

УДК 621.397.2

СПЕКТРАЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ СДВИГА ДИНАМИЧЕСКИХ ФРАГМЕНТОВ ИЗОБРАЖЕНИЙ

© 2004 Ю. С. Радченко

Воронежский государственный университет

Рассматриваются алгоритмы оценки параметра сдвига сигналов, основанные на неинвариантности обобщенных спектров. В качестве системы базисных функций берутся классические ортогональные полиномы. Показано, что отношение амплитуд двух первых мод разложения позволяет получить при наличии шумов асимптотически несмещенные и состоятельные оценки.

ВВЕДЕНИЕ

Телекоммуникационные системы нового поколения: мобильные и спутниковые системы связи, локальные и глобальные сети связи осуществляют передачу мультимедийной информации (речь, текст, видео, телевизионные изображения). При этом весьма остро стоит вопрос об устранении информационной избыточности из сигналов и разработке эффективных вычислительных процедур для реализации алгоритмов сжатия потоков информации и ее восстановления на приемном конце. Очевидно, что современные алгоритмы сжатия должны быть оптимизированы не только в плане уменьшения вычислительных затрат, но и в статистическом смысле, с учетом вероятностного характера помех, сообщений и критериев качества функционирования. Особенно остро стоит эта проблема при передаче и обработке динамических изображений, так как они обладают огромной информационной емкостью.

Для сжатия информации, заключенной в видео и аудио сигналах и предназначенной для передачи по телекоммуникационным каналам, целесообразен способ кодирования источника сигнала с регулируемыми потерями. В рамках этого подхода применяются различные линейные ортогональные преобразования: а) дискретное косинусное преобразование (DCT) и его модификации; б) “wavelet”-преобразование; в) разложение по базису разрывных кусочно-постоянных функций (Уолша, Хаара), г) фрактальный алгоритм сжатия [1, 2].

Однако для обработки динамических изображений эти алгоритмы плохо приспособлены. Так стандарты сжатия динамических изображений MPEG1—MPEG4, H261, H263, основанные на DCT, требуют большого числа операций для предсказания движения фрагментов. Дискретный характер цифрового изображения порождает ряд ошибок в предсказании движения и восстановлении сигналов. “Wavelet”-преобразование требует больших вычислительных затрат, плохо работает при наличии помех, не ориентировано на обработку динамических изображений.

Применение преобразований на базе ортогональных полиномов открывает новые возможности для анализа движения фрагментов изображения. В основе нового подхода лежит неинвариантность спектров к сдвигу сигналов и возможность работы в пространстве малой размерности матрицы спектральных коэффициентов [3, 4, 5].

СУБОПТИМАЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ ОЦЕНКИ

Пусть в подобласти $\{x, y\} \in \Omega$ наблюдается поле $s(x, y, \tau)$, представляющее собой фрагмент $u(x, y)I_{\Omega}(x, y)$ пространственного сигнала. Здесь $I_{\Omega}(x, y)$ — индикаторная функция подобласти, $\tau = (\tau_x, \tau_y)$ — параметры сдвига фрагмента в данном кадре. Реализация процедуры сжатия существенно упрощается, если имеет место факторизация базисных функций $\varphi_{mk}(x, y) = \varphi_m(x)\varphi_k(y)$. Здесь $\varphi_m(x)$, $\varphi_k(y)$ — одномерные функции, основанные на ортогональных полиномах. Тогда

для полезного сигнала $s(x, y, \tau)$ имеет место пара преобразований

$$s(x, y, \tau) = \sum_m \sum_k C_{mk}(\tau) \varphi_m(x) \varphi_k(y), \quad (1)$$

$$C_{mk}(\tau) = \iint_{\Omega} s(x, y, \tau) \varphi_m(x) \varphi_k(y) dx dy.$$

Для разложения сигналов и изображений удобнее всего применять следующие классические ортогональные многочлены: а) Эрмита; б) полиномы Чебышева I рода. Если обозначить a_x, a_y — характерные размеры подобласти Ω , $z_1 = x/a_x$, $z_2 = y/a_y$, то (1) можно переписать с использованием ортогональных полиномов в виде

$$s(x, y, \tau) = \sum_{m,k} C_{mk}(\tau) p_m(x/a_x) p_k(y/a_y),$$

$$C_{mk}(\tau) = (d_m d_k)^{-1} \times$$

$$\iint_{\Omega} s(a_x z_1, a_y z_2; \tau) \rho(z_1) p_m(z_1) \rho(z_2) p_k(z_2) dz_1 dz_2 =$$

$$= (d_m d_k)^{-1} \int \rho(z_1) p_m(z_1) dz_1 \times \quad (2)$$

$$\times \int s(a_x z_1, a_y z_2; \tau) \rho(z_2) p_k(z_2) dz_2.$$

Здесь d_m — норма ортогонального с весом $\rho(z)$ полинома $p_m(z)$. Из выражений (1), (2) следует, что спектральные коэффициенты несут информацию о параметрах сдвига. Покажем, что наиболее мощные первые моды разложения практически линейно зависят сдвига изображения. Поскольку для разложимых базисных функций $\varphi_{mk}(x, y) = \varphi_m(x) \varphi_k(y)$ вычисление спектральных коэффициентов производится последовательным интегрированием по координатам (x, y) , то рассмотрим сначала одномерные преобразования, а затем обобщим их на двумерный случай.

В качестве базисных функций возьмем функции Эрмита (параболического цилиндра), масштабированные к параметру “а” ($z = x/a$),

$$\varphi_m(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi} 2^m m!} \exp(-\frac{z^2}{2}) H_m(z). \quad (3)$$

Были рассмотрены разложения по данному базису различных видов сигналов: непрерывных дифференцируемых и недифференцируемых, финитных и разрывных (импульсных). Аналитические и численные расчеты выявили общую закономерность, ко-

торую покажем на примере разложения сигнала $s(x - \tau) = s_0 \exp(-(x - \tau)^2 / b^2)$. Спектральные коэффициенты разложения такого сигнала по ортогональным функциям (3) описываются соотношением

$$C_m(\Delta) = \sqrt{E} \sqrt{\frac{\sqrt{\gamma}}{1+\gamma}} \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right)^{m/2} \times$$

$$\times \frac{1}{\sqrt{2^{m-1} m!}} \exp\left(-\frac{\Delta^2 \gamma}{2(1+\gamma)}\right) H_m\left(\frac{\Delta \gamma}{\sqrt{\gamma^2-1}}\right),$$

где E — энергия сигнала (1), $\gamma = 2a^2 / b^2$, $\Delta = \tau / a$. На рис. представлена форма спектра $C_m(\Delta)$ при разных сдвигах Δ .

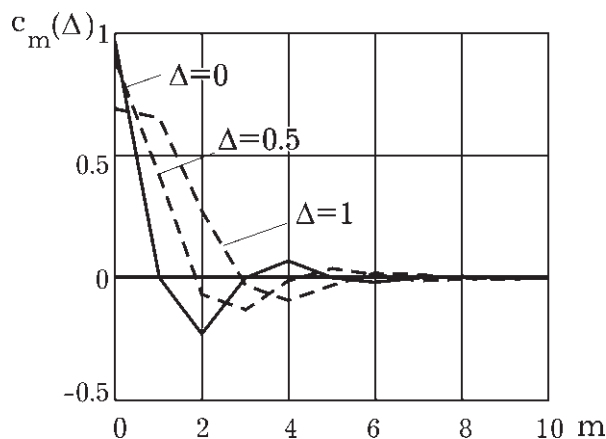


Рис. Изменение обобщенного спектра сигнала в зависимости от величины сдвига

Возьмем отношение двух спектральных коэффициентов

$$\frac{C_1(\Delta)}{C_0(\Delta)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right)^{1/2} H_1\left(\frac{\Delta \gamma}{\sqrt{\gamma^2-1}}\right). \quad (4)$$

Учитывая, что $H_1(z) = 2z$ [6], можно переписать (4) как

$$\tau = a \frac{\gamma+1}{\gamma} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{C_1(\Delta)}{C_0(\Delta)} \right). \quad (5)$$

То есть отношение двух спектральных коэффициентов $C_1(\Delta)/C_0(\Delta)$ линейно связано с параметром сдвига сигнала.

Рассмотрим разложения по базису полиномов Чебышева I рода. В качестве модельного сигнала возьмем функцию Хевисайда

$$s(x - \tau) = U\left(\frac{x - \tau}{a}\right) = \begin{cases} 0, & (x - \tau) < 0, \\ 1, & (x - \tau) > 0. \end{cases} \quad (6)$$

Функция (6) определена внутри области шириной $2a$. В этом случае

$$\frac{C_1(\Delta)}{C_0(\Delta)} = \frac{2\sqrt{1-\Delta^2}}{\arccos(\Delta)} \approx \frac{4}{\pi} \left(1 + \frac{2}{\pi} \Delta - \Delta^2 \frac{\pi^2 - 8}{2\pi^2} \right), \quad (7)$$

где $\Delta = \tau/a$. Как видно из (7) зависимость отношения $C_1(\Delta)/C_0(\Delta)$ нелинейная. Однако зависимость $C_1(\Delta)/C_0(\Delta)$ слабо нелинейная. Поскольку коэффициент $(\pi^2 - 8)/2\pi^2 = 0.095$ при квадратичном слагаемом мал, то эта поправка составляет лишь 4% при самом большом значении аргумента $\Delta = 1$. Таким образом, без значительной погрешности

$$\tau = a \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{C_1(\Delta)}{C_0(\Delta)} - \frac{4}{\pi} \right). \quad (8)$$

К аналогичному результату, то есть линейной или почти линейной зависимости отношения спектральных коэффициентов приводит анализ и других типов сигналов, принадлежащих к классам непрерывных дифференцируемых и недифференцируемых, финитных и разрывных процессов. Для двумерных сигналов сдвиги $\tau_x \sim C_{01}(\Delta)/C_{00}(\Delta)$, $\tau_y \sim C_{01}(\Delta)/C_{00}(\Delta)$.

В случае, если сигнал наблюдается на фоне аддитивного флуктуационного шума

$$\xi(x) = s(x-t) + \eta(x), \quad (9)$$

то оценкой коэффициентов C_m могут быть величины

$$\tilde{C}_m = X_m = \int_{\Omega} \xi(x) \varphi_m(x) dx. \quad (10)$$

Подставив в (5) выражение (10), получаем алгоритм оценки параметра t

$$\tilde{\tau} = \frac{a}{\sqrt{2}} \frac{1 + \xi}{\xi} \left(\frac{\tilde{C}_1}{\tilde{C}_0} \right). \quad (11)$$

Оценку $\tilde{C}_m = X_m$ можно представить в виде

$$\tilde{C}_m = C_m + \sigma_m \tilde{\eta}_m,$$

$\tilde{\eta}_m$ — случайная величина с нулевым средним значением и единичной дисперсией. Сформулируем некоторые ограничения на статистику случайных величин $\tilde{\eta}_m$ для обеспечения существования двух первых моментов оценки (11). Специфика цифрового изображения такова, что процесс $\xi(x)$ является однополярной, в общем случае негауссовской функцией из

диапазона $(0, \xi_{\max})$ и имеет ограниченные моменты нескольких первых порядков. Нетрудно показать, что для ортогональных полиномов $X_0 > 0$, и $X_{\min} \leq X_0 \leq X_{\max}$. Причем $X_{\min} = 0$ только при условии $\xi(x) \equiv 0$. Тогда из соотношения $X_{\min} \leq C_0 + \sigma_0 \tilde{\eta}_0 \leq X_{\max}$ следует ограниченность диапазона для величины $\tilde{\eta}_0$: $\tilde{\eta}_0 \in [(X_{\min} - C_0)/\sigma_0, (X_{\max} - C_0)/\sigma_0]$. В этом случае имеет место оценка момента n -го порядка случайной величины $\tilde{\tau}$

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\tau}^n \rangle &= \iint \left(\frac{C_1 + \sigma_1 \tilde{\eta}_1}{C_0 + \sigma_0 \tilde{\eta}_0} \right)^n w(\tilde{\eta}_1) w(\tilde{\eta}_0) d\tilde{\eta}_1 d\tilde{\eta}_0 \leq \\ &\leq \frac{(\sigma_1/\sigma_0)^n}{(q_0 + \tilde{\eta}_{0\min})} \sum_{k=0}^n C_n^k q_1^{n-k} M_k(\tilde{\eta}_1). \end{aligned}$$

Здесь $M_k(\tilde{\eta}_1)$ — k начальный момент случайной величины $\tilde{\eta}_1$, который по физическим условиям всегда существует, $q_m = C_m/\sigma_m$ — отношение сигнал/шум для m -ого спектрального коэффициента. Поскольку $(q_0 + \tilde{\eta}_{0\min}) > 0$, то $\langle \tilde{\tau}^n \rangle$ всегда существует для реального изображения. Если на процесс $\xi(x)$ наложить условие некоррелированности отсчетов $\langle \xi(x_i) \xi(x_j) \rangle = D \delta_{ij}$, то все $\sigma_m = \sqrt{D}$. Хотя для вычисления моментов оценок (11) и им подобных не требуется знания распределений $w(\tilde{\eta}_m)$, в дальнейшем мы будем их полагать усеченными гауссовскими с диапазоном порядка $\pm 3\sqrt{D}$. Это позволит упростить некоторые статистические расчеты и не приведет к бесконечным моментам.

Обозначая через $k = a(1 + \xi)/\xi\sqrt{2}$, можно переписать (11) следующим образом

$$\tilde{\tau} = k(C_1 + \sqrt{D}\tilde{\eta}_1)/(C_0 + \sqrt{D}\tilde{\eta}_0). \quad (12)$$

В общем случае оценка $\tilde{\tau}$ является негауссовской случайной величиной, так что аналитически найти смещение и дисперсию сложно. Однако можно воспользоваться асимптотическим разложением случайной величины (12) при выполнении неравенства $q_0^2 = C_0^2/D \gg 1$. Как показали расчеты спектров, мода с индексом $m = 0$ является одной из самых мощных в спектральном разложении сигналов. При $q_0 \rightarrow \infty$ можно (12) приближенно записать как

$$\begin{aligned} \tilde{\tau} &= \frac{k}{C_0} \frac{(C_1 + \sqrt{D}\tilde{\eta}_1)}{(1 + \tilde{\eta}_0/q_0)} \approx \\ &\approx \frac{k}{C_0} (C_1 + \sqrt{D}\tilde{\eta}_1) (1 - \tilde{\eta}_0 q_0^{-1} + \tilde{\eta}_0^2 q_0^{-2} + \dots) = \end{aligned}$$

$$= \frac{k}{C_0} (C_1 + \sqrt{D}\tilde{\eta}_1 - C_1q_0^{-1}\tilde{\eta}_0 - \sqrt{D}q_0^{-1}\tilde{\eta}_1\tilde{\eta}_0 + C_1q_0^{-2}\tilde{\eta}_0^2 + \dots). \quad (13)$$

При усреднении (12), (13) учтем, что $\tilde{\eta}_0$ и $\tilde{\eta}_1$ статистически независимы между собой, и получим

$$\langle \tilde{\tau} \rangle = k \frac{C_1}{C_0} + k \frac{C_1}{C_0} q_0^2 + \dots = \tau + \tau q_0^{-2} + \dots \quad (14)$$

Пренебрегая членами разложения порядка q_0^{-2} и меньшими, находим, что смещение оценки $\tilde{\tau}$ равно $\langle \tilde{\tau} \rangle - \tau \approx 0$, то есть оценка является асимптотически несмещенной. При конечных значениях q_0 смещение имеет порядок τq_0^{-2} .

Определим дисперсию оценки $\tilde{\tau}$, пользуясь асимптотическим разложением (13).

$$\begin{aligned} D(\tilde{\tau}) &= \left(\frac{k}{C_0} \right)^2 (C_1^2 q_0^{-2} + D + D q_0^{-2}) = \\ &= k^2 \left(\frac{C_1^2}{C_0^2} q_0^{-2} + \frac{D}{C_0^2} (1 + q_0^{-2}) \right) = \\ &= (k^2 / q_0^2) \left(\left(\frac{C_1}{C_0} \right)^2 + 1 + q_0^{-2} \right). \end{aligned} \quad (15)$$

При $q_0 \rightarrow \infty$ дисперсия оценки $\tilde{\tau}$ стремится к нулю. Таким образом, $\tilde{\tau}$ — состоятельная оценка τ .

Субоптимальная оценка параметра сдвига, основанная на формуле (8) имеет вид

$$\tilde{\tau} = a \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{\tilde{C}_1}{\tilde{C}_0} - \frac{4}{\pi} \right) = a \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{C_1 + \sqrt{D}\tilde{\eta}_1}{C_0 + \sqrt{D}\tilde{\eta}_0} - \frac{4}{\pi} \right). \quad (16)$$

Продельвая выкладки для анализа смещения и дисперсии оценки $\tilde{\tau}$, аналогичные предыдущим, получаем

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\tau} \rangle &= \frac{a\pi^2}{8} \left(\frac{C_1(\Delta)}{C_0(\Delta)} (1 + q_0^{-2}) - \frac{4}{\pi} \right), \\ D(\tilde{\tau}) &= \left(\frac{a\pi^2}{8} \right)^2 \frac{(1 + C_1^2 / C_0^2 + q_0^{-2})}{q_0^2}. \end{aligned} \quad (18)$$

Из соотношения (18) видно, что и в данном случае оценка является асимптотически несмещенной и состоятельной при $q_0 \rightarrow \infty$.

ВЫВОДЫ

Для измерения вектора сдвига фрагмента изображения использован новый подход к формированию оценок на основе обобщенного спектра. Показано, что для разложений по базису Чебышева, Лежандра, Эрмита отношение спектральных коэффициентов $C_1(\tau) / C_0(\tau)$ является линейной функцией параметра τ или весьма близко к линейной зависимости. Такой характер зависимости справедлив для широкого класса моделей полезных сигналов: непрерывных и дифференцируемых, непрерывных и не дифференцируемых на множестве точек, разрывных. Анализ характеристик предложенных оценок показал, что они являются асимптотически несмещенными и состоятельными.

ЛИТЕРАТУРА

1. Цифровая обработка компьютерных и телевизионных изображений / под ред. Ю.Б. Зубарева, В.П. Дворковича. — М. : МЦНТИ, 1997. — 442 с.
2. Единые принципы сжатия цветных динамических изображений различного разрешения / А. В. Дворкович, В. П. Дворкович, Б. Н. Мохин и др. // Цифровая обработка сигналов. — 1999. — № 1. — С. 27—35.
3. Радченко Ю.С. Совместное обнаружение и оценка параметров сдвига сигналов, сжатых с помощью ортогональных полиномов / Ю. С. Радченко // Цифровая обработка сигналов и ее применение: DSPA'99: тр. 2 международ. конф. — М., 1999. — Т. 3. — С. 644—649.
4. Радченко Ю.С. Быстрое обнаружение и оценка параметра сдвига сигналов, сжатых с помощью ортогональных полиномов / Ю. С. Радченко, А. Ю. Кожин, М. Ю. Радченко // Радиотехника. — 1999. — № 6 (вып. 37). — С. 17—19.
5. Радченко Ю.С. Алгоритм сжатия изображений на основе полиномиальных преобразований / Ю. С. Радченко // Цифровая обработка сигналов. — 2002. — №1. — С. 2—6.
6. Суетин П.К. Классические ортогональные многочлены / П. К. Суетин. — М. : Наука, 1979. — 416 с.