УДК 517.9

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИТИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ ПРИ ПРОДОЛЬНОМ ИЗГИБЕ ТЯЖЕЛОГО СТЕРЖНЯ МЕТОДОМ ПОДОБНЫХ ОПЕРАТОРОВ*

© 2004 Н. Б. Ускова

Воронежский государственный технический университет

В работе рассматривается задача определения критической нагрузки при продольном изгибе шарнирно опертого с обоих концов, вертикально расположенного стержня фиксированной длины постоянного сечения при учете его собственного веса методом подобных операторов.

В механике ряд задач приводится к задачам на собственные значения вида $Gx = \lambda Fx$, где $G : D(G) \subset H \to H$, $F : D(F) \subset H \to H$ — заданные дифференциальные операторы, действующие в сепарабельном гильбертовом пространстве H с областями определения $D(G)$ и $D(F)$ соответственно, $x \in D(G) \cap D(F)$ [1]. Одним из методов решения поставленной задачи является метод возмущений [1, гл. VIII, § 24], заключающийся в следующем. Пусть известны собственные значения и собственные векторы некоторой близкой, так называемой невозмущенной, задачи $G_0 x = \lambda F_0 x$, $G_0 : D(G) \subset H \to H$, $F_0 : D(F) \subset H \to H$, $x \in D(G) \cap \cap D(F)$. Тогда рассматриваемая задача представляется в виде $(G_0 + G_1)x = \lambda(F_0 + F_1)x$, $G_1 = G - G_0$, $F_1 = F - F_0$, где возмущения G_1 и F_1 малы в некотором смысле по сравнению с невозмущеными операторами G_0 и F_0. Далее в методе возмущений с использованием разложений искомых собственных значений и собственных функций в ряды по степеням малости возмущения и по собственным векторам невозмущенной задачи ищутся поправки к собственным значениям возмущенной задачи. Поставленную задачу можно также решать методом подобных операторов, что позволяет рассматривать не только случай, когда хотя бы один из операторов G и F обратим, но и случай, когда оба оператора G и F необратимы, что приводит к изучению спектральных свойств возмущенных линейных отношений. Ниже мы покажем такую возможность на модельном примере.

Определение критической нагрузки P при продольном изгибе шарнирно опертого с обоих концов, вертикально расположенного стержня длины l постоянного сечения при учете его собственного веса, приводит к следующей задаче на собственные значения [1, с. 409]

$$\left.\begin{aligned} &y^{IV} - \varepsilon(xy')' = -\lambda y'',\\ &y(0) = y''(0) = y(l) = y''(l) = 0,\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где ε — малая величина, пропорциональная плотности стержня. Если α — жесткость стержня на изгиб. то критическая нагрузка определяется формулой $P = \alpha\lambda_1$, где λ_1 — наименьшее собственное значение задачи (1). В качестве невозмущенной для задачи (1) выступает задача

$$\left.\begin{aligned} &y^{IV} = -\lambda y'',\\ &y(0) = y''(0) = y(l) = y''(l) = 0.\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Ее собственными значениями являются числа $\lambda_n = \pi^2 n^2 / l^2$, а нормированными собственными векторами — функции $e_n = \sqrt{2/l}\,\sin(\pi n/l)x$.

Возмущенная задача представима в виде $(G_0 - G_1)y = -\lambda Fy$, где $G_0 : \mathcal{D}(G_0) \subset H \to H$, $(G_0 y)(x) = y^{IV}(x)$, и область определения $\mathcal{D}(G_0)$ определяется краевыми условиями $y(0) = y''(0) = y(l) = y''(l) = 0$; $F : \mathcal{D}(F_0) \subset H \to H$, $(Fy)(x) = y''(x)$, и $\mathcal{D}(F)$ определяется условиями $y(0) = y(l) = 0$; $G_1 : \mathcal{D}(G_0) \subset H \to H$, $(Gy)(x) = = -\varepsilon(xy'(x))' = -\varepsilon(y'(x) + xy''(x))$. Отметим, что в данном случае $G_0 = F^2$ и применив F^{-1} к

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 01-04-00141.

обеим частям равенства (1) получим обычную задачу на собственные значения

$$\left.\begin{aligned}&-y''(x)-(-\varepsilon(x(F^{-1}(y))')')=\lambda y(x)\\&y(0)=y(l)=0.\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

Далее изложим вкратце метод подобных операторов [2—4] и применим его к оценке наименьшего собственного значения задачи (3).

Пусть $A:\mathcal{D}(A)\subset H\to H$ — некоторый линейный оператор, имеющий область определения $\mathcal{D}(A)$, спектр которого представим в виде $\sigma(A)=\sigma_1\cup\sigma_2$, $\sigma_1\cap\sigma_2=\varnothing$ и σ_1, σ_2 — замкнутые множества, причем σ_1 — компакт. Пусть $P_k=P(\sigma_k,A)$, $k=1,2$ — проекторы Рисса, построенные по спектральным множествам σ_k. Символом $\mathcal{L}_A(H)$ обозначим банахово пространство операторов, подчиненных оператору A, т.е. $B\in\mathcal{L}_A(H)$, если $B:\mathcal{D}(B)\subset H\to H$, $\mathcal{D}(B)\supset\mathcal{D}(A)$, $\|x\|\le c(\|x\|+\|Ax\|)$ $\forall x\in\mathcal{D}(A)$ и $\|B\|_A=\inf c$. Оператор A играет роль невозмущенного оператора, а рассматриваемые далее возмущения этого оператора принадлежат так называемому допустимому пространству возмущений $\mathcal{M}\in\mathcal{L}_A(H)$, обладающему следующими свойствами:

1) $\mathcal{M}$ — банахово пространство со своей нормой, непрерывно вложенные в $\mathcal{L}_A(H)$, т.е. $\|X\|_{\mathcal{M}}\,\mathrm{const}\,\|X\|_A$ $\forall x\in\mathcal{L}_A(H)$;

2) операторы P_iXP_j принадлежат $\mathcal{M}$ для любого $X\in\mathcal{M}$, причем оператор P_1XP_1 допускает расширение до ограниченного оператора из $\mathrm{End}\,H_1$, $H_1=\mathrm{Im}\,P_1$ и операторы $X\mapsto P_iXP_i$ являются ограниченными операторами.

Введем в рассмотрение линейный оператор (трансформатор, по терминологии М.Г. Крейна [5]) J из $\mathrm{End}\,\mathcal{M}$ — оператор блочной диагонализации, определяемый формулой $JX=P_1XP_1+P_2XP_2$, $X\in\mathcal{M}$. Теперь, используя условие $\sigma_1\cap\sigma_2=\varnothing$ можно определить трансформатор $\Gamma:\mathcal{M}\to\mathrm{End}\,H$ с помощью решения операторного уравнения $AY-YA=X-JX$, $X\in\mathcal{M}$, удовлетворяющего условию $JY=0$, положив $X=J$. В частности, при следующих, выполняющихся для изучаемого класса задач условиях: $\sigma_1=\{\lambda_1\}$ и λ_1 — полупростое собственное значение оператора A (т.е. $AP_1=\lambda_1P_1$) трансформатор определяется формулой $X=P_1XS-SXP_1$, где оператор S из $\mathrm{End}\,H$ однозначно задается условиями $SP_1=P_1S=0$, $S(A-\lambda_1I)=(A-\lambda_1I)S=P_2$, то есть сужение S на H_1 есть нулевой оператор, а сужение S на H_2 есть обратный к сужению $A-\lambda_1I$ на H_2. В случае, если λ_1 — простое собственное значение оператора A проектор P_1 задается формулой

$$P_1x=(x,f_1)e_1,\ \text{где}\ Ae_1=\lambda_1e_1,\ A^*f_1=\bar\lambda_1f_1.$$

Введем необходимые обозначения и сформулируем в виде теоремы результаты из [4], с помощью которых мы далее и будем оценивать наименьшее собственное значение задачи (3), соответствующий собственный вектор и погрешность приближения. Пусть $X_{ij}=P_iXP_j$, $i,j=1,2$, $X\in\mathcal{M}$. Символом $\tilde b_{12}$ обозначим норму оператора $X_{21}\mapsto B_{12}SX_{21}$, а символом $\tilde b_{12}$ — норму оператора $X_{21}\mapsto B_{22}SX_{21}$, $s=\|S\|$, $b_{ij}=\|B_{ij}\|$, $b_1=\|P_2Be_1\|$.

Теорема 1 [4]. Пусть возмущение B таково, что выполняется условие

$$\tilde b_{22}+b_{11}s+2(\tilde b_{12}sb_1)^{1/2}<1.\qquad(4)$$

Тогда собственным (ненормированным) вектором возмущенного оператора $A-B$ является вектор

$$\tilde e_1=e_1+SX_{21}e_1,\qquad(5)$$

а соответствующим собственным значением — число

$$\tilde\lambda_1=\lambda_1-(B_{12}SX_{21}e_1,f_1)-(Be_1,f_1),\qquad(6)$$

где $X_{21}e_1$ есть решение векторного уравнения

$$X_{21}e_1=B_{22}SX_{21}e_1-SX_{21}e_1(Be_1,f_1)-$$
$$-(B_{12}SX_{21}e_1,f_1)SX_{21}e_1+B_1$$

и оно может быть найдено методом итераций, начиная с нулевого приближения, равного нулевому вектору. При этом $\tilde\lambda_1^{(1)}=\lambda_1-$ $-(Be_1,f_1)-(B_{12}SB_{21}e_1,f_1)$, $\tilde e_1^{(1)}=e_1+SB_{21}e_1$, причем

$$\left|\tilde\lambda_1^{(1)}-\lambda_1+(Be_1,f_1)\right|\le\tilde b_{12}\frac{2b_1}{1-\tilde b_{22}-b_1s},\ \left\|\tilde e_1-e_1\right\|\le\frac{2sb_1}{1-\tilde b_{12}-b_1s},$$

$$\left|\tilde\lambda_1-\tilde\lambda_1^{(1)}\right|\le\tilde b_{12}\frac{2(\tilde b_{22}b_1+b_{11}sb_1+b_{12}b_1^2s)}{1-\tilde b_{22}-b_{11}s-2\tilde b_{12}b_1s}=\tilde b_{12}\alpha,$$

$$\left\|\tilde e_1-\tilde e_1^{(1)}\right\|\le s\alpha.$$

Вернемся к задаче (3). Для нее $H=L_2[0,l]$, с нормой $\|y\|_2=\left(\int_0^l y^2(x)dx\right)^{1/2}$. В роли невозмущенного оператора A выступает оператор $A=F=-d^2/dx^2$ с областью определения

$\mathcal{D}(A) \subset L_2[0,l]$, задаваемой краевыми условиями $y(0) = y(l) = 0$, возмущение B можно записать в виде $(By)(x) = -\varepsilon(xy(x) + (F^{-1}(y))')$ с областью определения той же, что и у оператора A; $\lambda_n = \pi^2 n^2 / l^2$, $l_n = \sqrt{2/l}\sin(\pi n / l)x$. Очевидно, что $\sigma(A) = \sigma_1 \cup \sigma_2$, где $\sigma_1 = \{\pi^2 / l^2\}$, $\sigma_2 = \sigma(A) \setminus \sigma_1$, $e_1 = \sqrt{2/l}\sin(\pi / l)x$. Оператор A является самосопряженным оператором, поэтому оператор S также самосопряжен, он ограничен по построению и $s = \|S\| = l^2 / 3\pi^2$, $P_1 x = (x, e_1)e_1$, $\|P_1\| = 1$. Оператор-возмущение B в данном случае самосопряженным не является. Так как собственные векторы невозмущенного оператора A образуют базис в пространстве $L_2[0,l]$, то все операторы можно считать заданными своими матрицами в этом базисе. Отметим, что возмущение B в данном случае можно представить в виде суммы $B = B_1 + B_2$, где $(B_1 y)(x) = -\varepsilon x y(x)$, $(B_2 y)(x) = -\varepsilon(F^{-1}(y))'$, причем оператор B_2 из $\mathrm{End}H$ и $\|B_2\|_\infty = l/\pi$, $\|B_2 P_2\|_\infty = l/2\pi$. Символом $\|\cdot\|_\infty$ обозначена здесь и далее норма оператора в пространстве ограниченных операторов. Посчитаем отдельно элементы матрицы операторов B_1 и B_2:

$$b_{nn}^1 = -\frac{2\varepsilon}{l}\int_0^l x \sin\frac{\pi n}{l} x \sin\frac{\pi n}{l} x dx = -\frac{l\varepsilon}{2};$$

$$b_{nm}^1 = -\frac{2\varepsilon}{l}\int_0^l x \sin\frac{\pi n}{l} x \sin\frac{\pi m}{l} x dx =$$

$$= \frac{l\varepsilon}{\pi^2}\left(\frac{(-1)^{m+n} - 1}{(m+n)^2} + \frac{(-1)^{m-n} - 1}{(m-n)^2}\right);$$

$$b_{nn}^2 = \frac{2\varepsilon}{l}\int_0^l \frac{l}{\pi n}\cos\frac{\pi n}{l} x \sin\frac{\pi n}{l} x dx = 0;$$

$$b_{nm}^2 = \frac{2\varepsilon}{l}\int_0^l \frac{l}{\pi m}\cos\frac{\pi m}{l} x \sin\frac{\pi n}{l} x dx =$$

$$= \frac{\varepsilon l}{\pi^2 m}\left(\frac{1 - (-1)^{m+n}}{m+n} + \frac{1 - (-1)^{m-n}}{-m+n}\right).$$

Найдем далее числовые значения величин, используемых в теореме 3, рассматривая, если это удобно, возмущение как сумму двух операторов:

$$(Be_1, e_1) = -\varepsilon l / 2$$

$$\|P_2 B e_{12}\| \le \left\| -\varepsilon\sqrt{\frac{l}{2}} x \sin\frac{\pi}{x} + \varepsilon\sqrt{\frac{2}{l}}\frac{\pi}{l}\cos\frac{\pi}{l} x \right\|_2 \le$$

$$\le \varepsilon l\left(\sqrt{\frac{l}{3}} + \frac{1}{\pi}\right);$$

$$\tilde{b}_{12} = \|B_{12}S\| = \sup_{\|t\|\le 1}\|B_{12}St\|_2 \le$$

$$\le \varepsilon\|(xSt, e_1)e_1\|_2 + \varepsilon\|B_2 S\| \le$$

$$\le \varepsilon\left(\|Sx\|_2 + \frac{l^3}{6\pi^3}\right) =$$

$$= \varepsilon\frac{l^3}{\pi^3}\left(\sqrt{2l}\left(\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2(n^2-1)}\right)^{1/2} + \frac{1}{6}\right);$$

$$\tilde{b}_{22} = \sup_{\|t\|\le 1}\|P_2 BSXP_1 t\|_2 \le \|BS\| \le$$

$$\le \varepsilon\left(\|x\|_2\frac{l^2}{\pi^2}\sqrt{\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)^2}} + \frac{l^3}{6\pi^3}\right) =$$

$$= \frac{\varepsilon l^3}{\pi^2}\left(\sqrt{\frac{l}{3}}\sqrt{\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)^2}} + \frac{1}{6\pi}\right).$$

Тогда, применив теорему 1, получаем следующую теорему.

Теорема 2. Пусть величины l и ε таковы, что выполняется условие

$$\varepsilon\left(\frac{l^3}{\pi^2}\sqrt{\frac{l}{3}}\sqrt{\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)^2}} + \frac{1}{6\pi}\right) + \frac{l^3}{6\pi^2} +$$

$$+2\left[\frac{l^3}{\pi^3}\left(\sqrt{2l}\left(\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2(n^2-1)}\right)^{1/2} + \frac{1}{6}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\frac{l^3}{3\pi^3}\left(\sqrt{\frac{l}{3}} + \frac{1}{\pi}\right)\right]^{1/2} < 1,$$

тогда в качестве наименьшего собственного значения задачи (3) можно взять число $\tilde{\lambda} = \frac{\pi^2}{l^2} + \frac{\varepsilon l}{2}$, при этом

$$\left|\tilde{\lambda}_1 - \left(\frac{\pi^2}{l^2} + \frac{\varepsilon l}{2}\right)\right| \le$$

$$\le \frac{\varepsilon l^3}{\pi^3}\left(\sqrt{2l}\left(\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2(n^2-1)}\right)^{1/2} + \frac{1}{6}\right)\times$$

$$\times\frac{2\varepsilon l\left(\sqrt{\frac{l}{3}} + \frac{1}{\pi}\right)}{1 - \frac{\varepsilon l^3}{\pi^2}\left(\sqrt{\frac{l}{3}}\sqrt{\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)^2}} + \frac{1}{6\pi}\right) - \frac{\varepsilon l^3}{3\pi^2}\left(\sqrt{\frac{l}{3}} + \frac{1}{\pi}\right)};$$

$$\left\|\tilde{e}_1 - \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\pi}{l}x\right\| \le \frac{2l^2}{3\pi^2}\times$$

$$\times \frac{\varepsilon l\left(\sqrt{\frac{l}{3}}+\frac{1}{\pi}\right)}{1-\frac{\varepsilon l^3}{\pi^2}\left(\sqrt{\frac{l}{3}}\sqrt{\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)^2}}+\frac{1}{6\pi}\right)-\frac{\varepsilon l^3}{3\pi^2}\left(\sqrt{\frac{l}{3}}+\frac{1}{\pi}\right)}.$$

Чтобы посчитать первое приближение к собственному значению возмущенной задачи (3) необходимо найти величину $(B_{12}SB_{21}e_1, e_1)$, вычислим ее поэтапно:

$$SB_{21}e_1 = \left(0, \frac{\varepsilon l^3}{\pi^4(n^2-1)}\left(\frac{(-1)^{n+1}-1}{(n+1)^2}+\right.\right.$$
$$+\frac{(-1)^{1-n}-1}{(n-1)^2}+\frac{1-(-1)^{n+1}}{n+1}+$$
$$\left.\left.+\frac{1-(-1)^{1-n}}{n-1}\right)\right)^T, \ n=2,3,\dots$$

$$B_{12}SB_{21}e_1 = \left\{\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\varepsilon^2 l^4}{\pi^6(n^2-1)}\left(\frac{(-1)^{n+1}-1}{(n+1)^2}+\right.\right.$$
$$\left.+\frac{(-1)^{1-n}-1}{(n-1)^2}+\frac{1-(-1)^{n+1}}{n+1}+\frac{1-(-1)^{1-n}}{n-1}\right)\times$$
$$\times\left(\frac{(-1)^{n+1}-1}{(n+1)^2}+\frac{(-1)^{n-1}-1}{(n-1)^2}+\frac{1-(-1)^{n+1}}{n(n+1)}+\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1-(-1)^{n-1}}{n(1-n)}\right),0,0,\dots\right\}^T = \{a,0,0,\dots\}^T,$$

где

$$a = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\varepsilon^2 l^4}{\pi^6(n^2-1)}\left(\frac{(-1)^{n+1}-1}{(n+1)^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{(-1)^{1-n}-1}{(n-1)^2}+\frac{1-(-1)^{n+1}}{n+1}+\frac{1-(-1)^{1-n}}{n-1}\right)\times$$
$$\times\left(\frac{(-1)^{n+1}-1}{(n+1)^2}+\frac{(-1)^{n-1}-1}{(n-1)^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{1-(-1)^{n+1}}{n(n+1)}+\frac{1-(-1)^{n-1}}{n(1-n)}\right).$$

Тогда очевидно, что первым приближением к искомому собственному значению будет число $\tilde{\lambda}_1^{(1)} = \frac{\pi^2}{l^2}+\frac{\varepsilon l}{2}-a$, а первым приближением к $\tilde{e}_1$ — вектор (ненормированный)

$$\tilde{e}_1^{(1)} = \left\{1, \frac{\varepsilon l^2}{\pi^4(n^2-1)}\left(\frac{(-1)^{n+1}-1}{(n+1)^2}+\right.\right.$$
$$+\frac{(-1)^{1-n}-1}{(n-1)^2}+\frac{1-(-1)^{n+1}}{n+1}+$$
$$\left.\left.+\frac{1-(-1)^{1-n}}{n-1}\right)\right\}^T, \ n=2,3,4,\dots.$$

В этом случае также можно выписать погрешность приближения.

Таким образом, задача нахождения наименьшего собственного значения возмущенного оператора (3) решена, а, следовательно, можно определить и критическую нагрузку P по формуле $P=\alpha\lambda_1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Коллатц Л.* Задачи на собственные значения. — М.: Наука, 1968. — 504 с.

2. *Баскаков А.Г.* Гармонический анализ линейных операторов. Учебное пособие. — Воронеж: Изд-во ВГУ, 1987. — 165 с.

3. *Баскаков А.Г.* Теорема о расщеплении и некоторые смежные вопросы аналитической теории возмущений // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1986. — Т. 50. — № 3. — С. 435—458.

4. *Ускова Н.Б.* К оценкам собственных значений и собственных векторов возмущенных операторов // Вестник ВГУ Сер. Физика. Математика. — 2003. — № 1. — С. 182—188.

5. *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Введение в теорию несамосопряженных линейных операторов. — М.: Наука, 1965. — 448 с.