ВЕСТНИК ВГУ, Серия: Физика, математика, 2004, № 2

УДК 681.3.06

ЛОГИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ НА РЕШЕТКАХ

© 2004 С. Д. Махортов

Воронежский государственный университет

В представленной работе вводится и изучается специальный класс уравнений, построенных на основе логических отношений на решетках. Рассматриваются вопросы о разрешимости и количестве решений этих уравнений, а также методы их решения. Приведенные результаты представляют собой обобщение и развитие предложенного ранее автором теоретико-множественного подхода к моделированию логического вывода. Решетки широко применяются в интеллектуальных системах представления знаний. Нахождение решения логического уравнения эквивалентно обратному логическому выводу на решетке.

Класс логических отношений на решетках впервые введен в [1]. Ранее в [2—3] были начаты исследования теоретико-множественных свойств логического вывода в продукционных системах. Применения решеток для представления знаний описаны, например, в [4—5].

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть $\mathbb{F}$ — некоторая решетка с отношением частичного порядка $\supseteq$ [6].

Решетка $\mathbb{F}$ называется *ограниченной*, если содержит верхнюю и нижнюю грани — такие два элемента I, O, что $I \supseteq A \supseteq O$ для $\forall A \in \mathbb{F}$. Решетка $\mathbb{F}$ называется *полной*, если любое ее подмножество X имеет в $\mathbb{F}$ точные верхнюю и нижнюю грани.

Определение 1.1. Пусть X — некоторое подмножество решетки $\mathbb{F}$. Элемент $A \in X$ называется *наименьшим* элементом в X, если он содержится в любом другом элементе из X. Элемент $A \in X$ называется *минимальным* элементом в X, если он не содержит никакого другого элемента из X.

Точкой, или *атомом*, ограниченной решетки $\mathbb{F}$ называется любой минимальный элемент ее подмножества $\mathbb{F} \setminus O$. Решетка называется *точечной*, или *атомно порожденной*, если каждый ее элемент является объединением точек (атомов). Для точки a элемента решетки A мы будем иногда использовать обозначение $a \in A$ (наряду с $a \subseteq A$).

Обозначим L_F естественным образом определенное на $\mathbb{F}$ отношение включения, задающее частичный порядок элементов $\mathbb{F}$. Очевидно, отношение включения является рефлексивным и транзитивным [7].

Определение 1.2. Отношение R на $\mathbb{F}$ назовем $\cup$**-дистрибутивным** (или, в настоящей работе, просто дистрибутивным), если из $(A, B_1), (A, B_2) \in R$ следует $(A, B_1 \cup B_2) \in R$.

Замечание 1.1. Легко видеть, что для дистрибутивного отношения R справедливо $(A, \underset{i}{\cup} B_i) \in R$, если $(A, B_i) \in R$ для $\forall k : 1 \le K \le n$, где n конечно.

Определение 1.3. Пусть задано некоторое отношение R на полной решетке $\mathbb{F}$. Рассмотрим элемент $U_R \in \mathbb{F}$ — объединение всех элементов $\mathbb{F}$, каждый из которых содержится хотя бы в одной паре отношения R. В силу полноты решетки такое объединение существует. **Алфавитом** отношения R назовем совокупность $\mathbb{F}_R$ всех элементов из $\mathbb{F}$, которые содержатся в U_R.

Согласно [6], множество $\mathbb{F}_R$ является подрешеткой $\mathbb{F}$ и, следовательно, может рассматриваться как самостоятельная решетка. Для данного отношения R на решетке $\mathbb{F}$ обозначим $L_F(R)$ — отношение включения на алфавите $\mathbb{F}_R$.

Определение 1.4. Отношение R на $\mathbb{F}$ называется **логическим**, если оно содержит $L_F(R)$, дистрибутивно и транзитивно.

Как следует из этого определения, отношения включения L_F и $L_F(R)$ сами являются логическими отношениями. Из определения 1.4 также видно, что рассматриваемый тип логических отношений относится к так называемым *монотонным* отношениям, для которых из $(A,B)\in R$ следует $(A, A\cup B)\in R$.

Определение 1.5. Логическим замыканием R^L отношения R, заданного на $\mathbb{F}$, называется наименьшее логическое отношение, содержащее R.

Два произвольных отношения на $\mathbb{F}$ называются логически эквивалентными, если их логические замыкания совпадают.

Определение 1.6. Пусть задано некоторое отношение R на $\mathbb{F}$ и выбраны два элемента $A,B\in\mathbb{F}$. Пусть существует конечное множество пар $\{(A_i,B_i)\mid i=1,\dots,p\}$, где для $\forall i$ справедливо $A_i=B_i$, $A_i\in\mathbb{F}_R$ либо $(A_i,B_i)\in R$. Если при этом $A\supseteq A_i$, $1\le i\le p$ и $\bigcup_i B_i\supseteq B$, то говорят, что упорядоченная пара элементов (A,B) **рефлексивно-дистрибутивно связана** в R.

Определение 1.7. Пусть R — произвольное отношение на $\mathbb{F}$ и выбраны два элемента $A,B\in\mathbb{F}$. Пусть также существует упорядоченный набор элементов $\vec r_{AB}=(B_1,\dots,B_m)$ ($B_1,\dots,B_m\in\mathbb{F}$, $0\le m<\infty$), такой, что в последовательности $(B_0,B_1),(B_1,B_2),\dots,(B_m,B_{m+1})$, где $B_0=A$, $B_{m+1}=B$, каждая пара рефлексивно-дистрибутивно связана в R (в случае $m=0$ это пара (A,B)). Тогда указанный набор $\vec r_{AB}$ называется **логической цепочкой** (длины m), соединяющей A и B в R. Пара (A,B) при этом называется **логически связанной** в R.

В [1] доказана следующая

Теорема 1.1. Для произвольного отношения R на $\mathbb{F}$ логическое замыкание существует и представляет собой множество R^L всех упорядоченных пар $A,B\in\mathbb{F}$, логически связанных в R.

Логическая цепочка $\vec r_{AB}$ наглядно представляется матрицей с переменным количеством элементов в столбцах (квазиматрицей — [8]):

$$M_{AB}=\begin{pmatrix}(A_{1,1},B_{1,1}) & (A_{1,2},B_{1,2}) & \dots & (A_{1,m+1},B_{1,m+1})\\ (A_{2,1},B_{2,1}) & (A_{2,2},B_{2,2}) & \dots & (A_{2,m+1},B_{2,m+1})\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ (A_{p_1,1},B_{p_1,1}) & (A_{p_2,2},B_{p_2,2}) & \dots & (A_{p_{m+1},m+1},B_{p_{m+1},m+1})\end{pmatrix}, \tag{1.1}$$

где каждый столбец с номером k образован парами $\{(A_{i,k},B_{i,k})\mid 1\le i\le p_k\}$, осуществляющими рефлексивно-дистрибутивную связь (B_{k-1},B_k) в цепочке $\vec r_{AB}$ $(1\le k\le m+1)$. Согласно определению 1.6, справедливы следующие соотношения:

$$B_{k-1}\supseteq A_{i,k}\ (1\le i\le p_k)\ \text{ и }\ \bigcup_{1\le i\le p_k} B_{i,k}\supseteq B_k\ (1\le k\le m+1); \tag{1.2}$$

$$(A_{i,k},B_{i,k})\in R\ \text{ либо }\ A_{i,k}=B_{i,k},\ A_{i,k}\in\mathbb{F}_R\ (1\le i\le p_k;\ 1\le k\le m+1). \tag{1.3}$$

Очевидно, что произвольная перестановка пар внутри любого столбца этой матрицы сохраняет свойства (1.2)—(1.3). Нетрудно также видеть, что при заданной матрице M_{AB} вместо элементов B_{k-1} логической цепочки, соединяющей (A,B) в R, можно выбрать $\hat B_{k-1}=\bigcup_{1\le i\le p_k} A_{1,k}$ $(1\le k\le m+1)$. При этом при $k=1$ вместо A будем иметь «меньший» элемент $\hat B_0\subseteq A$. Рассмотрим еще некоторые свойства матрицы (1.1), которые понадобятся нам в дальнейшем.

Лемма 1.1. Пусть дана некоторая матрица M_{AB} вида (1.1), соответствующая логической цепочке $\vec r_{AB}=(B_1,\dots,B_m)$, и соответственно удовлетворяющая при данной паре (A,B) условиям (1.2)—(1.3). Пусть при некоторых i,k справедливо $B_{i,k}\supseteq X$, $X\in\mathbb{F}$. Тогда матрица M'_{AB}, полученная из M_{AB} дописыванием к $k+1$ столбцу рефлексивного элемента (X,X), определяет логическую цепочку $\vec r\,'_{AB}=(B_1,\dots,B_{k-1},B_k\cup X,B_{k+1}\cup X,B_{k+2},\dots,B_m)$, также соединяющую (A,B) в R.

Доказательство. Достаточно для новой матрицы M'_{AB} проверить справедливость условий (1.2)—(1.3) при тех значениях k, при которых имеются изменения в логической цепочке и ее матрице. Итак, поскольку $\bigcup_{1\le i\le p_k} B_{i,k}\supseteq B_k$, и при некотором k выполнено $B_{i,k}\supseteq X$, то $\bigcup_{1\le i\le p_k} B_{i,k}\supseteq B_k\cup X$. Далее, т.к. $B_k\supseteq A_{i,k+1}$, то $B_k\cup X\supseteq A_{i,k+1}$ и $B_k\cup X\supseteq X$. Наконец, из $\bigcup_{1\le i\le p_{k+1}} B_{i,k+1}\supseteq B_{k+1}$ следует $\bigcup_{1\le i\le p_{k+1}} B_{i,k+1}\cup X\supseteq B_{k+1}\cup X$, а из $B_{k+1}\supseteq A_{i,k+2}$ следует, что $B_{k+1}\cup X\supseteq A_{i,k+2}$. Таким образом, условие (1.2) выполнено. Условие (1.3) также сохраняется, т.к. к матрице добавляется рефлексивный элемент. □

Следствие 1.1. Элементарной индукцией доказывается, что указанному в лемме 1.1 преобразованию можно подвергнуть любое количество столбцов подряд, начиная с $k+1$-го, при этом новая матрица также будет осуществлять логическую связь (A, B).

Лемма 1.2. Пусть дана матрица вида (1.1), удовлетворяющая при некоторой паре (A, B) условиям (1.2)—(1.3). Преобразуем ее следующим образом. Будем последовательно слева направо просматривать ее столбцы. Предположим, что в некотором столбце встретится нерефлексивный элемент $(A_{i,k}, B_{i,k})$ такой, что $B_{i,k}$ уже появлялся ранее в качестве правой части некоторой пары. Если это произойдет в том же столбце, то удалим из него элемент $(A_{i,k}, B_{i,k})$. Если первоначальное появление было в некотором предыдущем столбце l, то к каждому столбцу с $l+1$ по k припишем дополнительный элемент $(B_{i,k}, B_{i,k})$, после чего удалим элемент $(A_{i,k}, B_{i,k})$.

В результате получим новую матрицу вида (1.1), также удовлетворяющую условиям (1.2)—(1.3) при той же паре (A, B).

Доказательство. Удаление элемента с повторной правой частью в том же столбце не нарушает условия (1.2). Действительно, $B_{k-1} \supseteq A_{i,k}$ для всех $1 \le i \le p$ означает, что B_{k-1} содержит и любое меньшее количество элементов $A_{i,k}$. С другой стороны, после удаления $B_{i,k}$ объединение $\bigcup_i B_{i,k}$ не изменится, т. к. $B_{i,k}$ встречается в другой паре этого же столбца. При удалении элемента матрицы не может нарушиться и условие (1.3). Если же пара с элементом $B_{i,k}$ появилась в одном из предыдущих столбцов, то предварительное применение следствия 1.1 приводит нас к рассмотренному случаю, если предыдущим появлением элемента $B_{i,k}$ считать добавленную к текущему столбцу пару $(B_{i,k}, B_{i,k})$. □

Следствие 1.2. Если пара (A, B) логически связана в R, то эту связь можно реализовать подмножеством R, в котором все правые части нерефлексивных пар уникальны. Справедливость этого утверждения непосредственно вытекает из леммы 1.2. □

Определение 1.8. Отношение R на точечной решетке $\mathbb{F}$ называется **каноническим**, если оно задано множеством пар вида (A, a), где $A \in \mathbb{F}$, a — точка в $\mathbb{F}$.

В [1] рассмотрены вопросы построения канонического отношения, логически эквивалентного данному.

2. ЛОГИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Пусть дано некоторое отношение R на $\mathbb{F}$ и R^L — его логическое замыкание. Пусть также $(A, B) \in R^L$. Тогда, в смысле общей теории отношений, B называется образом A, а A — прообразом B при отношении R^L. Поскольку отношение в общем случае представляет собой произвольное отображение, то каждый элемент из $\mathbb{F}$ может иметь много образов и прообразов. Кроме того, если $(A, B) \in R^L$, то в силу определения логического отношения любое $B_1 \subset B$ является образом A и каждое $A_1 \supset A$ является прообразом B. Поэтому при изучении образов и прообразов логических отношений необходимо уточнение рассматриваемых понятий.

Определение 2.1. Для данного $B \in \mathbb{F}$ **минимальным прообразом** при отношении R^L называется такой элемент $A \in \mathbb{F}$, что $(A, B) \in R^L$ и A является минимальным, т.е. не содержит никакого другого $A_1 \in \mathbb{F}$, для которого $(A_1, B) \in R^L$.

В контексте определения 2.1 мы будем использовать обозначение $R^L(A) = B$.

Определение 2.2. Точка x решетки $\mathbb{F}$ называется **терминальной** при отношении R, если в R нет ни одной пары вида (A, x), где $A \in \mathbb{F}$ и x не содержится в A.

В оставшейся части работы мы будем рассматривать лишь точечные решетки.

Определение 2.3. Элемент X точечной решетки $\mathbb{F}$ называется **терминальным**, если все его точки являются терминальными (при отношении R).

Определение 2.4. Подмножество $\mathbb{F}_0(R)$ (будем писать $\mathbb{F}_0$, если это не вызовет неоднозначностей) точечной решетки $\mathbb{F}$, состоящее из всех терминальных элементов $\mathbb{F}$, называется **терминальным подмножеством** $\mathbb{F}$ (при отношении R).

Очевидно, терминальное подмножество $\mathbb{F}_0$ образует подрешетку в $\mathbb{F}$.

Рассмотрим уравнение

$$R^L(X) = B, \tag{2.1}$$

где $B \in \mathbb{F}$ — заданный элемент, $X \in \mathbb{F}$ — неизвестный.

Определение 2.5. **Частным решением** X уравнения (2.1) называется минимальный прообраз элемента B, содержащийся в $\mathbb{F}_0$.

Определение 2.6. **Приближенным** (частным) решением X уравнения (2.1) называется любой прообраз элемента B, содержащийся в $\mathbb{F}_0$.

По определению точное решение является и приближенным. Очевидно, приближенное решение всегда содержит хотя бы одно точное решение.

Определение 2.7. **Общим решением** уравнения (2.1) называется совокупность всех его частных решений $\{X_s\},\ s \in S$.

Уравнения вида (2.1) будем называть **логическими** уравнениями на решетках. Заметим, что вообще понятие логического уравнения не ново. В частности, интересные классы логических уравнений рассматривались в монографиях [8—9], однако они имеют другую природу. Как известно [5], термин *логический вывод* также имеет различное толкование в зависимости от способа представления знаний.

Вначале выясним вопрос о том, как меняется общее решение уравнений вида (2.1) при объединении их правых частей. С этой целью рассмотрим уравнение

$$R^L(X) = B_1 \cup B_2 \qquad (2.2)$$

Лемма 2.1. Пусть X_1 — частное решение уравнения вида (2.1) с правой частью B_1, а Y_1 — частное решение уравнения того же вида с правой частью B_2. Тогда $X_1 \bigcup Y_1$ является приближенным решением уравнения (2.2).

Доказательство. Действительно, поскольку R^L содержит отношение включения, то $(X_1 \cup Y_1, X_1) \in R^L$ и $(X_1 \cup Y_1, Y_1) \in R^L$. Отсюда, так как по условию леммы $(X_1, B_1) \in R^L$ и $(Y_1, B_2) \in R^L$, в силу транзитивности R^L имеем $(X_1 \cup Y_1, B_1) \in R^L$ и $(X_1 \cup Y_1, B_2) \in R^L$. Наконец, из последних двух соотношений, пользуясь дистрибутивностью R^L, получим $(X_1 \cup Y_1, B_1 \cup B_2) \in R^L$. □

Теорема 2.1. Пусть $\{X_s\},\ s \in S_1$ — общее решение уравнения вида (2.1) с правой частью B_1, а $\{Y_p\},\ p \in S_2$ — общее решение уравнения того же вида с правой частью B_2. Тогда общее решение уравнения (2.2) представляет собой множество всех элементов вида $X_t \cup Y_p$, из которого исключены элементы, содержащие другие элементы этого же множества.

Доказательство. По лемме 2.1, каждый элемент $X_t \cup Y_p$ является прообразом $B_1 \cup B_2$, т.е. содержит хотя бы одно частное решение (2.2). Покажем теперь, что уравнение (2.2) вообще не имеет частных решений, отличных от вида $X_t \cup Y_p$. Предположим противное — пусть некоторый $Z \in \mathbb{F}_0$, являясь частным решением (2.2), не совпадает ни с одним элементом вида $X_t \cup Y_p$. При этом Z не может и содержать ни одного элемента вида $X_t \cup Y_p$, иначе он не был бы частным решением (оно по определению минимально). Отсюда следует, что Z не содержит ни одного X_t (или ни одного Y_p, что равнозначно). С другой стороны, поскольку $(Z, B_1 \cup B_2) \in R^L$, то $(Z, B_1) \in R^L$ и $(Z, B_2) \in R^L$, т. е. Z содержит хотя бы по одному частному решению уравнений с правыми частями B_1 и B_2. Таким образом, мы пришли к противоречию. □

Рассмотрим некоторые методы решения логических уравнений (2.1).

Далее в этом разделе мы будем предполагать, что отношение R^L является логическим замыканием канонического отношения R на полной точечной решетке $\mathbb{F}$, не содержащего $L_F(R)$ (см. п. 1), а правая часть B уравнения (2.1) представляет собой конечное объединение точек.

Введем понятие структурного расслоения исходного отношения R на виртуальные слои (частичные отношения) $\{R_t \mid t \in T\}$, позволяющее упростить изучение свойств R^L, а также облегчить построение и исследование ряда алгоритмов, связанных с решением соответствующих логических уравнений. С этой целью мы вначале разобьем R на непересекающиеся подмножества, каждое из которых образовано парами вида (A, x_p) с одним и тем же точечным элементом x_p в качестве правой части. Это имеет смысл благодаря тому, что R является каноническим. Обозначим эти подмножества R^p соответственно их элементу $x_p,\ p \in P$.

Определение 2.8. Слоем R_t в отношении R называется подмножество R, образованное упорядоченными парами, взятыми по одной из каждого непустого $R^p,\ p \in P$. Два слоя, отличающиеся хотя бы одной парой, считаются различными.

Замечание 2.1. Каждый слой содержит максимально возможное подмножество пар из R с уникальными правыми частями. Добавление к слою еще одной пары нарушило бы это условие.

Замечание 2.2. Совокупность всех слоев $\{R_t \mid t \in T\}$ охватывает всевозможные такие наборы. Таким образом, любое подмножество пар в R с уникальными правыми частями принадлежит некоторому слою.

Замечание 2.3. В общем случае слои имеют непустые пересечения. Объединение всех слоев равно R.

Замечание 2.4. Нетрудно заметить, что общее количество слоев N определяется равенством $N = \prod_{p \in P} N_p$, где N_p — мощность подмножества пар отношения R с правой частью x_p. Для бесконечных множеств в приведенном равенстве имеются в виду операции над кардинальными числами (см., например, [7]).

Определение 2.9. Будем говорить, что логическая цепочка $\vec{r}_{AB}$ принадлежит в R некоторому слою R_t, если все нерефлексивные пары, определяющие логическую связь $(A,B) \in R^L$ (нерефлексивные элементы соответствующей матрицы (1.1)), содержатся в одном и том же слое R_t.

Лемма 2.2. Если $(A,B) \in R^L$, то существует логическая цепочка $\vec{r}_{AB}$, принадлежащая в R некоторому слою R_t.

Утверждение этой леммы непосредственно вытекает из следствия 1.2 и замечания 2.2. □

Следствие 2.1. Логическое замыкание канонического отношения R на полной точечной решетке $\mathbb{F}$ равно объединению логических замыканий его слоев, т.е. $R^L = \bigcup_{t \in T} R_t^L$.

Доказательство. Поскольку $R_t \subseteq R$, то согласно результатам [1] имеем $R_t^L \subseteq R^L$ $(\forall t \in T)$. Обратно, если $(A,B) \in R^L$, то по лемме 2.2 $(A,B) \in R_t^L$ при некотором $t \in T$. Следовательно, $(A,B) \in \bigcup_{t \in T} R_t^L$. □

Определение 2.10. Будем говорить, что решение X уравнения (2.1) (точное или приближенное) принадлежит в R некоторому слою R_t, если логическая цепочка, соединяющая (X,B) в R, принадлежит этому же слою R_t.

Замечание 2.5. Согласно лемме 2.2 и следствию 2.1, любое частное решение уравнения (2.1) принадлежит в R некоторому слою R_t.

Замечание 2.6. Из следствия 2.1 вытекает, что для нахождения решения уравнения (2.1) в некотором слое R_t достаточно вместо (2.1) решить аналогичное уравнение с отношением R_t^L.

Последние замечания не гарантируют, что два различных слоя не могут содержать одного и того же решения. Кроме того, могут существовать слои, содержащие частное решение для R_t^L, но приближенное для R^L. Некоторые слои могут вообще не содержать решений. Однако, справедливо утверждение о том, что один слой не может содержать более одного точного решения. Чтобы установить этот факт, вначале докажем вспомогательные утверждения.

Лемма 2.3. Если X — частное решение уравнения (2.1), то существует матрица M_{XB}, соответствующая паре $(X,B) \in R^L$, следующего вида

$$M_{XB} = \begin{pmatrix} (A_{1,1}, b_{1,1}) & (A_{1,2}, b_{1,2}) & \dots & (A_{1,m+1}, b_{1,m+1}) \\ (A_{2,1}, b_{2,1}) & (A_{2,2}, b_{2,2}) & \dots & (A_{2,m+1}, b_{2,m+1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (A_{p_1,1}, b_{p_1,1}) & (A_{p_2,2}, b_{p_2,2}) & \dots & (A_{p_{m+1},m+1}, b_{p_{m+1},m+1}) \\ (C_1, C_1) & (C_2, C_2) & \dots & (C_{m+1}, C_{m+1}) \end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

где $(A_{i,k}, b_{i,k}) \in R$, $b_{i,k}$ — попарно различные точки $\mathbb{F}$ $(1 \le i \le p_k;\ 1 \le k \le m+1)$; $C_k \in \mathbb{F}_R$ $(1 \le k \le m+1)$;

$$X = \bigcup_{1 \le i \le p_1} A_{i,1} \cup C_1; \tag{2.4}$$

$$B = \bigcup_{1 \le i \le p_{m+1}} b_{i,m+1} \cup C_{m+1}; \tag{2.5}$$

$$\bigcup_{1 \le i \le p_k} b_{i,k} \cup C_k = \bigcup_{1 \le i \le p_{k+1}} A_{i,k+1} \cup C_{k+1} \ (1 \le k \le m). \tag{2.6}$$

Доказательство. Покажем, каким образом может быть получена матрица (2.3).

Вначале, согласно замечанию 2.5, построим для пары (X,B) обычную матрицу вида (1.1), образованную парами некоторого слоя R_t (с уникальными правыми частями) и рефлексивными парами элементов $\mathbb{F}_R$. Затем в каждом столбце заменим набор рефлексивных пар единственной рефлексивной парой, содержащей объединение элементов всех рефлексивных пар столбца. Поскольку мы имеем дело с точечной решеткой $\mathbb{F}$, то полученная матрица уже имеет вид (2.3). Для доказательства леммы остается лишь добиться выполнения условий (2.4)—(2.6), которые представляют собой усиленный вариант соотношений (1.2)—(1.3).

Заметим, что условие (2.4) выполняется автоматически в силу минимальности X, декларированной в определении 2.5 (см. также соотношение вида (1.2) при $k=1$). Для доказательства соотношений (2.5)—(2.6) будем последовательно просматривать столбцы матрицы справа налево. Вначале положим $k=m+1$, $B_k=B$.

Исключим из k-го столбца элементы вида (A,b) такие, что $b\notin B_k$. Исключим такие же элементы b и из рефлексивной пары этого столбца. Очевидно, что условия вида (1.2)—(1.3) при этом не нарушатся, но станет выполненным и еще одно из условий (2.5)—(2.6) (при данном значении k). Далее, переходя к очередному столбцу матрицы (справа налево), уменьшим k на единицу и положим $B_k=\bigcup\limits_i A_{i,k+1}\cup C_{k+1}$.

Описанную в последнем абзаце процедуру проведем для всех столбцов матрицы. Таким образом получим искомую матрицу M_{XB}. □

Замечание 2.7. Согласно замечаниям 2.5—2.6, утверждение леммы остается верным, если в ее условии отношение R^L заменить на R_t^L.

Определение 2.11. Матрицу вида (2.3), имеющую нерефлексивные элементы с уникальными правыми частями и удовлетворяющую условиям (2.4)—(2.6), будем называть **канонической** матрицей для пары $(X,B)\in R_t^L$.

Лемма 2.4. Если для некоторых $X_1,X_2\in\mathbb{F}_0$ и $B\in\mathbb{F}$ построены канонические матрицы M_{X_1B} и M_{X_2B}, все нерефлексивные элементы которых содержатся в одном и том же слое R_t, то $X_1=X_2$.

Доказательство. Предположим противное, что $X_1\neq X_2$. Пусть, для определенности, существует точка $a_0\in X_1$ и $a_0\notin X_2$. Рассмотрим вначале матрицу M_{X_1B}. Будем просматривать ее столбцы слева направо и при этом строить некоторую специальную последовательность нерефлексивных пар.

Согласно условию (2.4), точка a_0, как и любая точка элемента X_1, содержится в левой части хотя бы одной пары 1-го столбца матрицы. Если существует такая нерефлексивная пара (A_1,a_1) $(a_0\in A_1)$, то добавим эту пару к формируемой последовательности и двигаясь далее будем искать аналогичную пару для a_1. Если же это (C_1,C_1), то по условию (2.6) a_0 аналогично перейдет в следующий столбец. Пройдя все столбцы матрицы, получим конечную последовательность нерефлексивных пар отношения R (возможно, пустую) $\{(A_i,a_i)\mid i=1,\dots,n\}$, причем $a_i\in A_{i+1}$, $a_i\notin\mathbb{F}_0$ $(0\le i\le n)$, $A_{n+1}=B$. Если эта последовательность окажется пустой ($n=0$), то будем иметь $a_0\in B$.

Рассмотрим теперь матрицу M_{X_2B}. Ее столбцы мы будем просматривать справа налево, пытаясь в этой матрице выделить построенную выше последовательность $\{(A_i,a_i)\}$. Поскольку $a_n\in B$, то в силу (2.5) точка a_n содержится в правой части по крайней мере одной пары последнего столбца матрицы M_{X_2B}. Если существует такая нерефлексивная пара, то это может быть лишь (A_n,a_n), т.к. слой R_t не может содержать двух пар с общей правой частью a_n. В этом случае мы переходим в предыдущий столбец матрицы с новой отправной точкой $a_{n-1}\in A_n$ — правой частью предыдущего элемента последовательности. Если же это (C_{m+1},C_{m+1}), то по условию (2.6) в предыдущий столбец аналогично переходит a_n. Таким образом мы будем продвигаться справа налево в матрице и в последовательности $\{A_i,a_i\}$.

Этот процесс может завершиться в одном из трех случаев. Если столбцы матрицы закончатся одновременно с последовательностью, то мы получим $a_0\in X_2$, что противоречит первоначальному предположению (см. начало доказательства). Если же столбцы матрицы закончатся раньше, чем исчерпается последовательность, то тогда соотношение $a_i\in X_2$, $i>0$ будет противоречить тому, что $a_i\notin\mathbb{F}_0$, т.к. по условию X_2 целиком состоит из терминальных точек. Наконец, в последнем варианте, когда последовательность закончится раньше столбцов матрицы, у нас в матрице M_{X_2B} окажется пара вида (A_0,a_0). Этот факт противоречит тому, что $a_0\in\mathbb{F}_0$. Итак, в каждом возможном случае мы приходим к противоречию, что и доказывает лемму. □

Следствие 2.2. Один и тот же слой R_t не может содержать двух различных частных решений уравнения (2.1).

Доказательство. Предположим, что существуют два решения. Тогда по лемме 2.3 и замечанию 2.7 для этих решений существуют канонические матрицы, нерефлексивные элементы которых принадлежат R_t. Отсюда по лемме 2.4 получаем, что эти решения совпадают. □

Обобщая полученные результаты, мы можем сформулировать следующее утверждение.

Теорема 2.2. Для нахождения общего решения уравнения (2.1) достаточно найти частное решение X_t в каждом слое R_t, если оно существует, после чего из полученного множества исключить элементы, содержащие другие элементы.

Утверждение теоремы сразу следует из замечания 2.5 и леммы 2.4. □

Следствие 2.3. Количество частных решений уравнения (2.1) оценивается сверху выражением $N = \bigcup_{p\in P} N_p$, где N_p — мощность подмножества пар отношения R с правой частью x_p, а P определяет все такие подмножества (см. замечание 2.4). □

Теорема 2.2 и замечание 2.6 позволяют свести проблему решения уравнения (2.1) к задаче нахождения частного решения уравнения

$$R_t^L(X) = B, \tag{2.8}$$

где B — нетерминальный элемент решетки $\mathbb{F}$, R_t — произвольный слой в R.

Согласно следствию 2.2, обратное к R_t^L отношение $(R_t^L)^{-1}$ является однозначным отображением $f_t : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ с некоторой областью определения $D(f_t) \subseteq \mathbb{F}$. Рассмотрим некоторые важные его свойства.

Лемма 2.5. Отображение f_t является $\cup$-гомоморфизмом [6], т.е. $f_t(B_1 \cup B_2) = f_t(B_1) \cup \cup f_t(B_2)$, $\forall B_1, B_2 \in D(f_t)$.

Доказательство. Пусть $M_{X_1B_1}$ и $M_{X_2B_2}$ — канонические матрицы вида (2.3) соответственно для $(X_1, B_1), (X_2, B_2) \in R_t^L$. Предположим для определенности, что количество столбцов $M_{X_1B_1}$ больше либо равно количеству столбцов $M_{X_2B_2}$ (это можно сделать, т.к. матрицы равноправны). Объединим эти матрицы следующим образом. К элементам каждого столбца $M_{X_1B_1}$ допишем элементы соответствующего по номеру столбца $M_{X_2B_2}$. В каждом оставшемся столбце $M_{X_1B_1}$ (их по нашему предположению могло быть больше) к рефлексивному элементу вида (C_k, C_k) добавим рефлексивные пары, образованные правыми частями элементов последнего столбца матрицы $M_{X_2B_2}$. Затем в новой матрице исключим повторяющиеся нерефлексивные пары, как это описано в лемме 1.2. В результате получим матрицу $M_{X_{12}B_{12}}$, которая очевидным образом является канонической для пары $(X_1 \cup X_2, B_1 \cup B_2)$. □

Следствие 2.4. Отображение f_t является изотонным [6], т.е. если $B_1 \supseteq B_2$, то $f_t(B_1) \supseteq f_t(B_2)$. □

Таким образом, основываясь на лемме 2.5, для решения уравнения (2.8) достаточно решить уравнение с каждой точкой элемента B в качестве правой части. Поэтому рассмотрим задачу нахождения частного решения следующего уравнения:

$$R_t^L(X) = b, \tag{2.9}$$

где b — нетерминальная точка решетки $\mathbb{F}$, R_t — произвольный слой в R.

Рассмотрим методы решения этой задачи. Мы покажем, что данная задача эквивалентна задаче на ориентированном графе перечисления всех входных вершин, из которых достижима данная вершина.

Вначале построим такой граф G_{R_t}. Каждой точке алфавита $\mathbb{F}_R$ сопоставим вершину графа. Далее для каждой пары (A, a) рассматриваемого слоя R_t построим дуги, ведущие из всех вершин, соответствующих точкам A, в вершину, соответствующую данной a. Иногда для краткости мы будем отождествлять точки $\mathbb{F}_R$ и соответствующие им вершины в графе.

В полученном графе G_{R_t} выберем вершину b. Рассмотрим подграф $G_{R_t,b} \subseteq G_{R_t}$, содержащий все вершины, из которых достижима вершина b (включая саму b), и все дуги, соединяющие такие вершины.

Лемма 2.6. Если подграф $G_{R_t,b}$ не содержит ориентированных циклов, то множество всех его входных вершин (т.е. не имеющих входных дуг) соответствует частному решению уравнения (2.9).

Доказательство. Предположим вначале, что граф $G_{R_t,b}$ — ациклический. Покажем, как по нему построить соответствующую матрицу M_{Xb} вида (2.3). Построение проведем по индукции по столбцам, справа налево.

Последний столбец матрицы сформируем из единственного элемента — $(A_{m+1}, b) \in R_t$, где элемент A_{m+1} состоит из всех точек, непосредственно связанных дугами с вершиной b. Очевидно, условие (2.5) выполнено. Предположим теперь, что построен очередной столбец с элементами $(A_{i,k}, b_{i,k}) \in R_t$, $b_{i,k}$ — попарно различные точки $\mathbb{F}$ $(1 \le i \le p_k)$ и (C_k, C_k), $C_k \in \mathbb{F}_R$ $(1 < k \le m+1)$, причем выполнены условия (2.5)—(2.6). Тогда для каждой точки a каждого элемента $A_{i,k}$ найдем все вершины графа, дуги из которых входят в a, сформируем из них элемент $A \in \mathbb{F}$ и поместим пару $(A, a) \in R_t$ в следующий столбец (с номером $k-1$). Если же точка $a \in A_{i,k}$ окажется терминальной (соответствует входной вершине графа), то добавим ее к рефлексивному элементу старого столбца, т.е. в новый столбец вместо элемента (C_k, C_k) войдет элемент вида $(C_k \cup a, C_k \cup a)$. По построению нашего столбца условие (2.6) окажется выполненным. Так как граф не содержит циклов, то через конечное число шагов окажется, что все точки левых частей нерефлексивных элементов очередного столбца окажутся терминальными. На этом процесс построения матрицы M_{Xb} заканчивается.

Поскольку мы таким образом обойдем все дуги графа $G_{R_t,b}$, то можно утверждать, что объединение X левых частей элементов первого столбца матрицы состоит из *всех* терминальных точек, соответствующих входным вершинам графа $G_{R_t,b}$. С другой стороны, X — решение уравнения (2.9). По лемме 2.4 оно является точным решением. □

Замечание 2.8. Описанный в доказательстве процесс построения матрицы M_{Xb} напоминает процедуру обхода всех вершин графа $G_{R_t,b}$, но не полностью соответствует ей, поскольку некоторые точки (вершины) могут обрабатываться более одного раза. Он приведен для доказательства леммы и носит лишь теоретический характер. Для практического же применения можно использовать именно указанный обход из вершины b (против стрелок, «в ширину») вершин графа $G_{R_t,b}$.

Лемма 2.7. Если X — решение уравнения (2.9), то в любой его канонической матрице M_{Xb} содержатся точки, соответствующие всем вершинам графа $G_{R_t,b}$.

Доказательство. Предположим противное, что для некоторой вершины y_0 графа $G_{R_t,b}$ соответствующая точка y_0 не содержится ни в одной паре матрицы M_{Xb}. По построению графа существует путь $y_1, \ldots, y_{n-1}$ из вершины y в вершину b (можно считать $b = y_n$). Подобно доказательству леммы 4.4, будем просматривать столбцы матрицы M_{Xb} справа налево, пытаясь выделить в ней вышеуказанную последовательность $\{y_i\}$. Положим $i = n$.

По условию (2.6) (при $i = n$ — (2.5)) y_i содержится в правой части пары очередного (при $i = n$ — последнего) столбца матрицы M_{Xb}. Если существует такая нерефлексивная пара (Y_i, y_i) (при $i = n$ это именно так), то в этом случае мы переходим в предыдущий столбец матрицы с новой отправной точкой $y_{i-1} \in Y_i$ (эта принадлежность верна, т.к. Y_i содержит все вершины, предшествующие y_i, в том числе и y_{i-1}). Если же это (C_{k_i}, C_{k_i}), то по условию (2.6) в предыдущий столбец аналогично переходит y_i. Продолжая этот процесс, мы будем продвигаться справа налево в матрице и в последовательности $\{y_i\}$.

Как и ранее, рассмотрим возможные варианты завершения процесса. Если последовательность закончится ранее столбцов матрицы или одновременно с ними, то мы получим, что y_0 содержится в матрице, что будет противоречить сделанному в начале доказательства предположению. Если же столбцы матрицы закончатся раньше, чем исчерпается последовательность, то тогда соотношение $y_i \in X$, $i > 0$ будет противоречить тому, что $y_i \notin \mathbb{F}_0$, т.к. по определению X целиком состоит из терминальных точек. Таким образом, в обоих возможных случаях мы приходим к противоречию, что и доказывает нашу лемму. □

Лемма 2.8. Если в графе $G_{R_t,b}$ есть ориентированный цикл, то уравнение (2.9) не имеет решений.

Доказательство. Предположим противное, что существует решение X уравнения (2.9), и тогда построим соответствующую ему каноническую матрицу M_{Xb}. Пусть y — некоторая вершина графа $G_{R_t,b}$, содержащаяся в его цикле. По предыдущей лемме в матрице M_{Xb} существует элемент, в левой или правой части которого присутствует соответствующая точка y.

Предположим для определенности, что в столбце с номером k находится элемент матрицы, содержащий в своей правой части точку y (вариант нахождения y в левой части некоторой пары с помощью условия (2.6) сводится к случаю правой части). Если это (C_k, C_k), то согласно (2.6) получим, что и в столбце номер $k-1$ есть элемент с точкой y в правой части. Если же это нерефлексивная пара (Y, y), то рассмотрим вершину y_1, предшествующую y в цикле графа. Соответственно имеем $y_1 \in Y$, поскольку Y содержит все вершины графа, непосредственно предшествующие y. В силу свойства (2.6), в $k-1$ столбце матрицы M_{Xb} содержится элемент, содержащий в правой части y_1.

Таким образом, за один шаг мы переместимся в матрице на один столбец влево, а в графе — не более чем на одну вершину назад в цикле. Продолжая этот процесс, через конечное число шагов мы (учитывая еще и условие (2.4)) выйдем из первого столбца в матрице, т.е. очередная рассматриваемая точка y_i окажется в X, но в графе вершина y_i останется в том же цикле. Это означает противоречие, т.к. в X содержатся только терминальные точки, а в цикле графа — лишь нетерминальные вершины. □

Объединяя утверждения лемм 2.6 и 2.8, мы можем сформулировать следующий факт.

Теорема 2.3. Уравнение (2.9) имеет не более одного решения. Если граф $G_{R_t,b}$ не имеет циклов, то единственное решение уравнения состоит из всех точек, соответствующих входным вершинам графа. Если $G_{R_t,b}$ имеет хотя бы один цикл, то уравнение решений не имеет. □

ЛИТЕРАТУРА

1. *Махортов С.Д.* Логические отношения на решетках. // Вестник ВГУ. Серия физика, математика. — Воронеж, 2003, № 2. — С. 203—209.

2. *Махортов С.Д.* Порождающие множества в продукционных системах. // Вестник ВГУ. Серия физика, математика. — Воронеж, 2002, № 2. — С. 69—76.

3. *Махортов С.Д.* О теоретико-множественном подходе к формализации логического вывода. // Вестник факультета ПММ: Вып. 4. — Воронеж: ВГУ, 2003 — С. 178—185.

4. *Sowa J.F.* Knowledge Representation: Logical, Philosophical, and Computational Foundations. Brooks Cole Publishing Co., Pacific Grove, CA. 1999.

5. *Тейз А., Грибомон П. и др.* Логический подход к искусственному интеллекту: от классической логики к логическому программированию. Пер. с франц. — М.: Мир, 1990. — 432 с.

6. *Биркгоф Г.* Теория решеток: Пер. с англ. — М.: Наука, 1984. — 568 с.

7. *Куратовский К., Мостовский А.* Теория множеств. Пер. с англ. — М: Мир, 1970. — 416 с.

8. *Левин В.И.* Бесконечнозначная логика в задачах кибернетики. — М.: Радио и связь, 1982. — 176 с.

9. *Закревский А.Д.* Логические уравнения. Изд. 2-е, стереотипное. — М.: Едиториал УРСС, 2003. — 96 с.