, т.е. для распределений вероятностей случайных величин $J_{\mathfrak{D}}[X]$, где

$$J_{\mathfrak{D}}[u]=\int_{\mathfrak{D}} u^2(t)dt$$

— квадратичный функционал в $\mathbb{L}_2(\mathfrak{D})$, аддитивный по отношению к измеримому множеству $\mathfrak{D}$ в $\mathbb{R}$. Вычисление характеристической функции $Q(-i\lambda)\equiv \mathsf{E}\exp(i\lambda J_{\mathcal{D}}[X])$ для таких величин сводится к исследованию спектральной задачи для интегрального оператора K, ядром $K(t,s)$ которого служит корреляционная функция $K(t,s)=\mathsf{E}X(t)X(s)-\mathsf{E}X(t)\mathsf{E}X(s)$. Если процесс $\{X(t)\}$ является стационарным, то это ядро — разностное, $K(t,s)=K(t-s)$. Спектральная задача для оператора K в этом случае, при условии, что множество $\mathfrak{D}$ является отрезком из $\mathbb{R}$, резко упрощается, и функция $Q(\lambda)$, при определенных условиях, может быть вычислена явно (см. монографию [3], где приведены многие из точно решаемых задач такого типа). В общем же случае можно установить аналитическую структуру характеристической функции, которая позволяет выявить важные качественные свойства плотности g распределения вероятностей, соответствующей характеристической функции $Q(-i\lambda)$.

Вместе с тем, задача о восстановлении плотности g для случайной величины $J_{\mathfrak{D}}[X]$ по соответствующей ей функции Q оказалась за пределами внимания специалистов. Это произошло, может быть, вследствие того, что она уже не является теоретико-вероятностной, а представляет из себя довольно частную задачу математического анализа, конкретно, теории функции комплексного переменного. В самом деле, вычисление g основано на формуле обратного преобразования Лапласа

$$g(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} Q(\lambda)e^{\lambda x}d\lambda,\ \ c>0. \tag{1.1}$$

Применение этой формулы, в общем случае, основано на аналитичности функции $Q(\lambda)$ при $\lambda>0$, которая, в свою очередь, следует из положительности случайной величины $J_{\mathfrak{D}}[X]$.

Вычисление плотности распределения g сводится, таким образом, к разработке метода приближенного вычисления интеграла (1.1), с учетом тех особенностей, которые привносит конкретная структура функции $Q(\lambda)$. С этой точки зрения, при вычислении плотности g, казалось бы, трудно ожидать получения математических результатов, относящихся к общей постановке задачи, т.е. касающихся какого-либо широкого класса гауссовских процессов.

Однако, более внимательный теоретико-вероятностный анализ указывает на то, что в изучении этой задачи имеются нераскрытые возможности. В самом деле, ограничимся классом стационарных эргодических гауссовских процессов. Рассмотрим, более того, подкласс процессов указанного типа, у которых функция $K(t)$ является быстроубывающей. Тогда, при большой длине отрезка $\mathfrak{D}$, можно ожидать, в некотором смысле, универсального поведения плотностей g. Это следует из того, что при расширении отрезка $\mathfrak{D}$, ввиду аддитивной зависимости $J_{\mathcal{D}}$ от $\mathfrak{D}$,

$$J_{\mathfrak{D}}[X] = \sum_i J_{\mathfrak{D}_i}[X];$$
$$\mathfrak{D} = \bigcup_i \mathfrak{D}_i,$$
$$\mathfrak{D}_j \cap \mathfrak{D}_k = \varnothing,\ j \neq k,$$

величина $J_{\mathfrak{D}}[X]$, с возрастающей точностью, должна приближаться суммами большого числа случайных слагаемых, которые являются слабосвязанными, если размеры $\mathfrak{D}_i$ намного превосходят характерный размер области локализации функции K.

Описанная ситуация, наверняка, должна иметь место для так называемых стационарных элементарных гауссовских процессов [4]. Элементарными гауссовскими процессами $\{X(t)\}$ мы будем называть такие, у которых траектории $X(t)$ представимы в виде скалярного произведения $X(t) = (\mathbf{v}, \mathbf{Y}(t))$, где $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ — постоянный вектор, размерность которого равна размерности системы, и $\mathbf{Y}(t)$ — вектор-решение системы стохастических дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами со стохастическим дифференциалом по винеровскому процессу. Таким образом, возникает задача построения специальной аппроксимационной процедуры, позволяющей вычислять плотности g с любой гарантированной точностью в пределе больших размеров отрезка $\mathfrak{D}$.

Так как поставленная задача все же является чисто аналитической, то естественно начать ее исследование с простейшего гауссовского элементарного процесса, каковым является винеровский процесс, хотя он и не является стационарным. Оказывается, что даже в этом простейшем случае не имеется достаточно полного решения. Настоящая работа посвящена исследованию именно задачи восстановления плотности распределения вероятностей случайной величины $J_{\mathfrak{D}}[W]$, где $\{W(t); t \geq 0\}$ — винеровский процесс.

2. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СЛУЧАЙНЫХ ЗНАЧЕНИЙ КВАДРАТИЧНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ ГАУССОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕКТОРОВ

В этом разделе мы, с методической целью, получим известную формулу для характеристической функции случайной величины $J_n[\mathbf{X}]$ — квадратичной формы от случайного гауссовского вектора $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$. В процессе ее вывода мы применяем аналитический прием, который позволяет существенно упростить рассуждения. Это уже проявляется в следующем утверждении (см., например, в [5]).

Теорема 1. *Пусть $Z_1, Z_2, ..., Z_n$ — набор комплексных гауссовских случайных величин с нулевым математическим ожиданием, $\mathsf{E}Z_k = 0$, $k = 1, \dots, n$. Математическое ожидание $\mathsf{E}Z_{i_1}Z_{i_2}\dots Z_{i_l}Z^*_{j_1}Z^*_{j_2}\dots Z^*_{j_m}$ может быть отлично от нуля только при $l = m$. При выполнении этого условия имеет место формула*

$$\mathsf{E}Z_{i_1}Z_{i_2}\dots Z_{i_m}Z^*_{j_1}Z^*_{j_2}\dots Z^*_{j_m} = \\ = \sum_{\mathsf{P}\in\mathbb{P}_m} (\mathsf{E}Z_{i_1}Z^*_{j_{P1}})\dots(\mathsf{E}Z_{i_m}Z^*_{j_{Pm}}), \tag{2.1}$$

где $\mathbb{P}_m$ — группа перестановок из набора m номеров $\langle i_1, \dots, i_m \rangle$.

□ Плотность $h(\mathbf{z})$, $z = \langle z_1, z_2, \dots, z_n \rangle \in \mathbb{C}^n$ по мере Лебега μ_n на $\mathbb{C}^n$ распределения вероятностей для набора n гауссовских случайных величин $\mathbf{Z} = \langle Z_1, \dots, Z_n \rangle$, который имеет нулевое математическое ожидание, $\mathsf{E}\mathbf{Z} = 0$, по определению, имеет вид

$$h(\mathbf{z}) = \pi^{-n}(\det \mathcal{A})\exp[-(\mathbf{z}, \mathcal{A}\mathbf{z})],$$

где $\mathcal{A}$ — строго положительная эрмитова матрица, $\mathcal{A}^+ = \mathcal{A}$, характеризующая набор $\mathbf{Z}$, и $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $\mathbb{C}^n$, для любых двух векторов $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$, по определению, равное

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{k=1}^{n} u_k v_k^*.$$

Характеристическая функция случайного вектора $\mathbf{Z}$ равна

$$\mathsf{E}\exp[i\operatorname{Re}(\mathbf{Z}, \mathbf{v})] =$$
$$= \pi^{-n}\det\mathcal{A}\int_{\mathbb{C}^n}\exp[i\operatorname{Re}(\mathbf{z}, \mathbf{v}) - (\mathbf{z}, \mathcal{A}\mathbf{z})]d\mu_n(\mathbf{z}) = \quad (2.2)$$
$$= \exp\left[-\frac{1}{4}(\mathbf{v}, \mathcal{A}^{-1}\mathbf{v})\right].$$

При $m \neq l$, положим, для определенности, $m < l$. Заметим, что из определения характеристической функции следует

$$\mathsf{E}Z_{i_1}Z_{i_2}\ldots Z_{i_l}Z_{j_1}^*Z_{j_2}^*\ldots Z_{j_m}^* =$$
$$= (-2i)^{m+l}\left(\frac{\partial^{m+l}}{\partial v_{j_1}\ldots\partial v_{j_m}\partial v_{i_1}^*\ldots\partial v_{i_l}^*}\mathsf{E}\exp[i\operatorname{Re}(\mathbf{Z}, \mathbf{v})]\right)_{\mathbf{v}=0}. \quad (2.3)$$

Используя явный вид характеристической функции (2.2), получаем

$$\left(\frac{\partial^{m+l}}{\partial v_{j_1}\ldots\partial v_{j_m}\partial v_{i_1}^*\ldots\partial v_{i_l}^*}\mathsf{E}\exp[i\operatorname{Re}(\mathbf{Z}, \mathbf{v})]\right)_{\mathbf{v}=0} =$$
$$= \left(-\frac{1}{4}\right)^{l}\left(\frac{\partial^{m}}{\partial v_{j_1}\ldots\partial v_{j_m}}(\mathcal{A}^{-1}v)_{i_1}\ldots(\mathcal{A}^{-1}v)_{i_l}\exp\left[-\frac{1}{4}(\mathbf{v}, \mathcal{A}^{-1}\mathbf{v})\right]\right)_{v=0}. \quad (2.4)$$

Это выражение при $l > m$ равно нулю, так как при выполнении всех дифференцирований останутся множители $(\mathcal{A}^{-1}v)_i$, в которых необходимо положить $\mathbf{v} = 0$.

Из формулы (2.4) при $m = l$ получаем

$$\left(\frac{\partial^{2m}}{\partial v_{j_1}\ldots\partial v_{j_m}\partial v_{i_1}^*\ldots\partial v_{i_m}^*}\mathsf{E}\exp[i\operatorname{Re}(\mathbf{Z}, \mathbf{v})]\right)_{\mathbf{v}=0} =$$
$$= \left(-\frac{1}{4}\right)^{m}\left(\frac{\partial^{m}}{\partial v_{j_1}\ldots\partial v_{j_m}}(\mathcal{A}^{-1}v)_{i_1}\ldots(\mathcal{A}^{-1}v)_{i_m}\right)_{\mathbf{v}=0} =$$
$$= \left(-\frac{1}{4}\right)^{m}\sum_{\mathsf{P}\in\mathbb{P}_m}\mathcal{A}^{-1}_{i_1 j_{P1}}\ldots\mathcal{A}^{-1}_{i_m j_{Pm}}.$$

Эта формула вместе с (2.3) при $m = l$ дает

$$\mathsf{E}Z_{i_1}Z_{i_2}\ldots Z_{i_m}Z_{j_1}^*Z_{j_2}^*\ldots Z_{j_m}^* = \sum_{\mathsf{P}\in\mathbb{P}_m}\mathcal{A}^{-1}_{i_1 j_{P1}}\ldots\mathcal{A}^{-1}_{i_m j_{Pm}}. \quad (2.5)$$

Замена же матричных элементов в (2.5) на математические ожидания $\mathsf{E}Z_iZ_j^* = (A^{-1})_{ij}$ приводит к (2.1).■

Следствие. *Пусть* $\mathbf{Z} = \langle Z_1, Z_2, \ldots, Z_n\rangle$ *— набор комплексных гауссовских случайных величин с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей* $K_{ij} = \mathsf{E}Z_iZ_j^*$, $i, j = 1, \ldots, n$. *Тогда для характеристической функции* $\mathsf{E}\exp[2i\operatorname{Re}(\mathbf{Z}, \mathbf{u})]$ *справедлива формула*

$$\mathsf{E}\exp[2i\operatorname{Re}(\mathbf{Z}, \mathbf{u})] = \exp[-(\mathcal{K}\mathbf{u}, \mathbf{u})]. \quad (2.6)$$

Введем в рассмотрение случайную величину

$$J_n[\mathbf{Z}] = \sum_{k=1}^{n}|Z_k|^2 = (\mathbf{Z}, \mathbf{Z}),$$

которая является квадратичным функционалом от гауссовского случайного вектора $\mathbf{Z}$. Справедливо следующее утверждение относительно характеристической функции $Q_n(-i\lambda \mid \mathbf{Z})$,

$$Q_n(\lambda \mid \mathbf{Z}) = \mathsf{E}\exp(-\lambda J_n[\mathbf{Z}])$$

этой случайной величины.

Теорема 2. *Для любого случайного гауссовского вектора* $\mathbf{Z}$*, принимающего значения в* $\mathbb{C}^n$ *и имеющего* $\mathsf{E}\mathbf{Z} = 0$*, имеет место формула*

$$Q_n(\lambda \mid \mathbf{Z}) = [\det(\mathcal{I} + \lambda\mathcal{K})]^{-1}, \quad (2.7)$$

где $\mathcal{I}$ *— единичная матрица размера* $n \times n$.

□ Воспользуемся следующим непосредственно проверяемым интегральным представлением

$$\exp(-\lambda(\mathbf{Z}, \mathbf{Z})) =$$
$$= \frac{1}{\pi^n}\int_{\mathbb{C}^n}\exp(-(\mathbf{p}, \mathbf{p}) + 2i\lambda^{1/2}\operatorname{Re}(\mathbf{p}, \mathbf{Z}))d\mu_n(\mathbf{p}).$$

Тогда из определения функции $Q_n(\lambda \mid \mathbf{Z})$ следует, что

$$Q_n(\lambda \mid \mathbf{Z}) =$$
$$= \frac{1}{\pi^n}\int_{\mathbb{C}^n}e^{-(\mathbf{p},\mathbf{p})}\mathsf{E}\exp(2i\lambda^{1/2}\operatorname{Re}(\mathbf{p}, \mathbf{Z}))d\mu_n(\mathbf{p}).$$

Применим теперь формулу (2.6)

$$Q_n(\lambda \mid \mathbf{Z}) = \frac{1}{\pi^n}\int_{\mathbb{C}^n}\exp(-(\mathbf{p} + \lambda\mathcal{K}\mathbf{p}, \mathbf{p}))d\mu_n(\mathbf{p}).$$

Вычисление последнего интеграла дает нам (2.7). ■

Теорема 3. *Для любого случайного гауссовского вектора* $\mathbf{X}$, *принимающего значения в* $\mathbb{R}^n$ *и имеющего* $\mathsf{E}\mathbf{X} = 0$, *имеет место формула*

$$Q_n(\lambda \mid \mathbf{X}) = [\det(\mathcal{I} + \lambda\mathcal{K})]^{-1/2}, \qquad (2.8)$$

где $\mathcal{K}/2$ *— ковариационная матрица* $\mathbf{X}$.

□ Рассмотрим два экземпляра стохастически эквивалентных и независимых случайных вещественных гауссовских векторов $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ размерности n и обладающих нулевым математическим ожиданием. Ввиду стохастической эквивалентности этих случайных векторов, каждый из них обладает одной и той же ковариационной матрицей, которую мы обозначим $\mathcal{K}/2$.

Построим случайный гауссовский комплексный вектор $\mathbf{Z}$, с компонентами $Z_k = X_k + iY_k$, $k = 1, 2, ..., n$. Этот вектор также обладает нулевым математическим ожиданием. Кроме того, его ковариационная $n \times n$ — матрица равна

$$\mathsf{E}(Z_j Z_k^*) = \mathsf{E}(X_j + iY_j)(X_k - iY_k) =$$
$$= \mathsf{E}(X_j X_k + Y_j Y_k) + i\mathsf{E}(X_j Y_k - Y_j X_k) =$$
$$= 2\mathcal{K}_{jk}/2 = \mathcal{K}_{jk},\ \ j, k = 1, 2, ..., n,$$

где второе слагаемое обратилось в нуль вследствие статистической независимости компонент X_j, Y_k при всех $j, k = 1, ..., n$ и равенства нулю их математических ожиданий.

Рассмотрим характеристическую функцию случайной величины $J_n[\mathbf{Z}]$. Она равна

$$Q_n(\lambda \mid \mathbf{Z}) = \mathsf{E}\exp(-\lambda(\mathbf{Z}, \mathbf{Z})) =$$
$$= \mathsf{E}\exp[-\lambda((\mathbf{X}, \mathbf{X}) + (\mathbf{Y}, \mathbf{Y}))] =$$
$$= Q_n(\lambda \mid \mathbf{X}) Q_n(\lambda \mid \mathbf{Y}) = Q_n^2(\lambda \mid \mathbf{X}),$$

ввиду статистической независимости и эквивалентности векторов $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$. Тогда $Q_n(\lambda \mid \mathbf{X}) = Q_n^{1/2}(\lambda \mid \mathbf{Z})$, где выбирается та ветвь корня, при которой $Q_n(0 \mid \mathbf{X}) = 1$. Используя теперь (2.7), приходим к (2.8). ■

3. ВИНЕРОВСКИЙ ПРОЦЕСС

Винеровским процессом $\{W(t); t \in [0, \infty)\}$ с дисперсией σ называется гауссовский марковский процесс, у которого плотность условных вероятностей перехода $f(x, t \mid x', t')$ определяется формулой

$$f(x, t \mid x', t') =$$
$$= [2\pi\sigma(t - t')]^{-1/2} \exp\left(-\frac{(x - x')^2}{2\sigma(t - t')}\right), \qquad (3.1)$$

и, с вероятностью единица, $W(0) = 0$. Этот процесс обладает следующими свойствами.

Лемма 1.

$$\mathsf{E}X(t) = 0. \qquad (3.2)$$

$$\mathsf{E}(X(t))^2 = \sigma t. \qquad (3.3)$$

□

$$\mathsf{E}(X(t))^2 = \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x, t \mid 0, 0) dx =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma t}\right) \frac{dx}{\sqrt{2\pi\sigma t}} = \sigma t. \qquad ■$$

Лемма 2.

$$\mathsf{E}(X(t) - X(t'))^2 = \sigma(t - t'). \qquad (3.4)$$

□ Пусть $s = t - t'$. Тогда

$$\mathsf{E}(X(t) - X(t'))^2 =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^2} (x - x')^2 f(x, t \mid x', t') f(x', t' \mid 0, 0) dx dx' =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma s}\right) \frac{dx}{\sqrt{2\pi\sigma s}} \times$$
$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma t'}\right) \frac{dy}{\sqrt{2\pi\sigma t'}} = \sigma s.$$

Из (3.3) и (3.4) следует формула для корреляционной функции.

Лемма 3.

$$\mathsf{E}X(t)X(t') = \sigma \min\{t, t'\}. \qquad (3.5)$$

□ При $t > t'$ имеем

$$\mathsf{E}X(t)X(t') = \frac{1}{2}[\mathsf{E}X^2(t) + \mathsf{E}X^2(t') -$$
$$-\mathsf{E}(X(t) - X(t'))^2] = \sigma t'. \qquad ■$$

Введем теперь комплекснозначный винеровский процесс с выборочными траекториями $Z(t) = X(t) + iY(t)$, где $\{X(t)\}$, $\{Y(t)\}$ — пара стохастически независимых и эквивалентных (т.е. с одной и той же величиной σ) винеровских процессов.

На основе плотности условных вероятностей перехода (3.1) винеровских процессов $\{X(t)\}$, $\{Y(t)\}$ находим аналогичную плотность для процесса $\{Z(t); t \in \mathbb{R}_+\}$,

$$h(z,t \mid z',t') = f(x,t \mid x',t')f(y,t \mid y',t') =$$
$$= [2\pi\sigma(t-t')]^{-1} \exp\left(-\frac{|z-z'|^2}{2\sigma(t-t')}\right), \quad (3.6)$$

при $z = x+iy,\ \ z' = x'+iy'$.

Аналогами формул (3.2)—(3.5) для процесса $\{Z(t)\}$ являются следующие

$$\mathsf{E}Z(t) = 0,$$
$$\mathsf{E}|Z(t)|^2 = 2\sigma t, \quad (3.7)$$

$$\mathsf{E}|Z(t)-Z(t')|^2 = 2\sigma(t-t'),$$
$$\mathsf{E}Z(t)Z^*(t') = 2\sigma\min\{t,t'\}. \quad (3.8)$$

Первые три из них получаются непосредственно из определения. Например, (3.7) вытекает из равенств

$$\mathsf{E}|Z(t)|^2 = \mathsf{E}(X^2(t)+Y^2(t)) =$$
$$= \mathsf{E}X^2(t) + \mathsf{E}Y^2(t) = 2\sigma t.$$

При получении (3.8) используется независимость процессов $\{X(t)\}$, $\{Y(t)\}$, так как, например, $\mathsf{E}X(t)Y(t') = \mathsf{E}X(t)\mathsf{E}Y(t') = 0$. Тогда

$$\mathsf{E}Z(t)Z^*(t') = \mathsf{E}X(t)X(t') + \mathsf{E}Y(t)Y(t') +$$
$$+i(\mathsf{E}X(t)Y(t') - \mathsf{E}X(t')Y(t)) = 2\sigma\min\{t,t'\}.$$

4. ДИСКРЕТНЫЙ АДДИТИВНЫЙ КВАДРАТИЧНЫЙ ФУНКЦИОНАЛ

В этом разделе мы вычислим характеристическую функцию распределения вероятностей случайной величины $\Delta J_n[\mathbf{X}]$, $\Delta = T/n$, $T>0$, в случае, когда гауссовский вектор $\mathbf{X}$ состоит из последовательных отсчетов винеровского процесса $\{W(t); t\in R_+\}$, т.е. $X_k = W(t_k)$, $t_k = k\Delta$, $k=1,\dots,n$. В разделе 6, на основе этой формулы, будет получена асимптотически точная в пределе $n\to\infty$ формула для соответствующей плотности распределения.

Искомая характеристическая функция, очевидно, равна $Q_n(\lambda\Delta \mid \mathbf{X})$. На основании Теоремы 3, ее вычисление сводится к вычислению функции $Q_n(\lambda\Delta \mid \mathbf{Z})$, где $\mathbf{Z} = \langle Z_k; k=1,\dots,n\rangle$, $Z_k = X_k + iY_k$, $k=1,2,\dots,n$, и Y_k стохастически эквивалентны X_k и образуют при каждом $k=1,\dots,n$ статистически независимые пары. В этом случае имеем $Q_n(\lambda \mid \mathbf{X}) = Q_n^{1/2}(\lambda \mid \mathbf{Z})$. Поэтому, для решения поставленной задачи достаточно вычислить функцию $Q_n(\lambda \mid \mathbf{Z})$. Для ее решения нам понадобится ковариационная матрица случайного вектора $\mathbf{X}$. Исходя из определения вектора $\mathbf{X}$ и (3.5), имеем

$$\mathcal{K}_{jk}/2 \equiv \mathsf{E}(X_jX_k) = \sigma\min\{t_j,t_k\}.$$

Следовательно,

$$\mathcal{K}_{jk} = \mathsf{E}(Z_jZ_k^*) = 2\sigma\min\{t_j,t_k\} = 2\sigma\Delta\min\{j,k\}.$$

Итак, задача о вычислении $Q_n(\lambda \mid \mathbf{X})$ свелась к вычислению определителя

$$P(\lambda) \equiv Q_n^{-1}(\lambda \mid \mathbf{Z}) = \det(\mathcal{I} + \lambda\Delta\mathcal{K}),$$

который, очевидно, является полиномом степени n относительно λ. Мы начнем его вычисление со следующего утверждения.

Лемма 4. *Матрица $\mathcal{K}$ не имеет собственного числа, равного нулю.*

□ Допустим противное, т.е. существует вектор $\mathbf{v} = \langle v_i; i=1,\dots,n\rangle \in \mathbb{C}^n$, для которого $\mathcal{K}\mathbf{v} = 0$. Тогда квадратичная форма $(\mathbf{v},\mathcal{K}\mathbf{v})$ равна нулю. При этом

$$(\mathbf{v},\mathcal{K}\mathbf{v}) = \sum_{i,j=1}^{n} v_i^*\mathcal{K}_{ij}v_j = \sum_{i,j=1}^{n} v_i\mathsf{E}Z_iZ_j^*v_j^* =$$
$$= \mathsf{E}\left|\sum_{i=1}^{n} Z_iv_i^*\right|^2 = 0.$$

Тогда с вероятностью 1 имеем $\sum_{i=1}^{n} Z_iv_i^* = 0$.

Рассмотрим случайный вектор с компонентами $\zeta_m = \sum_{i=1}^{m} Z_iv_i^*$, $m=1,\dots,n$. Так как он является линейным преобразованием гауссовского случайного вектора $\mathbf{Z}$, то он также является гауссовским, и при этом $\zeta_n = 0$ с вероятностью 1. С другой стороны, так как $\{W(t)\}$ — марковский процесс и $X_k = W(t_k)$, то последовательность $\langle Z_k = X_k + iY_k; k=1,\dots,n\rangle$ представляет собой марковскую цепь со значениями в $\mathbb{C}$. Плотность условных вероятностей перехода $h(z,t_{k+1} \mid z',t_k)$ этой цепи, определяемая для любых $z = x+iy, z'\in\mathbb{C}$ и $k=1,\dots,n$ формулой

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\Pr\{X_{k+1} < x, Y_{k+1} <$$
$$< y \,|\, Z_k = z'\} = h(z,t_{k+1} \,|\, z',t_k),$$

где $Z_k = X_k + iY_k$, находится на основании формулы (3.6), учитывая, что $Z_k = Z(t_k)$, где

$Z(t)$ — комплекснозначный винеровский процесс, введенный в разд. 3. Тогда для этой марковской цепи получаем выражение плотности $h_k(z)$ распределения величины ζ_k в виде

$$h_k(z) = \int_{\mathbb{C}} h(z, t_k \mid z_{k-1}, t_{k-1}) d\mu(z_{k-1}) \ldots$$
$$\ldots \int_{\mathbb{C}} h(z_2, t_2 \mid z_1, t_1) h(z_1, t_1 \mid 0, 0) d\mu(z_1),$$

где $\mu(\cdot) = \mu_1(\cdot)$ — мера Лебега на $\mathbb{C}$.

Так как интегральное ядро $h(z, t_{k+1} \mid z', t_k) > 0$ на множестве полной меры, то $h_k(z) \neq 0$ при всех $k = 1, 2, \ldots, n$ и, в частности, $h_n(z) \neq \delta(z)$ ($\delta(\cdot)$ — распределение Дирака), что находится в противоречии с равенством $\zeta_n = 0$, имеющем место с вероятностью единица. ■

Итак, матрица $\mathcal{K}$ имеет n сингулярных чисел μ_k, $k = 1, \ldots, n$, т.е. чисел, для которых совокупность $\{\mu_k^{-1}; k = 1, \ldots, n\}$ есть полный набор ее собственных чисел с учетом кратности с соответствующими собственными векторами $\mathbf{c}^{(k)}, k = 1, 2, .., n$,

$$\mu_k \mathcal{K} \mathbf{c}^{(k)} = \mathbf{c}^{(k)}, \ k = 1, \ldots, n.$$

Тогда полином $P(\lambda)$ представим в виде

$$P(\lambda) = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{\lambda}{\mu_k}\right).$$

Если корни полинома $P(\lambda)$ простые, то он полностью определяется совокупностью условий

$$P(-\mu_k) = 0, \ k = 1, \ldots, n, \ P(0) = 1.$$

Перейдем к вычислению полинома $P(\lambda)$. Пусть $\mathbf{c} = \langle c_m; m = 1, \ldots, n \rangle$ — один из совокупности собственных векторов $\{\mathbf{c}^{(k)}; k = 1, \ldots, n\}$ матрицы $\mathcal{K}$ с сингулярным числом μ. Вычисление будет основано на том, что для каждого такого μ имеет место $P(-\mu) = 0$. Для фиксированного числа μ выполняется

$$\sum_{k=1}^{n} \mathcal{K}_{km} c_m = \sum_{m=1}^{k} \mathcal{K}_{km} c_m + \sum_{m=k+1}^{n} \mathcal{K}_{km} c_m =$$
$$= 2\Delta\sigma \left(\sum_{m=1}^{k} m c_m + k \sum_{m=k+1}^{n} c_m \right) = \mu^{-1} c_k. \tag{4.1}$$

Введем для рассматриваемого вектора $\mathbf{c}$ последовательности

$$\langle a_k; k = 0, 1, \ldots, n \rangle, \ \langle b_k; k = 0, 1, \ldots, n \rangle$$

по следующим формулам

$$a_0 = 0, b_n = 0, \ a_k = \sum_{m=1}^{k} m c_m, \ b_k = \sum_{m=k+1}^{n} c_m.$$

Тогда имеем

$$a_{k+1} = a_k + (k+1) c_{k+1}, \ b_{k+1} = b_k - c_{k+1}.$$

Эти соотношения выполняются при всех значениях $k = 0, 1, \ldots, n-1$. На основе (4.1) получаем $\eta\mu(a_{k+1} + (k+1) b_{k+1}) = c_{k+1}$, где $\eta = 2\sigma\Delta$. Это дает систему уравнений, позволяющую рекуррентно вычислять последовательности $\langle a_k \rangle$, $\langle b_k \rangle$, $\langle c_k \rangle$. Исключая из нее c_{k+1}, находим систему уравнений, которые можно рассматривать как уравнения относительно a_{k+1}, b_{k+1},

$$\begin{cases} a_{k+1}(1 - \eta\mu(k+1)) - \eta\mu(k+1)^2 b_{k+1} = a_k, \\ \eta\mu a_{k+1} + b_{k+1}(1 + \eta\mu(k+1)) = b_k. \end{cases}$$

Из этой системы, с определителем равным 1, находим рекуррентные формулы для определения a_{k+1}, b_{k+1}, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

$$\begin{cases} a_{k+1} = \eta\mu(k+1)^2 b_k + a_k(1 + \eta\mu(k+1)), \\ b_{k+1} = b_k(1 - \eta\mu(k+1)) - \eta\mu a_k. \end{cases} \tag{4.2}$$

Определим $d_k = a_k + (k+1) b_k$, $d_0 = b_0$, $d_n = a_n$. Тогда $b_{k+1} = b_k - \eta\mu d_k$ и $a_{k+1} = a_k + \eta\mu(k+1) d_k$. Используя эти соотношения, получаем рекуррентную формулу для определения d_k,

$$d_{k+1} = a_{k+1} + (k+2) b_{k+1} = b_k + (1 - \eta\mu) d_k.$$

Система рекуррентных уравнений

$$\begin{cases} b_{k+1} = b_k - \eta\mu d_k, \\ d_{k+1} = b_k + d_k(1 - \eta\mu), \end{cases}$$

для определения компонент собственного вектора $\mathbf{c}$, эквивалентна системе (4.2), однако, в отличие от нее, уже имеет постоянные коэффициенты. Введя 2×2 матрицу

$$\mathcal{T}(\mu) = \begin{pmatrix} 1 & -\eta\mu \\ 1 & 1 - \eta\mu \end{pmatrix}$$

и двухкомпонентные векторы $\mathsf{e}_k = \langle b_k, d_k \rangle$, систему запишем в виде $\mathsf{e}_{k+1} = \mathcal{T}(\mu) \mathsf{e}_k$. Тогда, учитывая начальное условие $d_0 = b_0$, последовательность $\langle \mathsf{e}_k, k = 1, 2, \ldots, n \rangle$ с точностью до множителя восстанавливается в виде $\langle \mathcal{T}^k(\mu) \mathsf{e}; k = 1, \ldots, n \rangle$, где $\mathsf{e} = \langle 1, 1 \rangle$. Это, в свою очередь, позволяет восстановить с точностью до множителя собственный вектор $\mathbf{c} = \langle \mathbf{c}_k; k = 1, \ldots, n \rangle$, ввиду соотношения $c_k = \eta\mu(d_k - b_k)$. При этом необходимо положить $\mu = \mu_k$, если вектор $\mathbf{c}$ соответствует сингулярному числу μ_k. Так как $b_n = 0$, то, для таким образом выбранного μ, вектор e_n обязательно пропорционален вектору $\langle 0,1\rangle$. Следовательно, в этом случае выполняется $(\mathsf{e}',[\mathcal{T}(\mu)]^n\mathsf{e}) = 0$, где $\mathsf{e}' = \langle 1,0\rangle$ и $k = 1,2,\ldots,n$. Так как выражение $(\mathsf{e}',[\mathcal{T}(\mu)]^n\mathsf{e})$ является полиномом степени n относительно μ, то мы приходим к заключению, что, в случае простых собственных чисел у матрицы $\mathcal{K}$, полином $P(-\mu)$ может отличаться от этого выражения только лишь постоянным множителем. Так как, кроме того, $P(0) = 1$ и $(\mathsf{e}',[T(0)]^n\mathsf{e}) = 1$ (тривиально проверяется, что $[\mathcal{T}(0)]^n\mathsf{e} = \langle 1, n+1\rangle$), то

$$P(-\mu) = (\mathsf{e}',[\mathcal{T}(\mu)]^n\mathsf{e}). \tag{4.3}$$

С целью вычисления полинома $P(-\mu)$ по формуле (4.3), найдем собственные числа $s_\pm$ и соответствующие им собственные векторы $\mathsf{u}^\pm = \langle u_1^\pm, u_2^\pm\rangle$ матрицы $\mathcal{T}(\mu)$. На основании характеристического уравнения $\det(\mathcal{T}(\mu) - s) = 0$ получаем

$$\begin{gathered} s^2 - 2\xi s + 1 = 0, \\ s_\pm = \xi \pm (\xi^2 - 1)^{1/2}, \\ \xi = 1 - \eta\mu/2. \end{gathered} \tag{4.4}$$

Из уравнения $\mathcal{T}(\mu)\mathsf{u}^\pm = s_\pm \mathsf{u}^\pm$ для собственных векторов имеем $u_1^\pm - \eta\mu u_2^\pm = s_\pm u_1^\pm$, и можно положить $\mathsf{u}^\pm = \left\langle 1, (\eta\mu)^{-1}(1 - s_\pm)\right\rangle$.

Разложим векторы e и e' по собственным векторам

$$\mathsf{e} = \alpha_+\mathsf{u}^+ + \alpha_-\mathsf{u}^-,\ \mathsf{e}' = \beta_+\mathsf{u}^+ + \beta_-\mathsf{u}^-,$$

$$\begin{cases} \alpha_+ u_1^+ + \alpha_- u_1^- = 1, \\ \alpha_+ u_2^+ + \alpha_- u_2^- = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} \beta_+ u_1^+ + \beta_- u_1^- = 1, \\ \beta_+ u_2^+ + \beta_- u_2^- = 0. \end{cases}$$

Введя обозначение $D \equiv u_1^+ u_2^- - u_2^+ u_1^-$, получим

$$\alpha_+ = D^{-1}(u_2^- - u_1^-),\ \alpha_- = D^{-1}(u_1^+ - u_2^+);$$

$$\beta_+ = D^{-1}u_2^-,\ \beta_- = -D^{-1}u_2^+.$$

Вычислим теперь скалярное произведение, определяющее $P(-\mu)$,

$$\begin{aligned} (\mathsf{e}',[\mathcal{T}(\mu)]^n\mathsf{e}) = s_+^n[\alpha_+\beta_+(\mathsf{u}^+,\mathsf{u}^+) + \alpha_+\beta_-(\mathsf{u}^+,\mathsf{u}^-)] + \\ + s_-^n[\alpha_-\beta_+(\mathsf{u}^-,\mathsf{u}^+) + \alpha_-\beta_-(\mathsf{u}^-,\mathsf{u}^-)]. \end{aligned}$$

Подставляя выражения для коэффициентов $\alpha_\pm$, $\beta_\pm$, получаем

$$\begin{aligned} P(-\mu) = D^{-1}[s_+^n(u_1^+u_2^- - u_1^+u_1^-) - \\ - s_-^n(u_2^+u_1^- - u_1^+u_1^-)]. \end{aligned}$$

Подставив выражение для D и выражения величин $u_{1,2}^\pm$ через собственные числа $s_\pm$, а также воспользовавшись соотношением $1 - s_\mp - \eta\mu = s_\pm - 1$, получим следующее выражение для $P(-\mu)$,

$$P(-\mu) = (s_+ - s_-)^{-1}[s_+^n(s_+ - 1) - s_-^n(s_- - 1)], \tag{4.5}$$

где величины $s_\pm$ определяются формулами (4.4).

Проверим, наконец, что все нули полинома $P(-\mu)$ простые. Обозначим $\xi = \mathrm{ch}t$. Тогда $s_\pm = \exp(\pm t)$, и уравнение $P(-\mu) = 0$ сводится к уравнению $e^{nt}(e^t - 1) = e^{-nt}(e^{-t} - 1)$. Откуда, учитывая, что $t = 0$, $\xi = 1$, т.е. $\mu = 0$ не является корнем, так как в этом случае обращается в нуль знаменатель в (4.5), получим уравнение $e^{(2n+1)t} = -1$. Решением этого уравнения являются $t = i\pi(2k+1)/(2n+1)$, $k = 0,1,\ldots,n-1$. Значение $k = n$ не дает нового корня, так как в этом случае $s_+ = s_- = -1$, что приводит к обращению в нуль также и знаменателя. Итак, мы имеем n различных нулей полинома $P(-\mu)$, получающихся из соотношения $1 - \eta\lambda/2 = \cos[(2k+1)\pi/(2n+1)]$, $k = 0,1,\ldots,n-1$.

Таким образом, с учетом замечания, сделанного в начале раздела, нами доказана

Теорема 4. *Производящая функция $Q_n(\lambda \mid \mathbf{X})$ случайной величины $J_n[\mathbf{X}]$, где*

$$J_n[\mathbf{X}] = \sum_{k=1}^n |X_k|^2,\ X_k = W(t_k),$$

$$t_k = k\Delta,\ \Delta = T/n,$$

равна

$$Q_n(\lambda \mid \mathbf{X}) = [P(\lambda)]^{-1/2},$$

где $P(-\mu)$ определяется формулой (4.5).

5. ФОРМУЛА КАЦА

В этом разделе мы, воспользовавшись Теоремой 4, получим известную формулу М. Каца (см., например, [6]) для характеристической функции случайной величины $J_{\mathfrak{D}}[W]$ — квадратичного функционала от траекторий винеровского процесса.

Для применения Теоремы 4 необходимо заменить в ее формулировке $J_n[\mathbf{X}]$ на $\Delta J_n[\mathbf{X}]$ и, соответственно, в формуле (4.5) необходимо заменить $-\mu$ на $\lambda\Delta$, $\Delta = T/n$. После этого, формула М. Каца получается переходом к пределу $n \to \infty$. Мы же, на самом деле, получим не только это предельное значение для характеристический функции, но и первую поправку к нему, связанную с конечностью величины n, которая имеет порядок $\sim n^{-1}$.

Для удобства дальнейших вычислений, введем другие обозначения, выделив явно зависимость от n. Положим $\xi = 1 + \gamma^2 / 2n^2$ (здесь уже произведена замена λ на $\lambda T / n$), где $\gamma = T(2\lambda\sigma)^{1/2}$, т.е. $\lambda\eta\Delta = \gamma^2 / n^2$. В этих обозначениях получаем

$$(\xi^2 - 1)^{1/2} = \frac{\gamma}{n} + O(n^{-3}),$$

$$s_{\pm} = 1 \pm \frac{\gamma}{n} + \frac{\gamma^2}{2n^2} + O(n^{-3}),$$

$$n \ln s_{\pm} = n\left(\pm\frac{\gamma}{n} + O(n^{-3})\right) = \pm\gamma + O(n^{-2}),$$

$$s_{\pm}^n = e^{\pm\gamma}(1 + O(n^{-2})),$$

$$s_{\pm} - 1 = \pm\frac{\gamma}{n} + \frac{\gamma^2}{2n^2} + O(n^{-3}),$$

$$s_+ - s_- = 2\frac{\gamma}{n}(1 + O(n^{-2})).$$

Подставляя эти выражения в формулу (4.5), найдем

$$P(\lambda\Delta) = \operatorname{ch}\gamma + \frac{\gamma}{2n}\operatorname{sh}\gamma + O(n^{-2}),$$

$$Q_n(\lambda\Delta \mid \mathbf{X}) = P^{-1/2}(\lambda\Delta) = [\operatorname{ch}\gamma]^{-1/2}\left(1 - \frac{\gamma}{4n}\operatorname{th}\gamma\right).$$

Перейдем теперь к пределу $n \to \infty$ непосредственно в определении функции $Q_n(\lambda\Delta \mid \mathbf{X})$. Для этого воспользуемся утверждением известной теоремы Дуба (см., например, [7]) о том, что существует такая модификация винеровского процесса (именно, ее мы имеем в виду, когда говорим о стандартном винеровском процессе), у которой траектории с вероятностью 1 непрерывны. В этом случае можно перейти к пределу $n \to \infty$ под знаком математического ожидания,

$$\lim_{n\to\infty} Q_n(\lambda\Delta \mid \mathbf{X}) = \lim_{n\to\infty} \mathsf{E}\exp\left(-\lambda\frac{T}{n}J_n[\mathbf{X}]\right) =$$

$$= \mathsf{E}\exp\left(-\lambda\lim_{n\to\infty}\frac{T}{n}\sum_{k=1}^{n}W^2(t_k)\right) =$$

$$= \mathsf{E}\exp\left(-\lambda\int_0^T W^2(t)dt\right) =$$

$$= \mathsf{E}\exp(-\lambda J_{\mathfrak{D}}[W]) = Q(\lambda)$$

для $\mathfrak{D} = [0, T]$. Таким образом, мы доказали утверждение.

Теорема 5. *Производящая функция* $Q(\lambda)$ *случайной величины* $J_{\mathfrak{D}}[W]$, $\mathfrak{D} = [0, T]$ *равна*

$$Q(\lambda) = [\operatorname{ch}(T(2\lambda\sigma)^{1/2})]^{-1/2}. \qquad (5.1)$$

При этом имеет место асимптотическая формула

$$Q(\lambda \mid \mathbf{X}) = Q(\lambda)\left(1 - \frac{\gamma}{4n}\operatorname{th}\gamma + O(n^{-2})\right),$$

где $\gamma = T(2\lambda\sigma)^{1/2}$.

6. ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ЗНАЧЕНИЙ $J_{[0,T]}[W]$

В этом разделе мы получим равномерно сходящееся на $[0, \infty)$ разложение для плотности g_T распределения вероятностей случайной величины $J[W] \equiv J_{[0,T]}[W]$. Более простая задача получения такого разложения для плотности распределения значений функционала $J_{[0,T]}$ на траекториях комплексного винеровского процесса решена в [8]. Ценность такого рода разложений состоит в том, что они являются источником построения аппроксимаций с гарантированной точностью для плотностей g_T на основе известных формул для характеристических функций.

Мы будем исходить из формулы для производящей функции (5.1), где, для простоты, заменим $(2\sigma)^{1/2}T$ на T. Плотность распределения $g_T(x)$ определяется, на основании (1.1), обратным преобразованием Лапласа

$$g_T(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty+c}^{i\infty+c} e^{\lambda x}[\operatorname{ch}(\lambda^{1/2}T)]^{-1/2}d\lambda, \qquad (6.1)$$

где $c > 0$, и разрез в плоскости λ произведен по отрицательной части действительной оси. Искомое разложение мы получим применением для вычисления этого интеграла метода Зоммерфельда—Ватсона.

Введем плотность $g(x) = T^2 g_T(T^2 x)$ с $x \in [0, \infty)$, для которой заменой переменной интегрирования в (6.1) получаем

$$g(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty+c}^{i\infty+c} e^{\lambda x}[\operatorname{ch}(\lambda^{1/2})]^{-1/2}d\lambda =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\pi i}\int_{-i\infty+c}^{i\infty+c}\left(\frac{\exp(2\lambda x - \lambda^{1/2})}{1 + \exp(-2\lambda^{-1/2})}\right)^{1/2}d\lambda. \qquad (6.2)$$

Докажем следующую теорему.

Теорема 6. *Плотность* $g(x)$ *представляется следующим абсолютно сходящимся рядом*

$$g(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x^3}}\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l\,\frac{(2l)!}{4^l(l!)^2}\times$$

$$\times(l+1/4)\exp\left(-\frac{(l+1/4)^2}{x}\right), \qquad (6.3)$$

для которой N*-й остаток*

$$g^{(N)}=\sqrt{\frac{2}{\pi x^3}}\sum_{l=N}^{\infty}\frac{(-1)^l(2l)!}{4^l(l!)^2}(l+1/4)\exp\left(-\frac{(l+1/4)^2}{x}\right)$$

оценивается величиной

$$\left|g^{(N)}(x)\right|\le\sqrt{\frac{2}{\pi x^3}}\left(\frac{(2N)!}{4^N(N!)^2}\right)\times$$

$$\times(N+1/4)\exp\left(-\frac{(N+1/4)^2}{x}\right). \qquad (6.4)$$

□ Положим в (6.2) $c=0$, так как имеющиеся особенности подынтегрального выражения лежат на отрицательной полуоси. Деформируем контур интегрирования в контур C, состоящий из последовательного прохождения путей $\{s-i\varepsilon; s\in(-\infty;0]\}$, $\{\varepsilon e^{is}; s\in[-\pi/2;\pi/2]\}$, $\{-s+i\varepsilon; s\in[0;+\infty)\}$. Такая деформация возможна, т.к.

$$\left|\mathrm{ch}(\lambda^{1/2})\right|^2=\mathrm{ch}(\lambda^{1/2})ch((\lambda^*)^{1/2})=$$

$$=\frac{1}{2}[\mathrm{ch}(2\,\mathrm{Re}(\lambda^{1/2}))+\mathrm{ch}(2i\,\mathrm{Im}(\lambda^{1/2}))]>$$

$$>\frac{1}{2}(\mathrm{ch}(2R^{1/2}\cos(\varphi/2))-1)=$$

$$=\mathrm{sh}^2(R^{1/2}\cos(\varphi/2)),$$

где $\lambda=Re^{i\varphi}$, и на дуге окружности $\{\lambda;\varphi\in\in[\pi/2;\pi)\}$ выполняется оценка для модуля подынтегрального выражения в (6.2),

$$\left|\frac{\exp(\lambda x)}{(\mathrm{ch}(\lambda^{1/2}))^{1/2}}\right|\le\frac{\exp(xR\cos\varphi)}{[\mathrm{sh}(R^{1/2}\cos(\varphi/2))]^{1/2}},$$

гарантирующая при $x>0$, $R^{1/2}\cos(\varphi/2)<\varepsilon$ выполнение на ней условия Жордана при сколь угодно малом $\varepsilon>0$, т.к. $\cos\varphi<0$. То же самое имеет место для дуги $\{\lambda;\varphi\in(-\pi,\pi/2]\}$.

В (6.2) произведем замену переменной интегрирования $\lambda^{1/2}=q$, тогда $\lambda=q^2$, $d\lambda=2qdq$. При этом контур C в плоскости λ превратится, после перехода к пределу $\varepsilon\to0$, в прямую $\{q=is; s\in\mathbb{R}\}$ в плоскости q. После этих преобразований имеем

$$g(x)=\frac{\sqrt{2}}{\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}q\left(\frac{\exp(2q^2x-q)}{1+\exp(-2q)}\right)^{1/2}dq.$$

Перейдем к интегрированию по переменной $s, q=is,\ \ dq=ids$. Получаем

$$g(x)=i\frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}s\left(\frac{\exp(-2xs^2-is)}{1+\exp(-2is)}\right)^{1/2}ds.$$

В последнем интеграле произведем сдвиг $s+i(4x)^{-1}\Rightarrow s$ переменной интегрирования, в результате чего получим

$$g(x)=i\frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}s\left(\frac{\exp(-2x(s-i(4x)^{-1})^2-(8x)^{-1})}{1+\exp(-2i(s+i(4x)^{-1})-(2x)^{-1})}\right)^{1/2}ds=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\exp(-(16x)^{-1})\int_{-\infty}^{+\infty}(is+(4x)^{-1})\times$$

$$\times\left(\frac{\exp(-2xs^2)}{1+e^{-1/(2x)}\exp(-2is)}\right)^{1/2}ds. \qquad (6.5)$$

Знаменатель подынтегрального выражения в (6.5) разложим в сходящийся при любом $x>0$ и любом $s\in\mathbb{R}$ ряд

$$(1+e^{-1/(2x)}\exp(-2is))^{-1/2}=$$

$$=\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l\,\frac{(2l-1)!!}{2^l l!}\exp(-l/(2x))\exp(-2ils).$$

Его сходимость равномерна в любой полосе $[0,M]\times\mathbb{R}$ плоскости (x,s), $M>0$.

Подставляя последнее выражение в (6.5), получим

$$g(x)=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\exp(-(16x)^{-1})\int_{-\infty}^{+\infty}(is+(4x)^{-1})\exp(-xs^2)\times$$

$$\times\left[\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l\,\frac{(2l)!}{4^l(l!)^2}\exp(-2ils)\exp(-l/(2x))\right]ds=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\exp(-(16x)^{-1})\left[\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l\,\frac{(2l)!}{4^l(l!)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}(is+(4x)^{-1})\times\right.$$

$$\left.\times\exp(-xs^2)\exp(-x(s+il/x)^2-x^{-1}l(l+1/2))\right]ds.$$

Перестановка операторов суммирования и интегрирования основана на равномерной сходимости ряда по s при любом фиксированном x.

В каждом слагаемом суммы произведем сдвиг $s+il/x\Rightarrow s$ переменной интегрирования

$$g(x)=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\exp(-(16x)^{-1})\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l\,\frac{(2l)!}{4^l(l!)^2}(is+x^{-1}[l+1/4])\times\right.$$

$$\left.\times\exp(-xs^2-x^{-1}l(l+1/2))\right]ds. \qquad (6.6)$$

Представим интеграл в виде суммы двух интегралов, в соответствии с выражением, стоящим с предэкспоненциальной скобке. Интеграл, соответствующий слагаемому is, обращается в нуль,

$$i\int_{-\infty}^{+\infty} s\left[\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l \frac{(2l)!}{4^l(l!)^2}\exp(-xs^2)\times\right.$$
$$\left.\times\exp(-x^{-1}l(l+1/2))\right]ds = 0,$$

ввиду нечетности подынтегральной функции. Интеграл, соответствующий слагаемому $x^{-1}[l+1/4]$, преобразуется следующим образом

$$x^{-1}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-xs^2)ds\right]\times$$
$$\times\left[\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l \frac{(2l)!}{4^l(l!)^2}[l+1/4]\exp(-x^{-1}l(l+1/2))\right].$$

Подстановка этого выражения в (6.6) с учетом значения интеграла Пуассона приводит к формуле (6.3).

Так как ряд (6.3) знакопеременный, то остаток ряда $g^{(N)}$ не превосходит первого слагаемого из числа отброшенных. Следовательно, имеет место оценка (6.4). ■

Следствие. *Имеет место оценка*

$$\left|g^{(N)}(x)\right| < \frac{3}{2e^2}N^{-5/2}. \tag{6.7}$$

□ Найдем оценку остатка ряда (6.3). Для этого запишем, на основании (6.3), выражение для $g(x)$ в форме

$$g(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l \omega_l r_l(x),$$

где

$$\omega_l = \frac{(2l)!}{4^l(l!)^2}(l+1/4),$$

$$r_l(x) = x^{-3/2}\exp\left(-\frac{(l+1/4)^2}{x}\right),$$

и найдем максимум по x функций $r_N(x)$. Приравнивая нулю производную по x этой функции

$$r_N'(x) = x^{-2}r_N(x)[(N+1/4)^2 - 3x/2] = 0,$$

находим решение x_* этого уравнения — точку единственного максимума функции $r_N(x)$

$$x_* = \frac{2}{3}(N+1/4)^2,$$

$$r_N(x_*) = \left(\frac{3}{2e}\right)^{3/2}(N+1/4)^{-3}.$$

Следовательно, оценка N-го остатка

$$\left|g^{(N)}(x)\right| \le \sqrt{\frac{2}{\pi}}\omega_N r_N(x_*) =$$
$$= \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi e}}\left(\frac{(2N)!}{4^N(N!)^2}\right)(N+1/4)^{-2}.$$

Оценим сверху коэффициент ω_N, сделав полученную оценку более прозрачной,

$$\omega_N = \frac{(2N-1)!!}{2^N N!} = \prod_{l=1}^{N}\left(\frac{2l-1}{2l}\right) = \prod_{l=1}^{N}\left(1-\frac{1}{2l}\right) =$$
$$= \exp\left[\sum_{l=1}^{N}\ln(1-(2l)^{-1})\right] < \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{N}l^{-1}\right] <$$
$$< \exp\left[-\frac{1}{2}(1+\ln N)\right] = \frac{e^{-1/2}}{\sqrt{N}},$$

ввиду справедливости неравенств $\ln(1-x) < -x$ при $x > 0$ и

$$\sum_{l=1}^{N}\frac{1}{l} > 1 + \int_1^N \frac{dx}{x} = 1 + \ln N.$$

Тогда, так как $\sqrt{3/\pi} < 1$, то имеет место (6.7). ■

Оценим теперь точность аппроксимаций вероятности $\Pr\{J_T[W] > c\}$, получаемых на основе функций $g^{(N)}$, $N = 1,2,\ldots$ Так как $g_T(x) = T^{-2}g(T^{-2}x)$, то

$$\Pr\{J_T[w] > c\} = 1 - T^{-2}\int_0^c g\left(T^{-2}x\right)dx \equiv 1 - \rho(c),$$

где

$$\rho(c) = \int_0^{c/T^2} g(x)dx.$$

Обозначив правую часть неравенства (6.4) посредством $\chi_N(x)$, имеем $\left|g^{(N)}(x)\right| \le \chi_N(x)$. Определим теперь функцию

$$\pi_N(c) \equiv 1 - \rho_N(c),\ \ \rho_N(c) = \int_0^{c/T^2} g - g^{(N)}(x)dx.$$

Нашей задачей является получение верхней оценки для уклонения $|\Pr\{J_T[w] > c\} - \pi_N(c)|$. Из неравенства (6.4) следует

$-\chi_N(x) \le g^{(N)}(x) \le \chi_N(x)$. Интегрируя в пределах от 0 до c/T^2, получаем

$$-\int_0^{c/T^2} \chi_N(x)dx \le \int_0^{c/T^2} g^{(N)}(x)dx \le \int_0^{c/T^2} \chi_N(x)dx.$$

Следовательно,

$$|\rho(c) - \rho_N(c)| = \left|\int_0^{c/T^2} (g^{(N)}(x)dx\right| \le \int_0^{c/T^2} \chi_N(x)dx,$$

что дает искомую оценку

$$|\Pr\{J_T[w] > c\} - \pi_N(c)| = |\rho(c) - \rho_N(c)| \le \le \int_0^{c/T^2} \chi_N(x)dx. \tag{6.8}$$

Наконец, для того чтобы сделать оценку (6.8) явной, вычислим интеграл, стоящий в правой части,

$$\int_0^{c/T^2} \chi_N(x)dx = \omega_N\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{c/T^2} \exp\left(-\frac{(N+1/4)^2}{x}\right)\frac{dx}{x^{3/2}}.$$

Замена переменной интегрирования $y = x^{-1/2}$, $dy = -dx/2x^{3/2}$ приводит к формуле

$$\int_0^{c/T^2} \chi_N(x)dx = \sqrt{\frac{8}{\pi}}\frac{\omega_N}{N+1/4}\int_{\frac{T(N+1/4)}{c^{1/2}}}^{\infty} e^{-y^2}dy = = \frac{\sqrt{2}\omega_N}{N+1/4}\mathrm{Erfc}\left[\frac{T(N+1/4)}{c^{1/2}}\right].$$

Отсюда, используя $\mathrm{Erfc}(x) \le 1$, находим равномерную по параметрам c и T оценку

$$\int_0^{c/T^2} \chi_N(x)dx \le \sqrt{\frac{2}{eN^3}}.$$

Более тонкая оценка, учитывающая величину параметров c и T, получается использованием неравенства $\mathrm{Erfc}(x) < (\sqrt{\pi}x)^{-1}\exp(-x^2)$,

$$\int_0^{c/T^2} \chi_N(x)dx \le \sqrt{\frac{2c}{\pi}}\frac{\omega_N}{T(N+1/4)^2}\times \times\exp\left(-\frac{T^2(N+1/4)^2}{c}\right) < < \sqrt{\frac{2c}{\pi e}}(TN^{5/2})^{-1}\exp(-(TN)^2/c).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ибрагимов И.А., Розанов Ю.А.* Гауссовские случайные процессы. М.: Наука, 1970.
2. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Теория случайных процессов, т. II. — М.: Наука, 1973.
3. *Мазманишвили А.С.* Континуальное интегрирование как метод решения физических задач. Киев: Наукова думка, 1987.
4. *Арато М.* Линейные стохастические системы с постоянными коэффициентами. Статистический подход М.: Наука, 1989.
5. *Simon B.* The $P(\varphi)_2$ euclidian (quantum) field theory. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1974. (пер. на рус яз. *Саймон Б.* Модель $P(\varphi)_2$ евклидовой квантовой теории поля. М.: Мир, 1976).
6. *Kuo H.-H.* Gaussian Measures in Banach Spaces. Springer-Verlag, Berlin, 1975. (пер. на рус яз. *Го Х.-С.* Гауссовские меры в банаховых пространствах. М.: Мир, 1979.)
7. *Боровков А.А.* Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1972.
8. *Вирченко Ю.П., Витохина Н.Н.* О локальной предельной теореме для распределения вероятностей аддитивного квадратичного функционала от траекторий комплекснозначного винеровского процесса. Математические модели в образовании, науке и промышленности. Международная Академия наук высшей школы, Санкт-Петербургское отделение. СПб. 2003, С. 48—50.