УДК 517.927

НЕКОТОРЫЕ ВАРИАЦИОННЫЕ НЕРАВЕНСТВА НА ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СЕТЯХ

© 2004 Ю. В. Покорный, И. Ю. Покорная, В. Л. Прядиев, Н. Н. Рябцева

Воронежский государственный университет

В работе обсуждаются некоторые качественные проблемы дифференцирования в вариационных задачах на пространственной сети

При анализе вариационных задач, возникающих при описании физических систем сетеподобной структуры, неизбежно возникает вопрос о трактовке смысла интеграла, объединяющего систему в единое целое. От этой трактовки зависит, например, возможность использования такой основополагающей процедуры, как интегрирование по частям. Уже для функций скалярного аргумента на отрезке $[a;b]$ корректность равенства

$$\int_a^b udv + \int_a^b vdu = [uv]_a^b \ (= u(b)v(b) - u(a)v(a))$$

зависит от гладкости u, v и от толкования интеграла. Если хотя бы одна из функций $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ непрерывна, а другая принадлежит $BV[a;b]$, т. е. имеет ограниченную вариацию, то равенство (1) верно при трактовке интегралов по Риману−Стильтьесу. Если допустить разрывы у обеих функций, то осмысленность обоих интегралов в (1) может быть обеспечена, если понимать их по Лебегу−Стильтьесу. Однако осмысленность каждого слагаемого слева в (1) еще не означает справедливости всего равенства (1) в целом. Как, например, в случае, когда исследуемая физическая система состоит из двух смыкающихся одномерных континуумов, и у нас есть желание ассоциировать их с двумя отрезками $[a;\xi]$ и $[\xi;b]$ (при $a < \xi < b$), что связано со стыковкой двух пар «соседствующих» функций. Можно ли результат такой стыковки объединять *единым интегралом* на $[a;b]$? Да еще так, чтобы для такого интеграла была верна формула типа (1)?! Именно этот вопрос в миниатюре отражает проблемы интегрирования в вариационных задачах на графах.

1. Поясним значение вопроса на функциях одномерного аргумента. Общепринятый взгляд (как у Бурбаки) отождествляет понятие интеграла $\int_E u\,d\mu$ с элементами из пространства $C^*(E)$ функционалов на $C(E)$ или, как говорят, с риссовыми (борелевскими) мерами на E. Этот взгляд восходит к знаменитой теореме Рисса о представлении линейного функционала на $C(E)$ (общий аналог для общего интеграла — результаты типа теоремы Какутани).

Однако в каноническом (даже у Рисса) интеграле Римана−Стильтьеса под $\mu(x)$ понимается функция, определенная *поточечно всюду*. Подчеркнем, что особенно важно для применений интеграла в матфизике — как для осмысливания формул типа (1) — функция $\mu(x)$ считается определенной в каждой точке. Другое дело, что $\mu(\cdot)$ предполагается из BV, т. е. имеющей ограниченную вариацию. Для скалярных функций из $BV[a;b]$ мера обычно строится стандартными конструкциями на базе «функции сегмента»

$$\mu[\alpha;\beta] = \mu(\beta+0) - \mu(\alpha-0).$$

И эта μ-мера даже обозначением обычно отождествляется с исходной $\mu(x)$ из $BV[a;b]$. В обыденном разговоре нередко происходит путаница даже терминов, применяемых как к мерам (функциям множества), так и к интегрирующим (стоящим под знаком дифференциала) функциям — абсолютная непрерывность, ограниченность вариации, σ-измеримость (при какой-то то ли мере, то ли функции $\sigma \in BV$) и т. д. Именно эту многослойность толкований приходится снимать, обсуждая корректность формулы (1). Особенно важную при разговоре о ней, как об основополагающим инструменте анализа дифференциальных уравнений — об интеграле с переменными пределами типа $\int_{\alpha}^{\beta} f d\mu$, где для β (и α) не может быть исключений как в функции Коши, где приходится эту функцию дифференцировать в условиях проблемных значений для β (и α).

Проблемы возникают, если интеграл (а точнее — псевдоинтеграл) $\int_{\alpha}^{\beta} f d\mu$ получен чисто формальным применением формулы (1)

$$\int_{\alpha}^{\beta} f d\mu = [f\mu]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} \mu df \qquad (2)$$

в условиях, когда f, μ взяты из BV, а интеграл справа определен, например, по Лебегу−Стильтьесу. Возможно ли все выражение справа считать интегралом в каком-либо осмысленном виде, т. е. построить какую-либо меру μ на базе исходной функции $\mu(x)$ из BV?

При стандартном взгляде на этот вопрос можно ответить сокрушительно — Нет!

И с очень простой мотивацией. Дело в том, что в интеграле справа $\int_{\alpha}^{\beta} \mu df$ в каждой точке разрыва f собственное значение этой функции никакой роли не играет, ибо f-мера такой точки ξ равна $f([\xi]) = f(\xi + 0) - f(\xi - 0)$. Именно этот стереотип присутствует в литературе по теории интеграла, когда вместо BV рассматривается, как правило, BV_0 — пространство функций ограниченной вариации, непрерывных слева (или справа). Так и пишется обычно, «будем считать без *ограничения общности*» все рассматриваемые функции (из BV) непрерывными справа. Но этот стереотип, выбрасывающий собственные значения функций в точках их разрыва, характерен для литературы по функциональному анализу, где, как отмечалось выше, интеграл — это или риссова мера, или функционал из $C^*(E)$ — как в [1—4]. В этой литературе формула (1) — весьма закоулочный фрагмент, который не всегда легко и отыскать.

Проблемы, связанные с приданием смысла псевдоинтегралу (2), обсуждаются в [6]. Главная трудность здесь порождается необходимостью построения какой-либо меры с помощью функции сегмента $\sigma[\alpha;\beta] = |f(\beta) - f(\alpha)|$, для которой стандартные конструкции построения борелевских (на $[a;b]$) мер не проходят. Построение меры в [6] осуществлено на «проективном» расширении $[a;b]$, а также дескриптивной конструкцией интеграла. Намеченный в [6] метод распространяется (например, в [7]) на анализ скалярной задачи Штурма−Лиувилля с обобщенным коэффициентами. В настоящей работе подобные трудности, порождаемые «склейкой мер» в интегрировании по частям на графе, мы преодолеваем в основном стандартными методами, используя «обобщенное интегрирование» и порождаемое им «обобщенное дифференцирование» лишь в подтексте.

2. Пусть Γ — конечный связный геометрический граф из $\mathbf{R}^n$. В других терминах (см. [5]) Γ — одномерный клеточный комплекс, метрическая сеть и проч. Мы используем терминологию из [5]. Пусть $\{\gamma_i\}$ — набор ребер Γ (открытых интервалов). $\mathcal{J}(\Gamma)$ — совокупность внутренних вершин, где ребра смыкаются, $\partial\Gamma$ — совокупность граничных (тупиковых) вершин. Назовем Γ-интервалом любое связное открытое (в относительной топологии) подмножество Γ. Очевидно, любой Γ-интервал имеет структуру графа. Для любой поточечно определенной на $\bar{\Gamma}$ функции $\sigma : \Gamma \to \mathbf{R}$ ограниченной вариации естественным образом определяется борелевская мера на $\bar{\Gamma}$, интегрирование по которой мы будем обозначать в виде $\int f(x) d\sigma(x)$.

Рассмотрим функционал (потенциальная энергия сетки стильтьесовых струн)

$$H(u) = \int_{\Gamma} u dF - \frac{1}{2}\int_{\Gamma} p u'^2 dx - \frac{1}{2}\int_{\Gamma} u^2 dQ \qquad (3)$$

в классе непрерывных на Γ функций $u(\cdot) : \Gamma \to \mathbf{R}$, каждая из которых абсолютно непрерывна на ребрах Γ и имеет фиксированные значения на $\partial\Gamma$. Для придания смысла символу $u'(\cdot)$ будем предполагать каждое ребро ориентированным — от выбора ориентации, как мы увидим, результаты не зависят. Функция $p(x)$, определяющая натяжение в точке x, из физических соображений должна быть нулевой во внутренних узлах. Тогда, очевидно, $\int\limits_{\Gamma} pu'^2 dx = \sum\limits_{\gamma_i} \int\limits_{\gamma_i} pu'^2 dx$.

Естественно предполагать поэтому для рассматриваемых функций конечность интегралов $\int pu'^2 dx$. Скалярнозначные функции $F(x)$ и $Q(x)$, определенные в каждой точке $\overline{\Gamma}$, предполагаются из $BV(\overline{\Gamma})$, что придает смысл остальным (первому и третьему) интегралам в (3).

Стандартная процедура Лагранжа приводит к первой вариации

$$\delta H(u)\varphi = \int\limits_{\Gamma} \varphi dF - \int\limits_{\Gamma} pu'\varphi' dx - \int\limits_{\Gamma} u\varphi dQ,$$

где φ — произвольная допустимая функция $(\varphi\,|_{\partial\Gamma} = 0)$.

Если ввести на $\overline{\Gamma}$ новую меру μ, определяемую дифференциалом $d\mu = udQ$, то после интегрирования по частям второго интеграла на каждом ребре и после приведения подобных внеинтегральных слагаемых мы получим

$$\delta H(u)\varphi = \int\limits_{\Gamma} \varphi d[F + pu' - \mu] -$$

$$- \sum_{a \in J(\Gamma)} \varphi(a) \left(\sum_{\gamma \in \Gamma(a)} (pu'_\gamma)(a+0) \right),$$

где $\Gamma(a)$ — набор из примыкающих к a ребер. Приравнивая (согласно принципу Ферма) $\delta H(u)\varphi$ к нулю, будем иметь в силу произвола φ

$$\sum_{\gamma \in \Gamma(a)} (pu'_\gamma)(a+0) = 0 \tag{4}$$

и, аналогично классической лемме Дю-Буа–Реймона, для любого Γ-интервала Ω из Γ

$$\int\limits_{\partial\Gamma} d(F + pu' - \mu) = 0,$$

т. е. для любого обычного интервала $(\alpha;\beta)$ на каждом ребре Γ должно быть

$$-[pu']_\alpha^\beta + \int\limits_\alpha^\beta udQ = F(\beta) - F(\alpha). \tag{5}$$

Условия (4) — традиционные условия трансмиссии. Если Q и F гладки, то (5) означает (на каждом ребре)

$$-(pu')' + Q'u = F',$$

что есть классическое уравнение Эйлера для струны.

Проведенный выше переход к μ-мере с помощью дифференциала $d\mu = udQ$ обеспечен классической теоремой (см. [1, 2]) о преобразовании меры — на каждом ребре — и простым устройством Γ-интервалов — они составлены из связных кусков ребер — что обеспечивает простую организацию соответствующей Σ-алгебры на $\overline{\Gamma}$. Возможность интегрирования по частям достаточно прозрачна.

Точное резюме проведенных рассуждений напрашивается само собой и мы на нем не останавливаемся.

3. Рассмотрим на Γ функционал

$$\Phi(u) = \int\limits_{\Gamma} F(x,u,u')\,dx \left(= \sum_{\gamma_i \subseteq \Gamma} \int\limits_{\gamma_i} F(x,u,u')dx \right), \tag{6}$$

предполагая F достаточно регулярной при x из каждого ребра Γ и при $u, u' \in \mathbf{R}$. Как и выше, Γ − конечный связный и ориентированный геометрический граф. Обсуждается задача минимума Φ на множестве непрерывных на Γ и достаточно гладких на каждом ребре функций $u : \Gamma \to \mathbf{R}$ с закрепленными на границе $\partial\Gamma$ значениями. Если $u_0(x)$ — точка минимума Φ, то обычным образом (схема Лагранжа) устанавливается

$$F_u(x, u_0(x), u_0'(x)) - \frac{d}{dx} F_{u'}(x, u_0(x), u_0'(x)) = 0 \tag{7}$$

на каждом ребре Γ, а в каждой внутренней вершине $a \in \mathcal{J}(\Gamma)$ возникает «естественное» условие

$$\sum_{\gamma_i \in \Gamma(a)} F_{u'}^{(\gamma_i)}(a, u_0(a), (u_0')_i(a+0)) = 0, \tag{8}$$

где $\Gamma(a)$ означает набор примыкающих к a ребер, $F^{(\gamma_i)}$ обозначает сужение F на γ_i, а через $(u_0)_i(x)$ обозначено сужение $u_0(x)$ на γ_i. Символ $z_i'(a+0)$ означает соответствующую крайнюю производную, т. е. производную z_i, вычисленную в точке a вдоль ребра γ_i (примыкающего к a) при локальной параметризации γ_i в направлении «от a «.

Нас интересует следующий этап вариационного исследования задачи $\Phi \to \min$, а именно — условия в терминах второй вариации Φ. Несложно устанавливается, что вторая вариация имеет вид

$$\mathcal{I}(h) = \int\limits_{\Gamma} (Mh'^2 + Nh^2)dx \tag{9}$$

при $M(x) = F_{u'u'}(x, u_0(x), u_0'(x))$ и $N(x) = F_{uu} - \frac{d}{dx} F_{uu'}$ на $u_0(x)$, $u_0(x)$. Необходимое условие минимума $\mathcal{I}(h) \geq 0$ (на всех допустимых h) приводит, как и в классической ситуации, к неравенствам $M(x) \geq 0$ на всех ребрах. Строгое на Γ неравенство

$$M(x) > 0 \quad (x \in \Gamma) \tag{10}$$

согласно уже скалярной теории недостаточно для неотрицательности $\mathcal{I}(h)$. Желаемое для нас свойство

$$\mathcal{I}(h) > 0 \quad (h \not\equiv 0, h\,|_{\partial\Gamma} = 0) \tag{11}$$

будет обеспечено условиями, вполне аналогичными классической теореме Якоби.

Введем в рассмотрение уравнение

$$-\frac{d}{dx}(M\omega') + N\omega = 0, \tag{12}$$

понимая его обычным образом на каждом ребре γ и в виде соотношения

$$\sum_{\gamma_i \in \Gamma(a)} M(a)\omega'_{\gamma_i}(a+0) = 0 \tag{13}$$

в каждой внутренней вершине a-соотношения, вполне аналогичного (4) или (8). Скалярная реализация (12) в точности совпадает с классическим уравнением Якоби.

Будем говорить, что функционал (9) удовлетворяет *условию Якоби*, если уравнение (12) с условиями (13) имеет на Γ хотя бы одно решение без нулей на $\overline{\Gamma}$.

Можно показать (аналогично [5]), что для справедливости условия Якоби достаточно, чтобы система (12), (13) имела хотя бы одно знакопостоянное нетривиальное решение, не тождественно нулевое на границе.

Теорема. *Если* $\inf\limits_{\Gamma} M > 0$ *и справедливо условие Якоби, то верно (11).*

Доказательство. Пусть $\omega(x)$ — какое-либо строго положительное на Γ решение системы (12), (13). Рассмотрим функцию

$$z(x) = -\frac{M(x)\omega'(x)}{\omega(x)}. \tag{14}$$

Покажем, что с помощью этой функции $I(h)$ может быть представлен в виде

$$\mathcal{I}(h) = \int_{\Gamma} M\left(h' + \frac{zh}{M}\right)^2 dx \tag{15}$$

для любой допустимой $h(x)$, в силу чего будет очевидна неотрицательность $\mathcal{I}(h)$ на любой h. Если окажется, что $\mathcal{I}(h_0) = 0$ при некоторой допустимой $h_0(x) \not\equiv 0$, то h_0 окажется минималью $\mathcal{I}(h)$, удовлетворяя уравнению Эйлера (см. п. 2) для $\mathcal{I}(h)$, совпадающему с (12)+(13). Из равенства $\mathcal{I}(h_0) = 0$ согласно (15) должно будет следовать, что

$$h_0(x) + \frac{z(x)h_0(x)}{M(x)}, \equiv 0$$

откуда в силу (14) следует, что

$$h_0(x)\omega'(x) - h_0(x)\omega(x) \equiv 0$$

на каждом ребре. Но левая часть последнего тождества есть вронскиан для двух решений $h_0(x)$, $\omega(x)$ одного и того же уравнения второго порядка, что означает их коллинеарность на каждом ребре, а в целом противоречит теореме перемежаемости Штурма на Γ (см. [5]).

Для доказательства справедливости представления (15) рассмотрим разность (9) и (15), обозначая ее через $\Delta\mathcal{I}$:

$$\Delta\mathcal{I} = \mathcal{I}(h) - \int_{\Gamma} M\left(h' + \frac{zh}{M}\right)^2 dx \underset{(9)}{=}$$

$$= \int_{\Gamma}(Mh'^2 + Nh^2)dx - \int_{\Gamma} M\left(h' + \frac{zh}{M}\right)^2 dx =$$

$$= \int_{\Gamma}\left(Nh^2 - \frac{z^2}{M}h^2 - 2zhh'\right)dx.$$

Последнее слагаемое допускает представление

$$-\int_{\Gamma} 2zhh'dx = -\int_{\Gamma} zd(h^2) = -[zh^2]_{\partial\Gamma} + \int_{\Gamma} h^2 dz.$$

Последнее равенство — версия на графе исходной формулы (1). Оно верно, как легко видеть, если z-мера каждой внутренней вершины равна нулю, т. е.

$$\sum_{\gamma \in \Gamma(a)} z_\gamma(a+0) = 0 \quad (a \in \mathcal{J}(\Gamma)),$$

где $z_\gamma(\cdot)$ – сужение $z(\cdot)$ на ребро γ. Но эти равенства верны в силу (13) и (14). Таким образом, верно представление (т. к. $h\,|_{\partial\Gamma} = 0$)

$$\Delta\mathcal{I} = \int_{\Gamma} h^2\left(N + z' - \frac{z^2}{M}\right)dx. \tag{16}$$

Если теперь вспомнить, что z определяется равенством (14) для строго положительного на $\overline{\Gamma}$ решения $\omega(x)$ уравнения (12), то мы под интегралом в (16) получим тождественный нуль. Что и завершает доказательство.

Работа выполнена при поддержке Президента РФ (Грант на поддержку ведущих научных школ, НШ-1643.2003.1), РФФИ (проекты 04-01-00049 и 02-01-00307), Минобразования РФ (КЦ СПбГУ, грант № Е02-1.0-46) и Программы «Университеты России» (проект УР.04.01.004).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. М.: ИЛ, 1962. — 895 с.

2. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. — 544 с.

3. *Садовничий В.А.* Теория операторов. М.: Высшая школа, 1999. — 368 с.

4. *Янг Л.* Лекции по вариационному исчислению. М.: Мир, 1974. — 488 с.

5. *Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л., Боровских А.В., Лазарев К.П., Шабров С.А.* Дифференциальные уравнения на геометрических графах. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 272 с.

6. *Покорный Ю.В.* Интеграл Стильтьеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях // Докл. РАН. — 1999. Т. 364, № 2. — С. 167—169.

7. *Покорный Ю.В., Зверева М.Б., Шабров С.А.* Об одном классе обобщенных задач Штурма–Лиувилля с разрывными решениями // Международная конф. «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы», посв. 103-летию со дня рождения И. Г. Петровского (XXI совместное заседание ММО и семинара им. И. Г. Петровского): Тез. докладов. М.: Изд-во МГУ, 2004. — С. 166—167.