УДК 517.983.2

ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ПОЛУГРУППЫ КЛАССОВ H И K(H)

© 2004 И. В. Гриднева

Воронежский государственный аграрный университет им. К.Д. Глинки

Основной результат работы состоит в следующем: если $-iA$ — производящий оператор однопараметрической J-бинесжимающей полугруппы $\{\mathcal{U}_t\}_{t=0}^{\infty}$ класса C_0, то принадлежность оператора A классу **H** или **K**(**H**) эквивалентна принадлежности классу **H** или **K**(**H**) соответствующей полугруппы.

В работе [1] были рассмотрены J-самосопряженные операторы, принадлежащие классам **H** и **K**(**H**) и установлено, что соответствующие J-унитарные группы обладают рядом характеристических свойств. Полученные результаты мы переносим на случай J-диссипативных операторов и соответствующих J-бинесжимающих полугрупп.

Напомним некоторые понятия теории операторов в пространствах с индефинитной метрикой.

Пусть на линейном пространстве $\mathcal{H}$ задана полуторалинейная эрмитова форма $[\cdot,\cdot]$, называемая в дальнейшем индефинитной метрикой. Если пространство $\mathcal{H}$ допускает разложение в ортогональную прямую сумму $\mathcal{H}=\mathcal{H}^{+}[\dot{+}]\mathcal{H}^{-}$, где $\{\mathcal{H}^{\pm},\pm[\cdot,\cdot]\}$ — гильбертовы пространства и $[\mathcal{H}^{+},\mathcal{H}^{-}]=\{0\}$, то $\mathcal{H}$ называют **пространством Крейна**, а указанное разложение — фундаментальным. Если индефинитная метрика задается с помощью самосопряженного и одновременно унитарного оператора J: $[\cdot,\cdot]=(J\cdot,\cdot)$, то пространство $\mathcal{H}$, снабженное J-метрикой, называют J-**пространством** или пространством Крейна.

Определим некоторые классы линейных операторов, действующих в пространствах с индефинитной метрикой.

Оператор $V:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ называют J-**несжимающим**, если для любого $x\in\mathcal{H}$ выполнено неравенство $[Vx,Vx]\ge[x,x]$. Если одновременно с оператором V J-несжимающим будет и $V^{c}(=JV^{*}J$, где V^{*} — гильбертов сопряженный оператор), то V называют J-**бинесжимающим** оператором.

Оператор $A:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ будем называть J-**диссипативным**, если $\operatorname{Im}[Ax,x]\ge 0$ для всех $x\in domA$ и максимальным J-диссипативным, если он J-диссипативный и не допускает нетривиальных J-диссипативных расширений.

Напомним, что под **преобразованием Кэли—Неймана** оператора A в точке $(\bar{\lambda}\neq)\lambda\notin\sigma_p(A)$ мы будем понимать оператор $V=I+(\lambda-\bar{\lambda})(A-\lambda I)^{-1}$. При этом, обратное преобразование Кэли—Неймана определяется равенством $A=\lambda I+(\lambda-\bar{\lambda})(V-I)^{-1}$. Заметим, что преобразование Кэли J-диссипативного оператора есть оператор J-бинесжимающий.

Как обычно, символом $\rho(A)$ будем обозначать резольвентное множество оператора A. Предположим, что найдется такое $a>0$, что для некоторого оператора A выполнено включение: $C_{+}^{a}=\{\lambda\mid\operatorname{Im}\lambda>a\}\subset\rho(A)$. Обозначим через $\rho_{\infty}^{+}(A)$ связную компоненту в $\rho(A)$ содержащую C_{+}^{a}. Подпространство $\mathcal{L}$ назовем **инвариантным** относительно оператора A, если $A(\mathcal{L}\cap domA)\subset\mathcal{L}$ и $\rho_{\infty}^{+}(A|_{\mathcal{L}})\neq\varnothing$. Заметим, что для ограниченного всюду заданного оператора это определение совпадает с классическим: $A\mathcal{L}\subset\mathcal{L}$.

Подпространство $\mathcal{L}$ пространства Крейна $\mathcal{H}$ называется **неотрицательным**, если $[x,x]\ge 0$ для всех $x\in\mathcal{L}$; **положительным**, если $[x,x]>0$ для всех $x\in\mathcal{L}\setminus\{0\}$; и **равномерно положительным**, если относительно нормы $\|\cdot\|$, порожденной фундаментальным разложением, и некоторого $\varepsilon>0$ при всех $x\in\mathcal{L}$ выполнено неравенство $[x,x]\ge\varepsilon\|x\|^{2}$. Аналогично определяются неположительные, отрицательные и равномерно отрицательные подпространства. Неотрицательные и неположительные подпространства объединим термином «семидефинитные подпространства». Подпространство $\mathcal{L}$, все элементы которого удовлетворяют условию $[x,x]=0$, называют **нейтральным**. Символом $\mathfrak{M}^+(\mathfrak{M}^-)$ условимся обозначать множество всех максимальных неотрицательных (неположительных) подпространств пространства Крейна $\mathcal{H}$.

Понятие равномерно дефинитного подпространства допускает некоторое обобщение: неотрицательное (неположительное) подпространство $\mathcal{L}$ пространства Крейна $\mathcal{H}$ назовем **подпространством класса** h^+ **(класса** h^-**)**, если оно допускает разложение $\mathcal{L}=\mathcal{L}_0[\dot{+}]\mathcal{L}^+$ $(\mathcal{L}=\mathcal{L}_0[\dot{+}]\mathcal{L}^-)$ в прямую J-ортогональную сумму конечномерного изотропного подпространства $\mathcal{L}_0(\dim\mathcal{L}_0<\infty,\ \mathcal{L}_0=\mathcal{L}\cap\mathcal{L}^{[\perp]})$ и равномерно положительного (равномерно отрицательного) подпространства $\mathcal{L}^+(\mathcal{L}^-)$.

Скажем, что оператор A принадлежит **классу** $\mathbf{H}$, если у него есть хотя бы одна пара $\mathcal{L}_\pm\in\mathfrak{M}^\pm$ инвариантных подпространств и каждые такие подпространства принадлежат $h^\pm$ соответственно. Будем говорить, что оператор A принадлежит **классу** $\mathbf{K}(\mathbf{H})$, если существует такой J-бинесжимающий оператор $B\in\mathbf{H}$, что резольвенты операторов A и B коммутируют $(BA\subseteq AB)$.

Пусть $\mathcal{H}$ — пространство Крейна и $\mathcal{L}_0$ — нейтральное подпространство. Будем ниже рассматривать фактор-пространство $\hat{\mathcal{H}}=\mathcal{L}_0^{[\perp]}/\mathcal{L}_0$ с индефинитной метрикой $[\hat{x},\hat{y}]=[x,y]$, $x\in\hat{x}$, $y\in\hat{y}$, $\hat{x},\hat{y}\in\hat{\mathcal{H}}$.

Лемма 1. *Пусть* $\mathcal{L}_0$ *— нейтральное подпространство и* $\hat{\mathcal{H}}=\mathcal{L}_0^{[\perp]}/\mathcal{L}_0$. *Тогда максимальная семидефинитность в* $\hat{\mathcal{H}}$ *подпространства* $\hat{\mathcal{L}}$ *эквивалентна соответствующей максимальной семидефинитности в* $\mathcal{H}$ *подпространства* $\tilde{\mathcal{L}}=Lin\{x\mid x\in\hat{x},\hat{x}\in\hat{\mathcal{L}}\}$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{L}_+$ — неотрицательное подпространство в $\mathcal{H}$ и $\mathcal{L}_+\subset\mathcal{L}_0^{[\perp]}$. Рассмотрим подпространство $\hat{\mathcal{L}}_+=\mathcal{L}_+/\mathcal{L}_0$. Покажем, что $\mathcal{L}_+\in\mathfrak{M}^+(\mathcal{H})$ тогда и только тогда, когда $\hat{\mathcal{L}}_+\in\mathfrak{M}^+(\hat{\mathcal{H}})$. Пусть, например, $\mathcal{L}_+\in\mathfrak{M}^+(\mathcal{H})$, а $\hat{\mathcal{L}}_+\notin\mathfrak{M}^+(\hat{\mathcal{H}})$. Тогда существует подпространство $\hat{\mathcal{L}}_+\in\mathfrak{M}^+(\hat{\mathcal{H}})$ такое, что $\hat{\mathcal{L}}_+\subset\hat{\mathcal{L}}_{+,1}$. Следовательно, $\mathcal{L}_{+,1}=Lin\{x\mid x\in\hat{x},\hat{x}\in\hat{\mathcal{L}}_{+,1}\}$ — неотрицательное подпространство, не совпадающее с $\mathcal{L}_+$ и его содержащее: $\mathcal{L}_+\subset\mathcal{L}_{+,1}$. Последнее противоречит предположению $\hat{\mathcal{L}}_+\in\mathfrak{M}^+(\hat{\mathcal{H}})$.

Пусть теперь $\hat{\mathcal{L}}_+=L_+/\hat{\mathcal{L}}_0\in\mathfrak{M}^+(\hat{\mathcal{H}})$. Покажем, что тогда $\mathcal{L}_+\in\mathfrak{M}^+(\mathcal{L}_0^{[\perp]})$. Предположим противное: в $\mathcal{L}_0^{[\perp]}$ существует неотрицательный вектор z, не принадлежащий $\mathcal{L}_+$, и такой, что $\mathcal{L}_{+,1}=Lin\{z,\mathcal{L}_+\}$ — неотрицательное подпространство в $\mathcal{H}$. Тогда подпространство $\hat{\mathcal{L}}_{+,1}=\mathcal{L}_{+,1}/\mathcal{L}_0$ является неотрицательным в $\hat{\mathcal{H}}$ и строго содержит $\hat{\mathcal{L}}_+$, что противоречит условию $\hat{\mathcal{L}}_+\in\mathfrak{M}^+(\hat{\mathcal{H}})$. Следовательно, $\mathcal{L}_+\in\mathfrak{M}^+(\mathcal{L}_0^{[\perp]})$. А поскольку $\mathfrak{M}^+(\mathcal{L}_0^{[\perp]})\subset\mathfrak{M}^+(\mathcal{H})$, то и $\tilde{\mathcal{L}}_+=Lin\{x\mid x\in\hat{x},\hat{x}\in\hat{\mathcal{L}}_+\}\in\mathfrak{M}^+(\mathcal{H})$.

Лемма 2. *Пусть* A *— максимальный* J*-диссипативный оператор и* $C_+^a=\{\lambda\mid \operatorname{Im}\lambda>a\}\subset\rho(A)$. *Тогда следующие условия эквивалентны:*

$$1)\ A\in\mathbf{H};\ 2)\ K_\lambda(A)\in\mathbf{H}\ (\lambda\in C_+^a).$$

И более того, инвариантные подпространства операторов A *и* $K_\lambda(A)$ *совпадают.*

Доказательство. Пусть $A\in\mathbf{H}$. Тогда согласно определению существует пара подпространств $\mathcal{L}_\pm\in\mathfrak{M}^\pm\cap h^\pm$ таких, что $A(\mathcal{L}_\pm\cap\operatorname{dom}A)\subset\mathcal{L}_\pm$ и $\rho_\infty^+(A|_{\mathcal{L}_\pm})\neq\varnothing$. Покажем, что для $\lambda\in\rho_\infty^+(A|_{\mathcal{L}_\pm})$ J-бинесжимающий оператор $V=K_\lambda(A)\in\mathbf{H}$. Заметим, что подпространства $\mathcal{L}_\pm$ являются инвариантными относительно оператора V.

Пусть $\mathcal{M}_\pm$ — произвольная пара максимальных семидефинитных инвариантных относительно V подпространств. Для доказательства импликации $1)\to2)$ достаточно проверить, что $\mathcal{M}_\pm\in h^\pm$.

Сперва предположим, что $\mathcal{M}_-\cap\mathcal{L}_+=\{0\}$. В этом случае пространство $\mathcal{H}$ допускает разложение в прямую сумму $\mathcal{H}=\mathcal{M}_-\dot{+}\mathcal{L}_+$. Тогда оператор V представляется по отношению к указанному разложению в виде матрицы

$$V=\begin{bmatrix}V_{11} & 0\\ 0 & V_{22}\end{bmatrix}.$$

При этом, оператор A, являясь обратным преобразованием Кэли—Неймана оператора V, будет иметь матричное представление вида:

$$A=K_\lambda^{-1}(V)=\begin{bmatrix}K_\lambda^{-1}(V_{11}) & 0\\ 0 & K_\lambda^{-1}(V_{22})\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11} & 0\\ 0 & A_{22}\end{bmatrix}.$$

Отсюда, в силу равенства $A_{11}=\lambda I+(\lambda-\bar{\lambda})(V_{11}-I)^{-1}$ заключаем, что $A_{11}(\mathcal{M}_-\cap\operatorname{dom}A_{11})\subset\mathcal{M}_-$. А поскольку $C_a^+\subset\rho(A)$, то $C_a^+\subset\rho(A_{11})$ и, следовательно, $\rho_\infty^+(A_{11}|_{\mathcal{M}_-})\neq\varnothing$. Таким образом, подпространство $\mathcal{M}_-$ является инвариантным относительно оператора A. Как следствие предположений $A\in\mathbf{H}$ и $\mathcal{M}_-\in\mathfrak{M}^-$, получаем, что $\mathcal{M}_-\in h^-$. Аналогично проверяется, что если $\mathcal{M}_+ \cap \mathcal{L}_- = \{0\}$, то $\mathcal{M}_+ \in h^+$, а потому $V = K_\lambda(A) \in \mathbf{H}$.

Пусть теперь $\mathcal{M}_- \cap \mathcal{L}_+ \neq \{0\}$. Тогда подпространство $\mathcal{L} = \mathcal{M}_- \cap \mathcal{L}_+$ является нейтральным, конечномерным вполне инвариантным относительно оператора V. Введем в рассмотрение фактор-пространство $\hat{\mathcal{H}} = \mathcal{L}^{[\perp]} / \mathcal{L}$ и действующие в нем операторы $\hat{A}$ и $\hat{V}$, где $\mathrm{dom}\,\hat{A} = \{\hat{x} \mid x \in \mathrm{dom}\,A \cap \mathcal{L}^{[\perp]}\}$. Подпространства $\hat{\mathcal{L}}_+ = \mathcal{L}_+ / \mathcal{L}$ и $\hat{\mathcal{M}}_- = \mathcal{M}_- / \mathcal{L}$ являются инвариантными относительно операторов $\hat{A}$ и $\hat{V}$ соответственно и, кроме того, удовлетворяют условию: $\hat{\mathcal{M}}_- \cap \hat{\mathcal{L}}_+ = \{0\}$. А так как в силу леммы 1 имеем $\hat{\mathcal{M}}_- \in \mathfrak{M}^-(\hat{\mathcal{H}})$, $\hat{\mathcal{L}}_+ \in \mathfrak{M}^+(\hat{\mathcal{H}})$, то следуя утверждению задачи 19 [2, с. 84], заключаем, что $\hat{\mathcal{L}}_+ \dotplus \hat{\mathcal{M}}_- = \hat{\mathcal{H}}$. Тогда относительно этого разложения $\hat{\mathcal{H}}$ оператор $\hat{V}$ имеет диагональный вид:

$$\hat{V} = \begin{bmatrix} \hat{V}_{11} & 0 \\ 0 & \hat{V}_{22} \end{bmatrix}.$$

Отсюда

$$\hat{A} = K_\lambda^{-1}(\hat{V}) = \begin{bmatrix} K_\lambda^{-1}(\hat{V}_{11}) & 0 \\ 0 & K_\lambda^{-1}(\hat{V}_{22}) \end{bmatrix},$$

что влечет $\hat{A}\hat{\mathcal{M}}_- \subset \hat{\mathcal{M}}_-$ и $\rho_\infty^+(\hat{A}\,|_{\hat{\mathcal{M}}_-}) \neq \varnothing$, а потому и $\rho_\infty^+(A\,|_{\mathcal{M}_-}) \neq \varnothing$.

Итак, мы доказали инвариантность подпространства $\mathcal{M}_-$ относительно оператора A, следовательно, $\mathcal{M}_- \in h^-$. Аналогично устанавливается, что при выполнении условия $\mathcal{M}_+ \cap \mathcal{L}_- \neq \{0\}$ верно утверждение: $\mathcal{M}_+ \in h^+$, а значит $V \in \mathbf{H}$.

Докажем импликацию 2) $\to$ 1). Предположим, что $V = K_\lambda(A) \in \mathbf{H}$. Тогда найдется пара подпространств $\mathcal{L}_\pm \in \mathfrak{M}^\pm \cap h^\pm$ таких, что $V\mathcal{L}_\pm \subset \mathcal{L}_\pm$. Нетрудно заметить, что подпространства $\mathcal{L}_\pm$ будут являться инвариантными и относительно оператора $A = K_\lambda^{-1}(V)$. Действительно, если $\mathcal{L}_+ \cap \mathcal{L}_- = \{0\}$, то $\mathcal{H} = \mathcal{L}_+ \dotplus \mathcal{L}_-$ и относительно этого разложения оператор V имеет диагональный вид:

$$V = \begin{bmatrix} V_+ & 0 \\ 0 & V_- \end{bmatrix},$$

и, следовательно,

$$A = K_\lambda^{-1}(V) = \begin{bmatrix} K_\lambda^{-1}(V_+) & 0 \\ 0 & K_\lambda^{-1}(V_-) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_+ & 0 \\ 0 & A_- \end{bmatrix}.$$

Отсюда немедленно вытекает включение $A(\mathrm{dom}\,A \cap \mathcal{L}_\pm) \subset \mathcal{L}_\pm$. Поэтому в силу условия $\rho(A) = \rho(A_+) \cap \rho(A_-)$ получаем инвариантность подпространств $\mathcal{L}_\pm$ относительно оператора A.

В случае, когда $\mathcal{L}_+ \cap \mathcal{L}_- \neq \{0\}$ рассмотрим конечномерное инвариантное подпространство оператора V: $\mathcal{L} = \mathcal{L}_+ \cap \mathcal{L}_-$. Отметим, что из условия $1 \notin \sigma_p(V)$ следует равенство $(V - I)\mathcal{L} = \mathcal{L} \subset \mathrm{dom}\,A$, и потому $A\mathcal{L} \subset \mathcal{L}$. Последнее замечание позволяет перейти к рассмотрению фактор-пространства $\hat{\mathcal{H}} = \mathcal{L}^{[\perp]} / \mathcal{L}$, действующих в нем операторов $\hat{A}$ и $\hat{V}$ и подпространств $\hat{\mathcal{L}}_\pm = \mathcal{L}_\pm / \mathcal{L}$. Повторяя рассуждения, изложенные при доказательстве первой импликации, получим инвариантность $\hat{\mathcal{L}}_\pm$ относительно $\hat{A}$ и как следствие установим инвариантность $\mathcal{L}_\pm$ относительно A.

Остается убедиться в том, что каждая пара $\mathcal{M}_\pm$ максимальных семидефинитных инвариантных относительно A подпространств принадлежит $h^\pm$ соответственно. Пусть, например, $A(\mathcal{M}_+ \cap dom\,A) \subset \mathcal{M}_+$ и $\lambda \in \rho_\infty^+(A\,|_{\mathcal{M}_+}) \neq \varnothing$. Тогда $(A - \lambda I)\mathcal{M}_+ = \mathcal{M}_+$ и, значит, $(A - \lambda I)^{-1}\mathcal{M}_+ \subset \mathcal{M}_+$. Последнее в силу определения преобразования Кэли эквивалентно условию $V\mathcal{M}_+ \subset \mathcal{M}_+$. Таким образом, $\mathcal{M}_+ \in h^+$. Аналогично доказывается $\mathcal{M}_- \in h^-$.

Следствие. *Справедлива импликация:*

$$A \in \mathbf{H} \Leftrightarrow A^c \in \mathbf{H}.$$

Действительно, если, например, $A \in \mathbf{H}$, то существует пара подпространств $\mathcal{L}_\pm \in \mathcal{M}^\pm \cap h^\pm$ таких, что $A(\mathcal{L}_\pm \cap \mathrm{dom}\,A) \subset \mathcal{L}_\pm$ и $\rho_\infty^+(A\,|_{\mathcal{L}_\pm}) \neq \varnothing$. Далее, во-первых, следуя [2, Теорема 2.8.11], имеем $\mathcal{M}_\mp = \mathcal{L}_\pm^{[\perp]} \in \mathfrak{M}^\mp$; во-вторых, в силу утверждения [2, Предложение 2.1.11°] выполнено вложение $A^c(\mathcal{M}_\mp \cap \mathrm{dom}\,A^c) \subset \mathcal{M}_\mp$. В заключении заметим, что на основании [2, Теорема 2.1.16] имеет место неравенство $\rho_\infty^+(-A^c\,|_{\mathcal{M}_\pm}) \neq \varnothing$. Таким образом, нами установлено, что $A^c \in \mathbf{H}$.

Замечание. Доказанная лемма представляет собой аналог теоремы [2, Теорема 3.1.13], сформулированной для случая максимального J-диссипативного оператора класса L (в области определения которого содержится хотя бы одно максимальное равномерно положительное подпространство).

Ниже будем предполагать, что $\{\mathcal{U}_t\}_{t=0}^\infty$ — однопараметрическая J-бинесжимающая полугруппа класса C_0, т.е. $\mathcal{U}_{t+s} = \mathcal{U}_t\mathcal{U}_s$, $\mathcal{U}_0 = I$

и $\lim\limits_{t\to t_0}\mathcal{U}_t x = \mathcal{U}_{t_0}x$ для любого $x\in\mathcal{H}$ и все $\mathcal{U}_t$ — J-бинесжимающие операторы. Известно, что у такой полугруппы существует производящий оператор $-iA$, где A — J-диссипативный оператор. Скажем, что J-бинесжимающая полугруппа $\{\mathcal{U}_t\}_{t=0}^{\infty}$ класса C_0 удовлетворяет **условию** $\mathbf{H}$, если у элементов этой полугруппы есть общая пара максимальных семидефинитных инвариантных подпространств, и каждые такие подпространства принадлежат классу $h^{\pm}$ соответственно. Полугруппа $\{\mathcal{U}_t\}_{t=0}^{\infty}$ удовлетворяет **условию** $\mathbf{K}(\mathbf{H})$, если все элементы полугруппы коммутируют с одним и тем же J-бинесжимающим оператором класса $\mathbf{H}$.

Основным результатом данной работы является

Теорема. *Пусть* $\{\mathcal{U}_t\}_{t=0}^{\infty}$ *— однопараметрическая* J*-бинесжимающая полугруппа класса* C_0, *а* $-iA$ *— производящий оператор этой полугруппы. Тогда справедливы следующие имликации:*

a) $\{\mathcal{U}_t\}_{t=0}^{\infty}\in\mathbf{H}\Leftrightarrow A\in\mathbf{H}$;

b) $\{\mathcal{U}_t\}_{t=0}^{\infty}\in\mathbf{K}(\mathbf{H})\Leftrightarrow A\in\mathbf{K}(\mathbf{H})$.

Доказательство. *a*) Пусть $\{\mathcal{U}_t\}_{t=0}^{\infty}\in\mathbf{H}$. Согласно определению существуют подпространства $\mathcal{L}_{\pm}$ такие, что $\mathcal{L}_{\pm}\in\mathfrak{M}^{\pm}\cap h^{\pm}$ и $U_t\mathcal{L}_{\pm}\subset\mathcal{L}_{\pm}$ для каждого $t\in(0;\infty)$. Тогда для любого элемента $x\in\mathcal{L}_{\pm}$ имеем:

$$(A-\lambda I)^{-1}x=\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}U_t x dt\in\mathcal{L}_{\pm}.$$

Это эквивалентно тому, что $\mathcal{K}_{\lambda}(A)\mathcal{L}_{\pm}\in\mathcal{L}_{\pm}$, т.е. $\mathcal{K}_{\lambda}(A)\in\mathbf{H}$. Следовательно, согласно лемме 2 имеем $A\in\mathbf{H}$.

Если же $A\in\mathbf{H}$, т.е. можно указать подпространства $\mathcal{M}_{\pm}\in\mathfrak{M}^{\pm}\cap h^{\pm}$, удовлетворяющие условию $A(\mathcal{M}_{\pm}\cap\operatorname{dom}A)\subset\mathcal{M}_{\pm}$, то для любого $x\in\mathcal{M}_{\pm}$ и U_t выполнено равенство

$$U_t x=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{\infty}e^{\lambda t}(A-\lambda I)^{-1}x d\lambda\in\mathcal{M}_{\pm}.$$

Таким образом, $U_t\mathcal{M}_{\pm}\in\mathcal{M}_{\pm}$ и на основании леммы 2 имеем $\{\mathcal{U}_t\}_{t=0}^{\infty}\in\mathbf{H}$.

b) Пусть $\{\mathcal{U}_t\}_{t=0}^{\infty}\in\mathbf{K}(\mathbf{H})$. Это означает, что найдется оператор V из класса $\mathbf{H}$, коммутирующий с U_t для каждого $t\in(0;\infty)$. Поскольку $Ax=\lim\limits_{t\to t_0}\frac{U_t-I}{it}x$ $(x\in\operatorname{dom}A)$, то оператор A будет также коммутировать с V:

$$VAx=\lim_{t\to 0}V\frac{U_t-I}{it}x=\lim_{t\to 0}\frac{U_t-I}{it}Vx=AVx,$$

следовательно, $A\in\mathbf{K}(\mathbf{H})$.

Предположим, что $A\in\mathbf{K}(\mathbf{H})$. Тогда существует оператор $V\in\mathbf{H}$ такой, что $VA\subseteq AV$. Последнее условие эквивалентно равенству: $(A-\lambda)^{-1}V=V(A-\lambda)^{-1}$ при $\lambda\in\rho(A)$.

Отсюда для любого оператора U_t имеет место соотношение:

$$U_tVx=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{\infty}e^{\lambda t}(A-\lambda I)^{-1}xd\lambda V=$$
$$=V\frac{1}{2\pi i}\int_0^{\infty}e^{\lambda t}(A-\lambda I)^{-1}xd\lambda=VU_tx.$$

Теорема доказана полностью.

В качестве **примера** рассмотрим возникающую в некоторых приложениях задачу Коши:

$$\begin{cases}\ddot{x}+iB\dot{x}-Cx=0,\\ x(0)=x_0,\dot{x}(0)=\dot{x}_0;\end{cases}\qquad(1)$$

для дифференциального уравнения в гильбертовом пространстве $\mathcal{G}$. Здесь C — положительный непрерывный оператор, а $-B$ — диссипативный оператор.

Предположим, что выполнено хотя бы одно из условий:

а) C *— вполне непрерывный оператор, а точка* $\lambda=0$ *является нормальной точкой оператора* B *[2, Определение 2.1.4].*

б) $B=D+F$, где D^{-1} и $\overline{D^{-1}F}$ *— вполне непрерывные операторы.*

Рассмотрим элемент $x=C^{-1/2}z$, тогда $\dot{x}=C^{-1/2}\dot{z}$. Полагая $y=-iC^{-1/2}\dot{z}$, запишем задачу в виде:

$$\begin{pmatrix}\dot{z}\\ \dot{y}\end{pmatrix}=i\begin{pmatrix}0 & C^{1/2}\\ -C^{1/2} & B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z\\ y\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}z(0)\\ y(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C^{1/2}x_0\\ -i\dot{x}_0\end{pmatrix}.$$

Обозначим через

$$W=\begin{pmatrix}z\\ y\end{pmatrix},A=\begin{pmatrix}0 & C^{1/2}\\ -C^{1/2} & B\end{pmatrix},W(0)=W_0,$$

где

$$W_0=\begin{pmatrix}C^{1/2}x_0\\ -i\dot{x}_0\end{pmatrix}.$$

Тогда (1) примет вид:

$$\dot{W}=iAW,\ \ W(0)=W_0.\qquad(2)$$

Заметим, что оператор A является J-диссипативным в пространстве $\mathcal{H}=\mathcal{H}_+\oplus\mathcal{H}_-$,

$$\mathcal{H}_{\pm}=\mathcal{G},\ \ J=\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & -I\end{pmatrix}.$$

Покажем, что каждое из условий а) и б) влечет принадлежность оператора A классу **H**. Пусть, например, выполнено а). Тогда в силу выполненного условия $\mathcal{H}_+ \subset \operatorname{dom} A$ у оператора A существует инвариантное неотрицательное подпространство $\mathcal{L} = \{x + Kx\}_{x \in \mathcal{L}}$, где K — угловой оператор для $\mathcal{L}$. Условие инвариантности $A\mathcal{L} \subset \mathcal{L}$ эквивалентно тому, что для каждого $x \in \mathcal{H}^+$ найдется $y \in \mathcal{H}^+$, являющийся решением уравнения $A(x + Kx) = y + Ky$, т.е.:

$$\begin{pmatrix} 0 & C^{1/2} \\ -C^{1/2} & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ Kx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ Ky \end{pmatrix}.$$

Отсюда сразу следует равенство:

$$-C^{1/2} + BK - KC^{1/2}K = 0. \qquad (3)$$

Поскольку $\lambda = 0$ — регулярная точка оператора B, то умножая последнее равенство на B^{-1}, будем иметь:

$$-B^{-1}C^{1/2} + K - B^{-1}KC^{1/2}K = 0$$

или

$$K = B^{-1}C^{1/2} + B^{-1}KC^{1/2}K.$$

В силу компактности операторов, стоящих в правой части, делаем вывод о компактности оператора слева, т.е. оператора K. Остается воспользоваться результатами упражнения 18 [2, с. 84] и получить, что $\mathcal{L} \in h^+$. Таким образом, заключаем, что $A \in \mathbf{H}$.

Если же выполнено условие б), то подставляя в (3) вместо оператора B сумму $D + F$ и умножая затем на D^{-1}, снова будем иметь компактность оператора K. Следовательно, оператор $-iA$ является производящим для полугруппы $\{\exp(-itA)\}_{t=0}^{\infty} \in \mathbf{H}$ и решение задачи (2) представляется в виде $W(t) = \exp(-itA)W_0$. А потому, решение исходной задачи Коши (1) имеет вид $x(t) = C^{-1/2}PW(t)$, где P — проектор на $\mathcal{G} \oplus 0$.

Работа поддержана грантом РФФИ 02-01-00353.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Азизов Т.Я.* О J-унитарных группах, порождаемых J-самосопряженными операторами классов $\mathcal{H}$ и $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ / Т. Я. Азизов, Н. А. Гордиенко, И. С. Иохвидов. — Деп. ВИНИТИ, 1980, № 4213-80.

2. *Азизов Т.Я.* Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой / Т. Я. Азизов, И. С. Иохвидов. — М.: Наука, 1986. — 352 с.