УДК 517.925.42:517.938.5

ПРИНЦИП УСРЕДНЕНИЯ ДЛЯ ОДНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ В ЛАЗЕРЕ*

© 2004 О. Ю. Макаренков, А. В. Сморгонский

Воронежский государственный университет

В статье рассматривается одна модель бегущей волны в лазере, приводящая к системе двух T-периодических дифференциальных уравнений. Первое из этих уравнений линейно неоднородно задано в бесконечномерном пространстве и содержит неограниченный оператор, независящий от фазовых переменных второго уравнения. При этом предполагается, что оператор сдвига за время T по траекториям однородной части первого уравнения обратим. Второе уравнение задано в конечномерном пространстве и содержит малый параметр. В терминах топологического индекса особой точки подходящего конечномерного поля указаны условия существования T-периодических решений.

1. ВВЕДЕНИЕ

Граничная задача для модели бегущей волны в узком полупроводниковом лазере в автономном случае с учетом T-периодического внешнего воздействия формулируется следующим образом (см. [1], [2]):

$$\begin{aligned}\partial_t\psi(t,z) = L_1\partial_z\psi(t,z) + \beta(n(t))\psi(t,z) - \\ -L_2\psi(t,z) + \rho(n(t))p(t,z) + f_1(t),\end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}\partial_t p(t,z) = (L_3\Omega(n(t)) - \Gamma(n(t)))p(t,z) + \\ +\Gamma(n(t))\psi(t,z) + f_2(t),\end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}\dot n_k(t) = I_k - \frac{n_k(t)}{\tau_k} - \\ -\frac{P}{l_k}(G_k(n_k(t)) - \rho_k(n_k(t)))\int_{S_k}\psi(t,z)^*\psi(t,z)dz - \\ -\frac{P}{l_k}\rho(n_k(t))\mathrm{Re}\left(\int_{S_k}\psi(t,z)^*p(t,z)dz\right), \quad k\in\overline{1,m},\end{aligned} \tag{3}$$

где $\psi, p\in \mathbb{CL}_2([0,T]\times[0,L],\mathbb{R}^4)$, $n\in\mathbb{C}([0,T],\mathbb{R}^m)$, и граничные условия записываются как

$$\psi_1(t,0) = r_0\psi_3(t,0), \quad \psi_2(t,0) = r_0\psi_4(t,0),$$
$$\psi_3(t,L) = r_L\psi_1(t,L), \quad \psi_4(t,L) = r_L\psi_2(t,L).$$

В (1)—(3) через $\partial_t,\partial_z : \mathbb{CL}_2([0,T]\times[0,L],\mathbb{R}^4)\to \mathbb{CL}_2([0,T]\times[0,L],\mathbb{R}^4)$ обозначены операторы дифференцирования соответственно по первой переменной (из отрезка $[0,T]$) и второй переменной (из отрезка $[0,L]$), через L_i некоторые постоянные матрицы и функции f, β, ρ, ρ_k, Ω, Γ, G_k, $k\in\overline{1,m}$ предполагаются непрерывными. Введем следующие обозначения

$$A = \begin{pmatrix} L_1 D \\ 0\end{pmatrix},$$

$$B(\zeta) = \begin{pmatrix} \beta(\zeta,\cdot)E - L_2E & \rho(\zeta,\cdot)E \\ \Gamma(\zeta,\cdot)E & (L_3\Omega_r(\zeta,\cdot) - \Gamma(\zeta,\cdot))E\end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}\varepsilon F_k(\xi,\zeta) = I_k - \frac{\zeta}{\tau_k} - \\ -\frac{P}{l_k}(G_k(\zeta) - \rho_k(\zeta))\int_{S_k}([\xi(z)]_1)^*[\xi(z)]_1dz - \\ -\frac{P}{l_k}\rho(\zeta)\mathrm{Re}\left(\int_{S_k}([\xi(z)]_2)^*[\xi(z)]_2dz\right), \quad k\in\overline{1,m},\end{aligned}$$

где $\zeta\in\mathbb{R}^m$, $E:\mathbb{L}_2([0,L],\mathbb{R}^4)\to\mathbb{L}_2([0,L],\mathbb{R}^4)$ — тождественный оператор, $D:\mathbb{L}_2([0,L],\mathbb{R}^4)\to\mathbb{L}_2([0,L],\mathbb{R}^4)$ — оператор дифференцирования по единственной переменной (из отрезка $[0,L]$). Выделение малого параметра $\varepsilon>0$ в последнем равенстве соответствует малости параметра накачки и времени спонтанного испускания электронов в лазере (см. [1]). Зафиксируем некоторое $t\in[0,T]$. Положим

*Работа поддержана РФФИ, гранты 02-01-00189 и 02-01-00307, грантом А04-2.8-64 Федерального агентства по образованию и грантом VZ-010 Министерства Образования РФ и U.S.CRDF.

$$q_t(z) = \begin{pmatrix} \psi(t,z) \\ p(t,z) \end{pmatrix},$$

то есть при каждом фиксированном $t \in [0,T]$ элемент q_t принадлежит пространству $\mathbb{L}_2([0,L],\mathbb{R}^8)$. В дальнейшем, вместо q_t нам будет удобно писать $q(t)$, соответственно вместо $q_t(z)$ будет написано $q(t)(z)$. Таким образом, система (1)—(3) может быть переписана в следующем виде

$$\dot{q}(t) = Aq(t) + B(n(t))q(t) + f(t), \tag{4}$$

$$\dot{n}(t) = \varepsilon F(q(t), n(t)). \tag{5}$$

Мы рассмотрим случай, когда параметры в уравнении (3) модулируются по T-периодическому закону, что соответствует следующей системе

$$\dot{q}(t) = Aq(t) + B(n(t))q(t) + f(t), \tag{6}$$

$$\dot{n}(t) = \varepsilon F(t, q(t), n(t)), \tag{7}$$

которая отличается от системы (4)—(5) наличием временной переменной во втором уравнении.

При изучении математической модели (6)—(7) представляют интерес условия существования T-периодических решений, которые соответствуют незатухаюим пульсациям интенсивности лазерного излучения (см. [3]). Доказательство существования таких условий, основанное на принципе усреднения и теории вращения векторных полей, предлагается в следующем разделе статьи.

2. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Всюду в этом параграфе мы считаем, что неограниченный оператор A генерирует C_0-полугруппу и ограниченный оператор B непрерывен как оператор, действующий из пространства $\mathbb{R}^8$ в пространство ограниченных линейных операторов, переводящих $\mathbb{L}_2([0,L],\mathbb{R}^8)$ в $\mathbb{L}_2([0,L],\mathbb{R}^8)$.

Обозначим через $V(t,n)\xi$ оператор, ставящий в соответствие каждым $t \in [0,T]$, $n \in \mathbb{C}([0,T],\mathbb{R}^m)$, $\xi \in \mathbb{L}_2([0,L],\mathbb{R}^8)$ значение решения уравнения (6) без функции f с начальным условием $q(0) = \xi$ в момент времени t. В силу сделанных выше предположений оператор $V(t,n)$ непрерывно зависит от t и n.

Предположим, что существует такая постоянная функция $n_* \in \mathbb{C}([0,T],\mathbb{R}^m)$, что выполнены нижеследующие условия (A_1)—(A_3).

(A_1) Оператор $E - V(T,n_*)$ обратим, то есть существует линейный ограниченный оператор $(E - V(T,n_*))^{-1}$ такой, что

$$(E - V(T,n_*))(E - V(T,n_*))^{-1} = I.$$

Здесь через E, как и выше, обозначен тождественный оператор, но действующий в пространстве $\mathbb{L}_2([0,L],\mathbb{R}^8)$.

При условии (A_1) в окрестности n_* определено непрерывное отображение $Q(n)$, ставящее в соответствие каждой T-периодической функции n некоторое T-периодическое решение уравнения (6). Как уже было сказано выше через $Q(n)(t)$ обозначается значение функции $w = Q(n)$ в точке t.

В пространстве $\mathbb{R}^m$ определим следующее непрерывное векторное поле:

$$F_0(\xi) = \int_0^T F(\tau, Q(\xi)(\tau), \xi)d\tau.$$

В этом равенстве мы отождествили элемент ξ пространства $\mathbb{R}^m$ с постоянной функцией из $\mathbb{C}([0,T],\mathbb{R}^m)$, равной ξ на всей области своего определения.

Пусть

(A_2) $n_*(t)$ — изолированная особая точка векторного поля F_0.

Отметим, что предположение (A_2) сформулированно корректно, так как функция n_* постоянна по t. Ниже через $\mathrm{ind}(F_0, n_*)$ обозначается топологический индекс особой точки $n_*(t)$ поля F_0 (см. [4]). Предположим, что

(A_3) $\mathrm{ind}(F_0, n_*) \neq 0$.

Теорема. *При выполнении условий (A_1)—(A_3) и достаточно малых $\varepsilon > 0$ система (6)—(7) имеет T-периодическое решение, сходящееся при $\varepsilon \to 0$ к $(q_*, Q(n_*))$.*

Доказательство. Пусть $n_* \in \mathbb{R}^m$ удовлетворяет условиям (A_1)—(A_3). Заметим, что для доказательства теоремы достаточно показать, что при достаточно малых $\varepsilon > 0$ дифференциальное уравнение

$$\dot{n}(t) = \varepsilon F(t, Q(n)(t), n(t)) \tag{8}$$

имеет T-периодическое решение, сходящееся к n_*. Для доказательства последнего утверждения в настоящей работе используется топологический способ обоснования принципа усреднения, предложенный в других ситуациях авторами [5], [6] и [7].

От дифференциального уравнения (8) перейдем к интегральному

$$G_\varepsilon(n) = 0, \tag{9}$$

где

$$G_\varepsilon(n) = n(t) - n(T) - \varepsilon\int_0^t F(\tau, Q(n)(\tau), n(\tau))d\tau.$$

Через $\gamma_{\mathbb{C}([0,T],\mathbb{R}^m)}(G_\varepsilon, W)$ будем обозначать вращение вполне непрерывного поля G_ε на границе открытого ограниченного множества $W \subset \mathbb{C}([0,T],\mathbb{R}^m)$. В силу условия ($A_2$) найдется множество $U \subset \mathbb{R}^m$, содержащее точку n_* и такое, что

$$F_0(\xi) \neq 0, \quad \xi \in \bar{U} \setminus \{n_*\}. \tag{10}$$

Поэтому, в силу условия (A_3),

$$\gamma_{\mathbb{R}^m}(F_0, U) \neq 0. \tag{11}$$

Положим $W = \{n : n \in \mathbb{C}([0,T],\mathbb{R}^m),\ n(t) \in U,\ t \in [0,T]\}$ и покажем, что поля G_ε и

$$G_{\varepsilon,0} = n(t) - n(T) - \varepsilon\int_0^T F(\tau, Q(n)(\tau), n(\tau))d\tau$$

линейно гомотопны на границе множества W при достаточно малых $\varepsilon > 0$. Предположим, что это не так, тогда найдутся последовательности ε_k, n_k и λ_k такие, что

$$\begin{gathered} n_k(t) = n_k(T) + \varepsilon_k\lambda_k\int_0^t F(\tau, Q(n_k)(\tau)), n_k(\tau))d\tau + \\ +\varepsilon_k(1-\lambda_k)\int_0^T F(\tau, Q(n_k)(\tau)), n_k(\tau))d\tau, \end{gathered} \tag{12}$$

причем $n_k \in \partial W$. Из (12) следует, что $\dot{n}_k \to 0$ при $k \to \infty$ и, так как $n_k \in \partial W$, то найдется $n_0 \in \partial U$ такой, что равномерно по $t \in [0,T]$

$$n_k(t) \to n_0 \text{ при } k \to \infty. \tag{13}$$

Подставляя в (12) $t = T$, сокращая на ε_k и учитывая (13) в пределе при $k \to \infty$, получаем

$$F_0(n_0) = 0,$$

в чем противоречие с (10). Таким образом, поля G_ε и $G_{\varepsilon,0}$ линейно гомотопны на границе множества W при достаточно малых $\varepsilon > 0$, и при таких $\varepsilon > 0$

$$\gamma_{\mathbb{C}([0,T],\mathbb{R}^m)}(G_\varepsilon, W) = \gamma_{\mathbb{C}([0,T],\mathbb{R}^m)}(G_{\varepsilon,0}, W).$$

По теореме о сужении (см. [4])

$$\gamma_{\mathbb{C}([0,T],\mathbb{R}^m)}(G_{\varepsilon,0}, W) = \gamma_{\mathbb{R}^m}(\varepsilon F_0, U) = \gamma_{\mathbb{R}^m}(F_0, U) \neq 0$$

и доказательство теоремы завершается применением принципа ненулевого вращения.

□

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье установлено, что благодаря малости параметров накачки и времени спонтанного испускания электронов в узком полупроводниковом лазере, условия существование незатухающих пульсаций могут быть сформулированы на основании некоторого усредненного оператора, не зависящего от названных параметров.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bandelow U., Wolfrum M., Sieber J., Radziunas M.* IEEE J. of Quant El. 2001. Vol. 37(2). P. 183—189.

2. *Tronciu V., Wünsche H.-J., Sieber J., Schneider K., Henneberger F.* Opt. Comm. 2000. Vol. 182. P. 221—228.

3. *Самсон А.М., Котомцева Л.А., Лойко Н.А.* Автоколебания в лазерах. Минск: Навука і тэхніка. 1990. 280 с.

4. *Красносельский М.А., Забрейко П.П.* Геометрические методы нелинейного анализа. М.: Физматгиз. 1975. 510 с.

5. *Каменский М.И.* ДАН СССР. 1996. Т. 347. № 2. С. 151—153.

6. *Стрыгин В.В.* Украинский мат. журнал. 1970. Т. 22. № 4. С. 503—513.

7. *Каменский М.И., Макаренков О.Ю., Нистри П.* ДАН. 2003. Т. 388. № 4. С. 439—442.