

УДК 537.86:519.23

ОЦЕНКА ВРЕМЕННОГО ПОЛОЖЕНИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ИМПУЛЬСОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РЕЦИРКУЛЯТОРА*

© 2004 А. П. Трифонов, Н. В. Ледовских

Воронежский государственный университет

Предложена структура квазиправдоподобного измерителя временного положения последовательности импульсов на фоне белого шума. Найдены потери в точности квази-правдоподобной оценки по сравнению с точностью оценки максимального правдоподобия для регулярных и разрывных импульсов с учетом пороговых эффектов.

Последовательности различного рода импульсов широко применяются в различных областях радиоэлектроники, в локации, связи и т.д. [1—6] и др. При этом, в большом числе практических задач возникает необходимость оценки временного положения последовательности импульсов. Оптимальный измеритель, реализующий оценку максимального правдоподобия (ОМП) временного положения, содержит согласованный фильтр для одного импульса и идеальный гребенчатый фильтр [2, 3]. Однако аппаратная реализация гребенчатого фильтра при большом числе импульсов в последовательности оказывается затруднительной из-за жестких требований к стабильности параметров линии задержки и высокой точности расположения отводов, обеспечивающей синхронность накопления импульсов. Частично эти трудности могут быть преодолены при использовании рециркулятора, включающего только два звена задержки [2, 3]. Поскольку рециркулятор включает звено положительной обратной связи, для обеспечения устойчивости в звено обратной связи вводится аттенюатор. В результате, получаемая в измерителе с рециркулятором оценка временного положения будет отличаться от ОМП. Такую оценку назовем квазиправдоподобной оценкой (КПО), поскольку она совпадает с ОМП при отсутствии аттенюатора в звене обратной связи, когда передаточные функции гребенчатого фильтра и ре-

циркулятора совпадают [2, 3]. Целесообразность использования рециркулятора для оценки временного положения импульсов определяется возможностью обеспечения точности КПО близкой к точности ОМП. В связи с чем рассмотрим структуру квази-правдоподобного измерителя, использующего рециркулятор, и найдем потери в точности КПО по сравнению с точностью ОМП.

Пусть на фоне гауссовского белого шума $n(t)$ с односторонней спектральной плотностью N_0 наблюдается последовательность из N импульсов, каждый из которых описывается функцией $s(t)$. Такая последовательность может быть записана в виде

$$s_N(t, \lambda_0) = \sum_{k=0}^{N-1} s[t - \lambda_0 - (k - \mu)\theta] = a \sum_{k=0}^{N-1} f\left[\frac{t - \lambda_0 - (k - \mu)\theta}{\tau}\right]. \quad (1)$$

Здесь λ_0 — временное положение последовательности, $a = \max s(t)$ — амплитуда импульса, θ — период повторения,

$\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t) dt / \max s^2(t)$ — эквивалентная длительность импульса, функция $f(\bullet)$ — описывает форму одного импульса и нормирована так, что

$$\max f(x) = 1, \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x) dx = 1. \quad (2)$$

Параметр μ — определяет точку последовательности, с которой связано ее временное положение λ_0 . Так, при $\mu = 0$ величина λ_0

* Приведенные результаты получены при поддержке CRDF и Минобрнауки РФ (проект VZ-010-0).

представляет собой положение первого импульса последовательности, при $\mu = (N - 1) / 2$ — временное положение середины последовательности, а при $\mu = N - 1$ — временное положение последнего импульса. Будем считать, что

$$\lambda_0 \in [\Lambda_1, \Lambda_2], \quad (3)$$

а длину априорного интервала возможных значений временного положения обозначим

$$\Lambda = \Lambda_2 - \Lambda_1. \quad (4)$$

Для получения ОМП времени прихода λ_0 необходимо формировать логарифм функционала отношения правдоподобия (ФОП). Полагаем, что обработке доступна реализация

$$x(t) = s_N(t, \lambda_0) + n(t), 0 < t < T, \quad (5)$$

скважность последовательности (1) не слишком мала ($Q = \theta / \tau \geq 2..3$) так, что отдельные импульсы не перекрываются, а время наблюдения больше длительности последовательности (1), т.е. $T > N\theta$. Тогда логарифм ФОП определяется выражением [1]

$$L(\lambda) = \frac{2}{N_0} \sum_{k=0}^{N-1} \int_0^T x(y) s[y - \lambda - (k - \mu)\theta] dy. \quad (6)$$

Для формирования ОМП $\hat{\lambda}$ периода следования λ_0 последовательности надо найти положение абсолютного (наибольшего) максимума логарифма ФОП (6)

$$\hat{\lambda} = \arg \sup L(\lambda), \lambda \in [\Lambda_1; \Lambda_2]. \quad (7)$$

Устройство для измерения времени прихода последовательности импульсов по методу максимального правдоподобия показано на рис. 1, где обозначено 1 — фильтр, согласованный с одиночным импульсом и обладающий импульсной переходной характеристикой (ИПХ)

$$h_1(t) = cs(t_0 - t), t_0 > \tau, \quad (8)$$

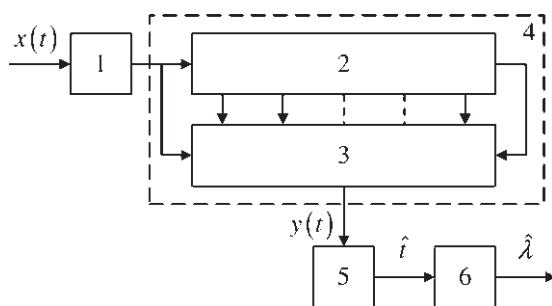


Рис. 1

2 — устройство задержки с $N - 2$ отводами через время θ , 3 — сумматор. Устройство задержки 2 и сумматор 3 образуют гребенчатый фильтр 4, выделенный штриховой линией, который обладает ИПХ

$$h_2(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \delta(t - k\theta). \quad (9)$$

На основе (8) и (9) можем записать ИПХ устройства, содержащего последовательно включенные фильтры 1 и 4 (рис. 1)

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(y) h_2(t - y) dy = c \sum_{k=0}^{N-1} s(t_0 - t + k\theta). \quad (10)$$

Вычисляя свертку реализации наблюдаемых данных (5) и ИПХ (10) для выходного сигнала гребенчатого фильтра 4 (рис. 1) получаем выражение

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(y) h(t - y) dy = c \sum_{k=0}^{N-1} \int_{-\infty}^{\infty} x(y) s(t_0 - t + y + k\theta) dy.$$

Выбирая здесь $c = 2 / N_0$ и

$$t = t_0 + (N - 1 - \mu)\theta + \lambda, \quad (11)$$

приходим к выражению для логарифма ФОП. Согласно (7) и (11), блок 5 на рис. 1 определяет положение \hat{t} абсолютного максимума выходного сигнала фильтра 4 на интервале

$$[T_1; T_2], \quad (12)$$

где $T_1 = t_0 + (N - 1 - \mu)\theta + \Lambda_1$, $T_2 = t_0 + (N - 1 - \mu)\theta + \Lambda_2$. Соответственно, блок 6 вырабатывает ОМП временного положения (7)

$$\hat{\lambda} = \hat{t} - t_0 - (N - 1 - \mu)\theta. \quad (13)$$

Оптимальный измеритель (рис. 1), реализующий оценку максимального правдоподобия $\hat{\lambda}$ времени прихода содержит идеальный гребенчатый фильтр 4. Однако аппаратная реализация гребенчатого фильтра при большом числе импульсов в последовательности оказывается затруднительной из-за жестких требований к стабильности параметров линии задержки и высокой точности расположения отводов, обеспечивающей синхронность накопления импульсов. Частично эти трудности могут быть преодолены за счет замены гребенчатого фильтра модифицированным рециркулятором, содержащим лишь два звена задержки.

Квазиправдоподобное устройство для измерения времени прихода последовательности импульсов представлено на рис. 2, где обозначено 1 — согласованный фильтр с ИПХ (8), 2 — сумматор, 3 — аттенуатор с коэффициентом ослабления $m < 1$, 4 — устройство задержки на время θ , 5 — устройство задержки на время $N\theta$, 6 — аттенуатор с коэффициентом ослабления m_1 , 7 — вычитающее устройство. Блоки 2...7 образуют модифицированный рециркулятор 8, выделенный штриховой линией. Устройство 9 определяет положение \tilde{t} абсолютного максимума выходного сигнала рециркулятора на интервале (12), устройство 10 — формирует квазиправдоподобную оценку временного положения $\tilde{\lambda}$ аналогично (13). Передаточная функция модифицированного рециркулятора [2, 3]

$$\begin{aligned} \tilde{H}_2(\omega) &= \frac{1 - m_1 \exp(-j\omega N\theta)}{1 - m \exp(-j\omega\theta)} = \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} m^k \exp(-j\omega\theta k) + (m^N - m_1) \times \\ &\quad \times \sum_{k=0}^{\infty} m^k \exp[-j\omega\theta(k + N)], \end{aligned}$$

а его ИПХ

$$\begin{aligned} \tilde{h}_2(t) &= \sum_{k=0}^{N-1} m^k \delta(t - k\theta) + (m^N - m_1) \times \\ &\quad \times \sum_{k=0}^{\infty} m^k \delta(t - k\theta - N\theta). \end{aligned}$$

Полагая здесь $m_1 = m^N$, получаем ИПХ модифицированного рециркулятора

$$\tilde{h}_2(t) = \sum_{k=0}^{N-1} m^k \delta(t - k\theta). \quad (14)$$

Тогда, на основе (8) и (14) можем записать ИПХ устройства, содержащего последовательно включенные фильтр 1 и модифицированный рециркулятор 8 (рис. 2)

$$\begin{aligned} \tilde{h}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h_1(y) \tilde{h}_2(t - y) dy = \\ &= c \sum_{k=0}^{N-1} m^k s(t_0 - t - k\theta). \end{aligned} \quad (15)$$

Вычисляя свертку реализации наблюдаемых данных (5) и ИПХ (15), для выходного сигнала устройства получаем выражение

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(y) \tilde{h}(t - y) dy = \\ &= c \sum_{k=0}^{N-1} m^k \int_{-\infty}^{\infty} x(y) s(y + t_0 - t + k\theta) dy. \end{aligned} \quad (16)$$

Выбирая в (16) $c = 2/N_0$, $t = t_0 + (N-1)\theta + \lambda - \mu\theta$, находим, что устройство рис. 2 вырабатывает значение функции

$$\begin{aligned} \tilde{L}(\lambda) &= \\ &= \frac{2}{N_0} \sum_{k=0}^{N-1} m^k \int_{-\infty}^{\infty} x(y) s[y - (N-1)\theta - \lambda + k\theta + \mu\theta] dy = \\ &= \frac{2}{N_0} \sum_{k=0}^{N-1} m^{N-1-k} \int_{-\infty}^{\infty} x(y) s[y - \lambda - (k - \mu)\theta] dy. \end{aligned} \quad (17)$$

которую при m близких к единице можно рассматривать как аппроксимацию логарифма ФОП (6). Соответственно КПО периода следования

$$\tilde{\lambda} = \arg \sup \tilde{L}(\lambda), \lambda \in [\Lambda_1; \Lambda_2], \quad (18)$$

является при m близких к единице аппроксимацией ОМП (7).

Для определения характеристик оценки (18) подставим в (17) реализацию наблюдае-

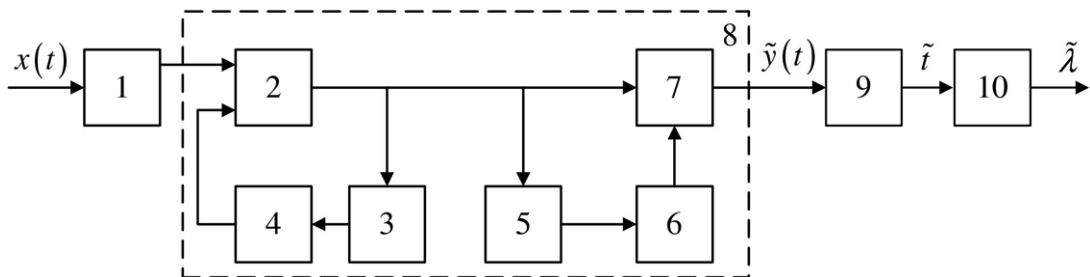


Рис. 2

мых данных (5) и перепишем (17) в виде суммы сигнальной и шумовой функций: $\tilde{L}(\lambda) = S(\lambda) + N(\lambda)$, где

$$S(\lambda) = \frac{2}{N_0} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} m^{N-1-k} \int_{-\infty}^{\infty} s[y - \lambda_0 - (k - \mu)\theta]s[y - \lambda - (n - \mu)\theta]dy =$$

$$= z^2 S_f \left(\frac{\lambda - \lambda_0}{\tau} \right) \sum_{k=0}^{N-1} m^{N-1-k} =$$

$$= z^2 \frac{1 - m^N}{1 - m} S_f \left(\frac{\lambda - \lambda_0}{\tau} \right) = m_S S_f \left(\frac{\lambda - \lambda_0}{\tau} \right), \quad (19)$$

$$N(\lambda) =$$

$$= \frac{2}{N_0} \sum_{k=0}^{N-1} m^{N-1-k} \int_{-\infty}^{\infty} n(y)s[y - \lambda - k\theta + \mu\theta]dy, \quad (20)$$

$m_S = z^2(1 - m^N)/(1 - m)$, $z^2 = 2a^2\tau / N_0$ — отношение сигнал-шум (ОСШ) для одного импульса последовательности (1). Функция

$$S_f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)f(y - x)dy \quad (21)$$

представляет собой нормированную сигнальную функцию (функцию неопределенности) [1] при оценке положения функции $f(\bullet)$ (2). Шумовая функция является реализацией централизованного гауссовского случайного процесса и обладает корреляционной функцией

$$B(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{2}{N_0} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} m^{2(N-1)-n-k} \int_{-\infty}^{\infty} s[y - \lambda_1 - n\theta + \mu\theta]s[y - \lambda_2 - k\theta + \mu\theta]dy =$$

$$= z^2 S_f \left(\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\tau} \right) \sum_{k=0}^{N-1} m^{2(N-1-k)} =$$

$$= z^2 \frac{1 - m^{2N}}{1 - m^2} S_f \left(\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\tau} \right) = \tilde{\sigma}_N^2 S_f \left(\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\tau} \right), \quad (22)$$

где $\tilde{\sigma}_N^2 = z^2(1 - m^{2N})/(1 - m^2)$ — дисперсия помеховой составляющей.

При выводе выражений (19), (21) предполагалось, что $\Lambda < \theta$ (4), поэтому (19), (22) описывают соответственно центральные пики сигнальной составляющей и корреляционной функции помеховой составляющей аппроксимации логарифма ФОП (17).

Обозначим Δ_S — длительность сигнальной функции (19), так что $S(\lambda_0 \pm \Delta_S) \approx 0$. Пусть оценка (18) является надежной, так что

$$|\tilde{\lambda} - \lambda_0| < \Delta_S \quad (23)$$

и ОСШ

$$\tilde{z}_N^2 = \frac{m_S^2}{\tilde{\sigma}_N^2} = z^2 \frac{(1 + m)(1 - m^N)}{(1 + m^N)(1 - m)} \quad (24)$$

на выходе модифицированного рециркулятора 8 (рис. 2) достаточно велико.

Положим, что функция $f(\bullet)$, описывающая форму одного импульса дифференцируема, так что сигнал (1) является регулярным. Тогда, при достаточно большом ОСШ, дисперсию КПО можно найти методом малого параметра [1], в качестве которого используем величину $\varepsilon = \tilde{z}_N^{-1}$

$$D_{01}(\tilde{\lambda}) = \left\{ \frac{\partial^2 B(\lambda_1, \lambda_2)}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} \bigg/ \left[\frac{d^2 S(\lambda)}{d\lambda^2} \right]_{\lambda_0}^2 \right\} \quad (25)$$

Подставляя (19), (22) в (25) и выполняя дифференцирование, получаем

$$D_{01}(\tilde{\lambda}) = \frac{\tau^2}{z^2 d^2} \frac{(1 - m)(1 + m^N)}{(1 + m)(1 - m^N)} = \frac{\tau^2}{\tilde{z}_N^2 d^2}, \quad (26)$$

где

$$d^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [df(x) / dx]^2 dx. \quad (27)$$

Полагая $m \rightarrow 1$, из (26) находим выражение для дисперсии ОМП (7), совпадающее с найденным в [5]

$$D_{01}(\hat{\lambda}) = \tau^2 / z_N^2 d^2, \quad (28)$$

где $z_N^2 = Nz^2$ — выходное ОСШ для максимально правдоподобного измерителя рис. 1.

Потери в точности КПО периода следования регулярных импульсов по сравнению с точностью ОМП можно охарактеризовать отношением дисперсий (26) и (28)

$$\chi_{01} = \frac{D_{01}(\tilde{\lambda})}{D_{01}(\hat{\lambda})} = N \frac{(1 - m)(1 + m^N)}{(1 + m)(1 - m^N)}. \quad (29)$$

Переписывая (29) в виде

$$\chi_{01} = N \sum_{k=0}^{N-1} m^{2k} \bigg/ \left(\sum_{k=0}^{N-1} m^k \right)^2$$

и используя неравенство Буняковского—Шварца, убеждаемся, что всегда $\chi_{01} \geq 1$, причём равенство достигается только при $m = 1$.

Если m не слишком близко к единице и число импульсов N последовательности (1) велико, так что

$$m^N \ll 1, \quad (30)$$

то выражения (28), (31) несколько упрощаются и записываются как

$$D_{01}(\tilde{\lambda}) \approx \tau^2(1-m)/z^2d^2(1+m), \quad (31)$$

$$\chi_{01} \approx N(1-m)/(1+m). \quad (32)$$

Из сопоставления (28) и (31) следует, что надежная дисперсия ОМП с ростом N убывает как N^{-1} , а дисперсия КПО при $N \gg 1$ не зависит от числа импульсов в последовательности (1).

На рис. 3 сплошными линиями показана зависимость проигрыша (29) от коэффициента ослабления m при различном числе импульсов в последовательности $N = 10$ (кривая 1), $N = 20$ — 2, $N = 50$ — 3. Как следует из рис. 3, проигрыш в точности КПО по сравнению с точностью ОМП убывает по мере приближения коэффициента m ослабления аттенуатора 3 на рис. 2 к единице и увеличивается с ростом числа N импульсов последовательности (1).

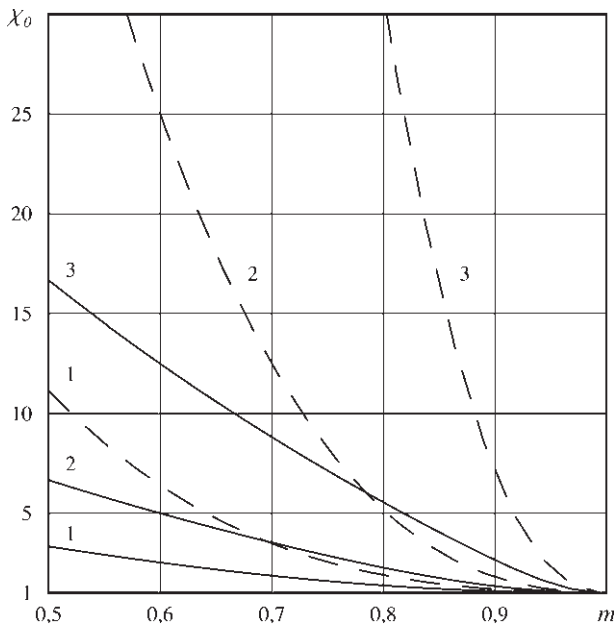


Рис. 3

Найдем далее рассеяние КПО времени прихода последовательности регулярных импульсов с учетом аномальных ошибок [1]. Появление аномальных ошибок возможно при большом априорном интервале возможных значений временного положения (3), (4), т.е. когда

$$\Lambda \gg \Delta_s \quad (33)$$

и ОСШ \tilde{z}_N (24) не очень велико. Вероятность надежной оценки (отсутствия аномальных ошибок) определяется как вероятность выполнения неравенства (23). В силу определения КПО (18), вероятность надежной оценки \tilde{P}_{01} можно найти как вероятность выполнения неравенства

$$H_{SN} > H_N, \quad (34)$$

где H_{SN} — величина абсолютного максимума аппроксимации нормированного логарифма ФОП $\tilde{M}(\lambda) = \tilde{L}(\lambda) / \tilde{\sigma}_N$ в сигнальной области, т.е. при $\lambda_0 - \Delta_s < \lambda < \lambda_0 + \Delta_s$, а H_N — величина абсолютного максимума $\tilde{M}(\lambda)$ в помеховой области, т.е. на интервале $\Lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_0 - \Delta_s$, $\lambda_0 + \Delta_s \leq \lambda \leq \Lambda_2$. Таким образом, вероятность выполнения неравенства (34) есть вероятность того, что абсолютный максимум $\tilde{M}(\lambda)$ в окрестности истинного значения λ_0 больше, чем любой из выбросов в помеховой области.

При выполнении (33) можно считать величины H_{SN} и H_N статистически независимыми и вероятность надежной оценки записать в виде [1]

$$\tilde{P}_{01} = P(H_{SN} > H_N) = \int_{-\infty}^{\infty} W_{SN}(H) P_N(H) dH, \quad (35)$$

где $W_{SN}(H)$ — плотность вероятности величины H_{SN} , $P_N(H)$ — функция распределения величины H_N .

Так как нормированная аппроксимация логарифма ФОП имеет гауссовское распределение, то плотность вероятности максимума аппроксимации логарифма ФОП в сигнальной области при достаточно больших ОСШ будет иметь вид [1]

$$W_{SN}(H) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(H - \tilde{z}_N)^2}{2}\right]. \quad (36)$$

Распределение величины абсолютного максимума $\tilde{M}(\lambda)$ в помеховой области аппроксимируется распределением вида [1]

$$P_N(H) = \begin{cases} \exp\left[-\frac{\nu d}{2\pi} \exp(-H^2/2)\right], & H > 0 \\ 0, & H < 0 \end{cases}, \quad (37)$$

где $\nu = \Lambda / \tau$ — число импульсов с эквивалентной длительностью τ , которые можно разместить в априорном интервале возможных значений временного положения Λ .

Точность аппроксимации (37) растет с увеличением ν и H .

Подставляя (36) и (37) в (35), получаем выражение для вероятности надежной КПО

$$\tilde{P}_{01} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \exp \left[-\frac{\nu d}{2\pi} \exp \left(-\frac{H^2}{2} \right) - \frac{(H - \tilde{z}_N)^2}{2} \right] dH.$$

Если истинное значение временного положения λ_0 распределено равномерно в априорном интервале возможных значений (3), то можем записать выражение для безусловного рассеяния (среднего значения квадрата ошибки) КПО как [1]

$$\begin{aligned} V_1(\tilde{\lambda}) &= \langle (\tilde{\lambda} - \lambda_0)^2 \rangle = \\ &= \tilde{P}_{01} D_{01}(\tilde{\lambda}) + (1 - \tilde{P}_{01}) \Lambda^2 / 6. \end{aligned} \quad (38)$$

Здесь усреднение выполняется по всевозможным значениям случайных величин $\tilde{\lambda}$ и λ_0 . Полагая в (38) $m \rightarrow 1$ получаем выражение для рассеяния ОМП с учетом аномальных ошибок

$$\begin{aligned} V_1(\hat{\lambda}) &= \langle (\hat{\lambda} - \lambda_0)^2 \rangle = \\ &= P_{01} D_{01}(\hat{\lambda}) + (1 - P_{01}) \Lambda^2 / 6. \end{aligned} \quad (39)$$

Здесь усреднение выполняется по всевозможным значениям случайных величин $\hat{\lambda}$ и λ_0 , $D_{01}(\hat{\lambda})$ определяется из (28), а вероятность надежной оценки имеет вид

$$P_{01} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \exp \left[-\frac{\nu d}{2\pi} \exp \left(-\frac{H^2}{2} \right) - \frac{(H - z_N)^2}{2} \right] dH.$$

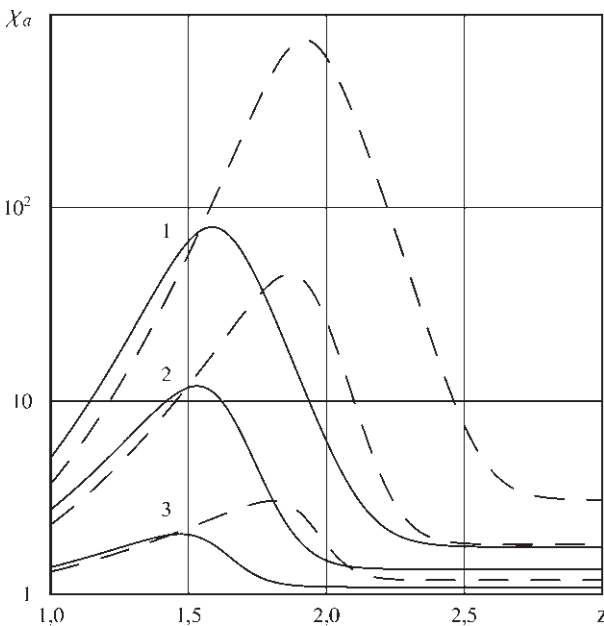


Рис. 4

Проигрыш в точности КПО по сравнению с точностью ОМП с учетом аномальных ошибок определяется отношением рассеяний (38) и (39)

$$\chi_{a1} = V_1(\tilde{\lambda}) / V_1(\hat{\lambda}). \quad (40)$$

В качестве примера рассмотрим случай, когда сигнал имеет колокольную форму и описывается функцией

$$f(x) = \exp(-\pi x^2 / 2). \quad (41)$$

Из (38), (39) следует, что для расчета рассеяний оценок необходимо определить значение d . Подставляя (41) в (27), получаем

$$d = (\pi / 2)^{1/2}. \quad (42)$$

Подставляя затем (42) в (38) и (39) находим проигрыш (40) в точности КПО по сравнению с точностью ОМП с учетом аномальных ошибок при оценке временного положения последовательности колокольных импульсов (41).

На рис. 4—6 сплошными кривыми представлена зависимость проигрыша в точности оценки от ОСШ z для одного импульса колокольной формы (41) последовательности (1).

Кривые рис. 4 рассчитаны для числа импульсов $N=20$ и значения параметра $\nu=100$. Кривая 1 соответствует значению коэффициента ослабления аттенюатора 3 на рис. 3 $m=0.85$, кривая 2 — $m=0.9$, кривая 3 — $m=0.95$. Как следует из рис. 4 проигрыш в точности оценки в пороговой области

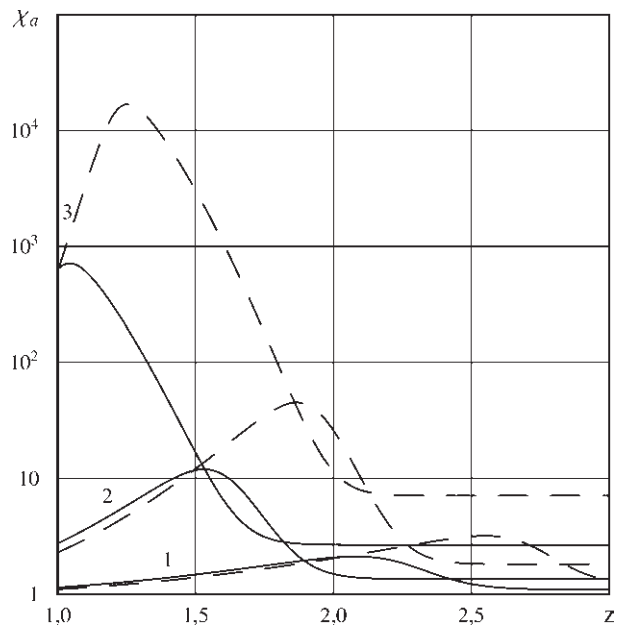


Рис. 5

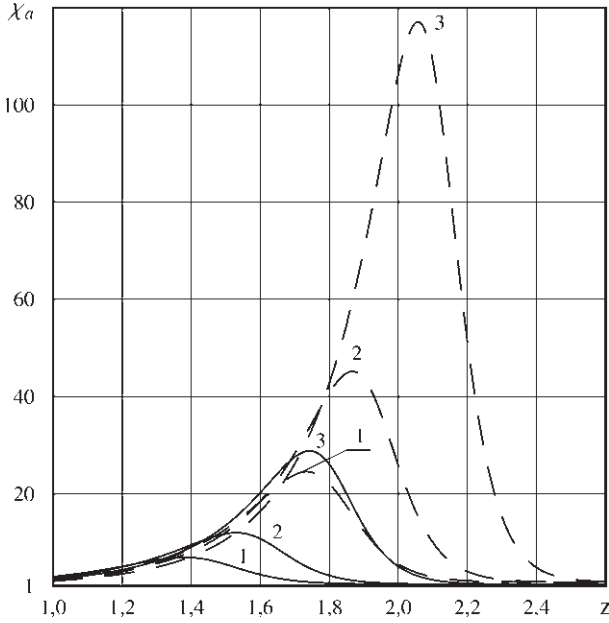


Рис. 6

значений ОСШ z может быть значительным. С ростом ОСШ z проигрыш (40), рассчитанный с учетом аномальных ошибок стремится к величине (29) — проигрышу в точности надежных оценок. Проигрыш в точности $\chi_{a1}(z)$ быстро убывает с ростом коэффициента ослабления аттенюатора m .

Кривые рис. 5 рассчитаны для значения коэффициента ослабления аттенюатора $m = 0.9$ и значения параметра $\nu = 100$. Кривая 1 соответствует числу импульсов в последовательности $N = 10$, кривая 2 — $N = 20$, кривая 3 — $N = 50$. Как следует из рис. 5, проигрыш в точности оценки возрастает с увеличением числа N импульсов последовательности (1). Однако, с ростом N уменьшается минимальное значение ОСШ z при котором прекращается влияние аномальных ошибок и пороговые эффекты исчезают. Так, при $N = 10$, аномальными ошибками можно пренебречь если $z \geq 2.5$; при $N = 20$ — если $z \geq 2.0$, и при $N = 50$ — если $z \geq 1.7$.

Кривые рис. 6 рассчитаны для значения коэффициента ослабления аттенюатора $m = 0.9$ и числа импульсов в последовательности $N = 20$. Кривая 1 соответствует значению параметра $\nu = 50$, кривая 2 — $\nu = 100$ и кривая 3 — $\nu = 200$. Как следует из рис. 6, увеличение числа ν элементов разрешения по времени в априорном интервале возможных значений временного положения приводит к увеличению проигрыша в точности

оценки и к увеличению минимального ОСШ z при котором можно пренебречь аномальными ошибками.

Таким образом, влияние аномальных ошибок приводит к проигрышу (40) в точности оценки, заметно большему, чем проигрыш (29) в точности надежной оценки. Проигрыш растет с уменьшением коэффициента ослабления аттенюатора m и с увеличением числа импульсов N и параметра ν .

Используемые в различных приложениях импульсы часто имеют весьма короткие фронты, что позволяет успешно аппроксимировать их разрывными функциями времени [4, 6]. Если функция $f(\cdot)$, описывающая форму одного импульса, является разрывной, то у сигнальной (19) и корреляционной (22) функций выходного сигнала квазиравдоподобного измерителя не существует вторых производных при $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$. Поэтому для разрывных моделей импульсов формула (25), определяющая дисперсию КПО, неприменима. Найти дисперсию КПО периода следования разрывных импульсов можно, используя метод локально-марковской аппроксимации [4, 6].

Если форма импульса последовательности (1) аппроксимируется разрывными функциями времени, то при $|x| \rightarrow 0$ для функции (21) справедливо асимптотическое представление [4]

$$S_f(x) = 1 - \delta|x| + o(|x|),$$

$$\delta = \lim_{x \rightarrow 0_+} \{[1 - S_f(x)]/x\} > 0. \tag{43}$$

При больших ОСШ характеристики надежной КПО определяются поведением сигнальной (19) и корреляционной (22) функций выходного сигнала квазиравдоподобного измерителя в малой окрестности истинного значения оцениваемого параметра λ_0 [1]. Обозначим $\Delta = \max\{|\lambda - \lambda_0|, |\lambda_1 - \lambda_2|\}$. Устремляя $\Delta \rightarrow 0$ и учитывая (43) получаем, что в малой окрестности λ_0 для функций (19), (22) справедливы асимптотические разложения

$$S(\lambda) = A_S - B_S |\lambda - \lambda_0| + o(\Delta), \tag{44}$$

$$B(\lambda_1, \lambda_2) = A_N - B_N |\lambda_1 - \lambda_2| + o(\Delta), \tag{45}$$

где

$$A_S = m_s, \quad B_S = m_s \delta / \tau,$$

$$A_N = \tilde{\sigma}_N^2, \quad B_N = \tilde{\sigma}_N^2 \delta / \tau. \tag{46}$$

Используя асимптотические разложения (44), (45) находим выражение для дисперсии КПО периода следования разрывных импульсов методом локально-марковской аппроксимации [4]

$$D_{02}(\tilde{\lambda}) = 13B_N^2 / 2B_S^4. \quad (47)$$

Поставляя (46) в (47), получаем дисперсию КПО

$$D_{02}(\tilde{\lambda}) = 13\tau^2 / 2z_N^4 \delta^2. \quad (48)$$

Полагая $m \rightarrow 1$, из (48) имеем выражение для дисперсии ОМП (7), совпадающее с найденным в [6]

$$D_{02}(\hat{\lambda}) = 13\tau^2 / 2z_N^4 \delta^2. \quad (49)$$

Потери в точности КПО периода следования разрывных импульсов по сравнению с точностью ОМП можно охарактеризовать отношением дисперсий (48) и (49)

$$\chi_{02} = \frac{D_{02}(\tilde{\lambda})}{D_{02}(\hat{\lambda})} = \left[N \frac{(1-m)(1+m^N)}{(1+m)(1-m^N)} \right]^2 = \chi_{01}^2. \quad (50)$$

где χ_{01} определяется из (29).

Из (50) и (29) следует, что всегда $\chi_{02} \geq 1$, причем равенство достигается только при $m = 1$. Если m не слишком близко к единице и число импульсов N последовательности (1) велико, так что выполняется (30), то выражения (48), (50) упрощаются и записываются как

$$D_{02}(\tilde{\lambda}) \approx 13\delta^2(1-m)^2 / 2z^4(1+m)^2, \quad (51)$$

$$\chi_{02} \approx N^2(1-m)^2 / (1+m)^2. \quad (52)$$

Из сопоставления (49) и (51) следует, что надежная дисперсия ОМП с ростом N убывает как N^{-2} , а дисперсия КПО при $N \gg 1$ не зависит от числа импульсов в последовательности (1). Таким образом, если надежная дисперсия ОМП временного положения регулярных импульсов (28) с ростом N убывает как N^{-1} , а дисперсия ОМП временного положения разрывных импульсов (49) убывает как N^{-2} , то дисперсии КПО как для регулярных (31), так и для разрывных (51) импульсов при $N \gg 1$ не зависят от числа импульсов в последовательности (1).

На рис. 3 штриховыми линиями показана зависимость проигрыша (50) от коэффициента ослабления m при различном количестве импульсов в последовательности

$N = 10$ — кривая 1, $N = 20$ — 2, $N = 50$ — 3. Из рис. 3 следует, что при увеличении количества импульсов проигрыш в точности КПО по сравнению с точностью ОМП возрастает, а с увеличением коэффициента ослабления m проигрыш стремится к единице.

Из сопоставления сплошных и штриховых кривых на рис. 3 следует, что относительный проигрыш в точности КПО по сравнению с точностью ОМП для разрывных импульсов существенно выше, чем для регулярных. Для больших N этот вывод подтверждается приближенными выражениями (32) и (52). Действительно, согласно (32) и (52), отношение $\chi_{02} / \chi_{01} = N(1-m)/(1+m)$ и растет с увеличением N .

Найдем рассеяние КПО времени прихода последовательности разрывных импульсов с учетом аномальных ошибок. Для этого вычислим вероятность надежной оценки (35), используя распределения максимумов нормированной аппроксимации логарифма ФОП, найденные в [4].

$$P_N(H) = \begin{cases} \exp\left[-\frac{v\delta H}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{H^2}{2}\right)\right], & H \geq 1 \\ 0, & H < 1 \end{cases}, \quad (53)$$

$$W_{SN}(H) = 2\tilde{z}_N \exp\left(\frac{3\tilde{z}_N^2}{2}\right) \left[\exp(-\tilde{z}_N H) \Phi(H - 2\tilde{z}_N) - \exp\left(\frac{5\tilde{z}_N^2}{2} - 2\tilde{z}_N H\right) \Phi(H - 3\tilde{z}_N) \right]. \quad (54)$$

Подставляя (53) и (54) в (35), получаем для вероятности надежной КПО временного положения последовательности разрывных импульсов выражение

$$\tilde{P}_{02} = 2\tilde{z}_N \exp\left(\frac{3\tilde{z}_N^2}{2}\right) \int_1^\infty \exp\left[-\frac{v\delta H}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{H^2}{2}\right)\right] \times \\ \times \left[\exp(-\tilde{z}_N H) \Phi(H - 2\tilde{z}_N) - \exp\left(\frac{5\tilde{z}_N^2}{2} - 2\tilde{z}_N H\right) \Phi(H - 3\tilde{z}_N) \right] dH.$$

Тогда рассеяние КПО аналогично (38) можно записать в виде

$$V_2(\tilde{\lambda}) = \tilde{P}_{02} D_{02}(\tilde{\lambda}) + (1 - \tilde{P}_{02}) \Lambda^2 / 6. \quad (55)$$

Полагая в (55) $m \rightarrow 1$, имеем выражение для рассеяния ОМП

$$V_2(\hat{\lambda}) = P_{02} D_{02}(\hat{\lambda}) + (1 - P_{02}) \Lambda^2 / 6, \quad (56)$$

где $D_{02}(\hat{\lambda})$ определяется из (49), а вероятность надежной ОМП имеет вид

$$P_{02} = 2z_N \exp\left(\frac{3z_N^2}{2}\right) \int_1^\infty \exp\left[-\frac{v\delta H}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{H^2}{2}\right)\right] \times \\ \times [\exp(-z_N H) \Phi(H - 2z_N) - \\ - \exp\left(\frac{5z_N^2}{2} - 2z_N H\right) \Phi(H - 3z_N)] dH.$$

В качестве примера рассмотрим случай, когда сигнал имеет прямоугольную форму

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1/2; \\ 0, & |x| > 1/2; \end{cases} \quad (57)$$

Подставляя (57) в (21), а (21) в (43), получаем значение $\delta = 1$. Найдем проигрыш в точности КПО по сравнению с точностью ОМП с учетом аномальных ошибок при оценке временного положения последовательности прямоугольных импульсов. Этот проигрыш будем характеризовать отношением рассеяний оценок (55) и (56)

$$\chi_{a2} = V_2(\tilde{\lambda}) / V_2(\hat{\lambda}). \quad (58)$$

На рис. 4—6 штриховыми кривыми представлена зависимость проигрыша (58) от ОСШ z для одного импульса прямоугольной формы (57) последовательности (1). Штриховые кривые на рис. 4—6 рассчита-

ны для значений параметров m , v , N которые использовались при расчете соответствующих сплошных кривых. Из сопоставления сплошных и штриховых кривых на рис. 4—6 следует, что относительный проигрыш в точности КПО по сравнению с точностью ОМП для последовательности разрывных импульсов заметно выше, чем для последовательности регулярных. Наиболее существенно относительный проигрыш для разрывных импульсов превышает проигрыш для регулярных импульсов в пороговой области значений ОСШ z , где заметную роль играют аномальные ошибки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Куликов Е.И., Трифонов А.П. Оценка параметров сигналов на фоне помех. — М.: Сов. радио, 1978. — 296 с.
2. Сосулин Ю.Г. Теоретические основы радиолокации и навигации — М.: Радио и связь, 1992. — 304 с.
3. Лезин Ю.С. Оптимальные фильтры и накопители импульсных сигналов. — М.: Сов. радио, 1969. — 448 с.
4. Трифонов А.П., Шинаков Ю.С. Совместное различение сигналов и оценка их параметров. — М.: Радио и связь, 1986. — 264 с.
5. Трифонов А.П., Беспалова М.Б. Эффективность совместной оценки временного положения и периода следования импульсов при наличии неинформативных параметров // Радиотехника и электроника, 1992. — Т. 37. — № 6. — С. 1014—1023.
6. Трифонов А.П., Беспалова М.Б. Характеристики оценок временного положения и периода следования разрывных импульсов при наличии неинформативных параметров // Радиотехника и электроника, 1996. — № 10. — С. 1215—1221.