ВЕСТНИК ВГУ, Серия: Физика, математика, 2004, № 2

УДК 517.9

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ФАЗОВЫМ ОГРАНИЧЕНИЕМ

© 2004 Б. Н. Садовский, Е. В. Шепилова

Воронежский государственный университет

Рассматривается скалярное нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка $y'' + f(y) = 0$ при наличии фазового ограничения $y \in [b,c]$, $b < 0$, $c > 0$. Предполагается выполнение следующих условий: 1. $f(y)$ удовлетворяет условию Липшица на $[b,c]$; 2. $yf(y) > 0$ при $y \neq 0$.

Изучено влияние ограничений на общий характер поведения решений. Во-первых, все (определенные на $\mathbf{R}$ решения данной задачи оказываются периодическими — без дополнительного условия на f. Во-вторых задача с краевыми условиями $y(0) = 0$, $y(a) = 0$ имеет бесконечно много решений, причем решений с достаточно большим уровнем энергии — счетное множество.

ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается поведение решений скалярного нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$y'' + f(y) = 0 \tag{1}$$

при наличии фазового ограничения

$$y \in [b,c],\ \ b < 0,\ \ c > 0. \tag{2}$$

Предполагается выполнение следующих условий на функцию f:

$$f(y) \text{ удовлетворяет условию Липшица на } [b,c]; \tag{3}$$

$$yf(y) > 0 \ \text{ при } \ y \neq 0. \tag{4}$$

При этом решения могут иметь скачок первой производной в точках выхода на границы отрезка $[b,c]$ — так, как это происходит при отскоке абсолютно упругого шарика от твердой стенки. Уравнение (1) без ограничения (2) хорошо изучено ([1—3]). Похожая задача с ограничением рассматривалась в [4].

В данной работе изучается влияние ограничения (2) на характер поведения решений. Во-первых, все (определенные на $\mathbf{R}$) решения данной задачи оказываются периодическими — без дополнительного условия на f. Во-вторых задача (1), (2) с краевыми условиями

$$y(0) = 0,\ \ y(a) = 0 \tag{5}$$

имеет бесконечно много решений, причем решений с достаточно большим уровнем энергии — счетное множество.

Заметим, что данная задача может не иметь решения в классическом смысле из-за ограничения, поэтому вводится понятие решения, основанное на механических соображениях.

Функцию $y = \varphi(t)$ будем называть *решением задачи* (1), (2), если выполнены следующие условия:

$$\varphi(t) \text{ непрерывна на промежутке } D(\varphi) \subset \mathbf{R}; \tag{6}$$

$$\forall (t : t \in D(\varphi))[\varphi(t) \in (b,c) \to \ddot{\varphi}(t) + f(\varphi(t)) = 0]; \tag{7}$$

$$\begin{gathered} \forall (t : t \in \operatorname{int}(D(\varphi)))[(\varphi(t) = b \vee \varphi(t) = c) \to \\ \to (\dot{\varphi}_+(t) = -\dot{\varphi}_-(t) \wedge \ddot{\varphi}_+(t) + f(\varphi(t)) = 0)]. \end{gathered} \tag{8}$$

Отметим, что при отсутствии условия (4) на функцию f последнее требование в определении решения должно иметь вид

$$\ddot{\varphi}_+(t) + \min(0, f(\varphi(t))) = 0 \text{ при } \varphi(t) = b \text{ и}$$

$$\ddot{\varphi}_+(t) + \max(0, -f(\varphi(t))) = 0 \text{ при } \varphi(t) = c.$$

УТВЕРЖДЕНИЯ О СТРУКТУРЕ МНОЖЕСТВА РЕШЕНИЙ

Утверждение 1. *Рассматривается уравнение (1) с ограничением (2) при наличии начальных условий*

$$y(t_0) = y_0, \tag{9}$$

$$y'_+(t_0) = y_1, \tag{10}$$

причем

$$\begin{gathered} y_0 \in [b,c] \text{ и } (y_1 \le 0, \text{ если } y_0 = c, \\ y_1 \ge 0, \text{ если } y_0 = b). \end{gathered} \tag{11}$$

Утверждается, что данная задача Коши имеет решение на $\mathbf{R}$, *которое единственно на любом промежутке, содержащем точку* t_0.

Доказательство основано на применении классической теоремы Коши—Пикара на любом промежутке между выходами решения на границы отрезка $[b,c]$ и использовании условий (7), (8) для однозначного продолжения решения на следующий промежуток вправо или влево.

Для решения задачи (1), (2), (9), (10), (11) введем обозначение $\varphi_{y_0,y_1}(t)$.

Утверждение 2. *Пусть* φ *— решение задачи* (1), (2). *Тогда функция* $\psi(t)=\varphi(k-t)$, *где* k *— произвольная постоянная, — также является решением.*

Доказательство заключается в непосредственной проверке с помощью определения решения.

Утверждение 3. *Решение* φ_{y_0,y_1} *симметрично относительно любой своей точки локального экстремума* t_0 *в следующем смысле*:

$$\varphi_{y_0,y_1}(t_0+t)=\varphi_{y_0,y_1}(t_0-t),\ (t\in\mathbf{R}).$$

Доказательство

Наряду с функцией φ_{y_0,y_1}, рассмотрим функцию $\psi(t)=\varphi_{y_0,y_1}(2t_0-t)$, которая в силу утверждения 2 является решением задачи (1), (2).

Заметим, что $\psi(t_0)=\varphi_{y_0,y_1}(t_0)$ и $\psi'_+(t_0)=-(\varphi_{y_0,y_1})'_-(t_0)$. Поскольку t_0 есть точка локального экстремума, также справедливо равенство $(\varphi_{y_0,y_1})'_+(t_0)=-(\varphi_{y_0,y_1})'_-(t_0)$. Отсюда в силу единственности решения задачи Коши (утверждение 1), вытекает, что решения $\psi(t)$ и $\varphi_{y_0,y_1}(t)$ совпадают. Следовательно,

$$\varphi_{y_0,y_1}(t_0+t)=\psi(t_0+t)=$$
$$=\varphi_{y_0,y_1}(2t_0-(t_0+t))=\varphi_{y_0,y_1}(t_0-t).$$

Утверждение 4. *Если решение* $\varphi_{y_0,y_1}(t)$ *имеет точку локального максимума* t_1 *и точку локального минимума* t_2, *то число* $T=2\,|\,t_1-t_2\,|$ *есть период данного решения.*

Доказательство

Для определенности будем считать, что $t_1<t_2$. Заметим, что равенство $t_1=t_2$ возможно только для тождественно нулевого решения, которое является периодическим с любым периодом.

Рассмотрим произвольную фиксированную точку $\tau:\tau\in D(\varphi_{y_0,y_1})$. В силу утверждения 3 справедлива следующая цепочка равенств:

$$\varphi_{y_0,y_1}(\tau)=\varphi_{y_0,y_1}(t_1+(\tau-t_1))=$$
$$=\varphi_{y_0,y_1}(t_1-(\tau-t_1))=$$
$$=\varphi_{y_0,y_1}(t_2-((t_1-(\tau-t_1))-t_2)=$$
$$=\varphi_{y_0,y_1}(\tau+2(t_2-t_1)),$$

что означает периодичность решения.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема о периодичности решений

В силу утверждения 1 любое решение задачи (1), (2) можно однозначно продолжить на всю вещественную ось.

Теорема 1. *Всякое определенное на* $\mathbf{R}$ *решение задачи* (1), (2) *является периодической функцией.*

Доказательство

По утверждению 4, достаточно установить, что определенное на $\mathbf{R}$ решение φ имеет точки локального максимума и локального минимума.

Предположим, что φ не имеет точек локального максимума. Тогда она имеет не более одной точки локального минимума, так как между двумя точками локального минимума имеется точка локального максимума.

Рассмотрим полуось $(t_0,+\infty)$, на которой φ не имеет точек локального минимума. На такой полуоси φ строго монотонна. Допустим, для определенности, что она строго возрастает. Тогда она имеет строго положительный предел (поскольку в отрицательной области ее производная также строго возрастает). Это означает, что $\ddot{\varphi}(t)$ при достаточно больших t меньше отрицательной константы, в силу уравнения (1), то есть $\dot{\varphi}(t)$ необходимо становится отрицательной. Это противоречит предположению о возрастании функции φ.

Аналогичным образом получается противоречие в предположении, что функция φ строго убывает. Итак, существование точки локального максимума доказано.

Таким же образом доказывается существование точки локального минимума. Это завершает доказательство теоремы.

О решениях задачи с высоким уровнем энергии

Утверждение 5. *Функция*

$$E=\frac{\dot{y}_+^2}{2}+\int_0^y f(u)du$$

для любого решения $y(t)$ *задачи* (1), (2) *сохраняет постоянное значение.*

Доказательство Пусть $y(t)$ — произвольное решение задачи (1), (2). Полагая, что на промежутке $[t_0, t]$ не происходит удара о «пол» или о «потолок», умножим обе части уравнения (1) на $\dot{y}$ и затем обычным образом получим первый интеграл в виде

$$\frac{\dot{y}^2}{2} + \int_0^y f(u)du = \frac{\dot{y}_+^2(t_0)}{2} + \int_0^{y(t_0)} f(u)du.$$

В точках выхода на «пол» или на «потолок» функция не меняет своего значения в силу требования (8) определения решения.

Данную величину E будем называть *энергией решения* $y(t)$. Будем также использовать обозначение

$$M = \max_{y\in[b,c]} \int_0^y f(u)du.$$

Теорема 2. *Если энергия решения* $\varphi(t)$ *удовлетворяет условию*

$$E > M, \tag{12}$$

то период определяется по следующей формуле

$$T = 2\int_b^c \frac{dy}{\sqrt{2(E - \int_0^y f(u)du)}}. \tag{13}$$

Доказательство Заметим, что решение $\varphi(t)$ не может быть $const$ в силу выполнения условий (4), (8). Но тогда $\exists(t_0)[\varphi(t_0) \in (b,c)]$. При этом из (12) и тождества

$$\frac{\dot{\varphi}_+^2(t)}{2} + \int_0^{\varphi(t)} f(u)du = E \tag{14}$$

вытекает, что $\dot{\varphi}(t_0) \neq 0$. Пусть для определенности $\dot{\varphi}(t_0) > 0$, тогда

$$\dot{\varphi}(t_0) > \sqrt{2(E - M)}.$$

Это неравенство сохраняется во всех точках t_0, в которых $\varphi(t_0) \in (b,c)$, поэтому однозначно будут определены точки t_1, t_2, удовлетворяющие условиям: $\varphi(t_1) = b$, $\varphi(t_2) = c$ и $\varphi(t) \in (b,c)$, при $t \in (t_1, t_2)$. Очевидно, точка t_1 будет точкой локального минимума решения $\varphi(t)$, t_2 — точкой локального максимума. По утверждению 4 величина $T = 2(t_2 - t_1)$ есть период решения φ, и из уравнения (14) непосредственно вытекает формула (13). Теорема доказана.

Теорема 3. *Найдутся монотонно стремящиеся к* ∞ *последовательности* $(E_m), m \geq m_0$ *и* $(E'_m), m \geq m_1$ *среди уровней энергии* E, *удовлетворяющих условию* (12), *такие, что для каждого* E_m, E'_m *существует в точности одно решение задачи* (1), (2), (5) *с* $E = E_m(E'_m)$. *Решений с другими уровнями энергии у данной задачи нет.*

Доказательство Для любого E, удовлетворяющего условию (12), построим на полуоси $[0, +\infty)$ решения φ_E и ψ_E, удовлетворяющие следующим условиям: $\varphi_E(0) = \psi_E(0) = 0$, $\varphi'_{E+}(0) = \sqrt{2E}, \psi'_{E+}(0) = -\sqrt{2E}$.

Обозначим через $\tau_m(E)$ и $\sigma_m(E)$ последовательности нулей данных решений на $(0, +\infty)$. Нетрудно видеть, что

$$\tau_1(E) = 2\int_0^c \frac{dy}{\sqrt{2(E - \int_0^y f(u)du)}},$$

$$\tau_2(E) = \tau_1(E) + 2\int_b^0 \frac{dy}{\sqrt{2(E - \int_0^y f(u)du)}},$$

причем τ_2 является периодом, поэтому остальные члены последовательности строятся по периодичности.

$\tau_m(E)$ и $\sigma_m(E)$ строго монотонно и непрерывно убывают при изменении E на $(M, +\infty)$. Заметим, что при достаточно больших m, $\tau_m(E)$ совпадает с a, в точности при одном значении E из данного полуинтервала. Обозначив его через E_m и, соответствующее значение для последовательности σ_m — через E'_m, получим последовательности, существование которых утверждается в теореме.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ландау Л.Д. , Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. — М.: Наука, 1973

2. *Рейссиг Р., Сансоне Г., Конти Р.* Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1974

3. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. — М.: Наука, 1989

4. *Портных В.А., Садовский Б.Н.* О колебаниях в нелинейных системах с фазовыми ограничениями. // Автоматика и телемеханика, 2000.