УДК:517.986.6

О ТЕОРЕМЕ БИЕКЦИИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ*

© 2004 Б. Д. Гельман, Х. Р. Ал-Хашеми

Воронежский государственный университет
Воронежский государственный педагогический университет

В современной теории неподвижных точек многозначных отображений существуют два независимых подхода, гомологический и аппроксимативный. Настоящая статья посвящена развитию аппроксимативного метода. В ней доказывается теорема биекции для гомотопических классов однозначных и многозначных векторных полей. У этих полей главной частью является однозначное собственное отображение, а образы многозначного отображения лежат в некотором фиксированном семействе подмножеств.

Также в статье дается определение топологического инварианта на множестве многозначных векторных полей и доказывается теорема о продолжении и единственности топологического инварианта.

ВВЕДЕНИЕ

В современной теории неподвижных точек многозначных отображений существуют два независимых подхода, гомологический и аппроксимативный (см., например, [4]). Этим подходам посвящено большое количество работ. Аппроксимативный метод более прост в изложении и работе, чем гомологический, однако, требует более жестких условий на топологическую и геометрическую структуру образов многозначного отображения.

Настоящая статья посвящена развитию аппроксимативного метода. В ней, используя результаты работы [6], доказывается теорема биекции для гомотопических классов однозначных и многозначных векторных полей, у которых главной частью является однозначное собственное отображение, а образы многозначного отображения лежат в некотором фиксированном семействе подмножеств. Раннее теоремы биекции для некоторых классов многозначных векторных полей изучались в работах [1], [2], [7].

Также в статье дается определение топологического инварианта на множестве многозначных векторных полей и доказывается теорема о продолжении и единственности топологического инварианта.

* Работа поддержана грантом РФФИ 02-01-00189.

1. АППРОКСИМАЦИОННЫЕ СЕМЕЙСТВА МНОЖЕСТВ И СИСТЕМЫ МАЙКЛА

Пусть Y — метрическое пространство, обозначим тогда: $P(Y)$ — множество всех непустых подмножеств в Y; $C(Y)$ — множество всех непустых замкнутых подмножеств в Y.

Многозначное отображение метрического пространства X в метрическое пространство Y — это соответствие, сопоставляющее каждой точке $x \in X$ непустое подмножество $F(x) \subset Y$, называемое образом точки x, т.е. $F : X \to P(Y)$. В дальнейшем, если образы многозначного отображения F являются замкнутыми, то будем записывать это следующим образом, $F : X \to C(Y)$. Основные определения и свойства многозначных отображений содержатся, например, в работах [3], [5].

В этом разделе приведем некоторые результаты работы [6], в которой содержатся все подробные доказательства.

1.1. Определение. *Семейство подмножеств $A(Y)$ пространства Y будем называть аппроксимационным, если существует отображение $\lambda : P(Y) \to A(Y)$, сопоставляющее произвольному непустому подмножеству из Y некоторое подмножество из семейства $A(Y)$, удовлетворяющее следующим условиям:*

(A1) для любого $B \in A(Y)$ *множество* $\lambda(B) = B$;

(A2) если $B, C \in P(Y)$ *и* $C \subset B$, *то* $\lambda(C) \subset \lambda(B)$;

(A3) для любого $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *такое, что для любого множества* $B \subset Y$ *выполнено включение* $\lambda(U_\delta(B)) \subset \subset U_\varepsilon(\lambda(B))$.

(A4) для любого множества $B \subset Y$, *любой точки* $y \in \lambda(B)$ *и любого* $\varepsilon > 0$, *найдутся компактное подмножество* $B' \subset B$ *и точка* $y' \in \lambda(B')$ *такие, что* $\rho(y, y') < \varepsilon$.

Аппроксимационные семейства множеств обладают следующими свойствами.

1.2. Предложение. *Пусть* $A(Y)$ *— аппроксимационное семейство в пространстве* Y. *Тогда:*

1) для любого $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta > 0$ *такое, что если* $C \in A(Y)$ *и* $B \subset U_\delta(C)$, *то* $\lambda(B) \subset U_\varepsilon(C)$;

2) если многозначное отображение $F : X \to P(Y)$ *— полунепрерывно снизу, то многозначное отображение* $F^\lambda : X \to A(Y)$, $F^\lambda(x) = \lambda(F(x))$ *также полунепрерывно снизу.*

Пусть $F : X \to P(Y)$ — полунепрерывное сверху многозначное отображение.

1.3. Определение. *Многозначное полунепрерывное снизу отображение* $G : X \to P(Y)$ *будем называть полунепрерывной снизу* ε*-аппроксимацией отображения* F, *если выполнены следующие два условия:*

(i) $F(x) \subset G(x)$ для любого $x \in X$;

(ii) график $\Gamma(F_\varepsilon) \subset U_\varepsilon(\Gamma(F))$.

1.4. Теорема. *Пусть* $A(Y)$ *— аппроксимационное семейство подмножеств в метрическом пространстве* Y, *пусть* $F : X \to A(Y)$ *— полунепрерывное сверху многозначное отображение, тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует полунепрерывная снизу* ε*-аппроксимация* $F_\varepsilon : X \to A(Y)$ *такая, что образ* $F_\varepsilon(X) \subset \lambda(F(X))$.

Пусть $F : X \to P(Y)$ — некоторое многозначное отображение.

1.5. Определение. *Непрерывное отображение* $f : X \to Y$ *называется непрерывным сечением многозначного отображения* F, *если для любой точки* $x \in X$ *выполнено включение* $f(x) \in F(x)$.

Пусть $M(Y)$ — семейство подмножеств в Y.

1.6. Определение. *Будем говорить, что семейство подмножеств* $M(Y)$ *является системой Майкла, если выполнено следующее условие:*

(M) для любого метрического пространства X, *полунепрерывного снизу многозначного отображения* $F : X \to M(Y)$, *замкнутого подмножества* $A \subset X$ *и непрерывного сечения* $f : A \to Y$ *многозначного отображения* $F|_A$, *существует непрерывное сечение* $g : X \to Y$ *многозначного отображения* F *такое, что* $g|_A = f$.

1.7. Определение. *Будем говорить, что система подмножеств* $M(Y)$ *является сильной системой Майкла, если эта система одновременно является системой Майкла и аппроксимационным семейством в* Y. *Сильную систему Майкла будем обозначать* $AM(Y)$.

Сильные системы Майкла тесно связаны с проблемой существования однозначных ε-аппроксимаций многозначных отображений. Дадим определение.

1.8. Определение. *Непрерывное однозначное отображение* $f : X \to Y$ *называется однозначной* ε*-аппроксимацией многозначного отображения* F, *если график* $\Gamma_X(f)$ *отображения* f *принадлежит* ε*-окрестности графика* $\Gamma_X(F)$ *многозначного отображения* F.

Из теоремы 1.3 и определения сильной системы Майкла вытекает следующая теорема.

1.8. Теорема. *Пусть многозначное отображение* $F : X \to AM(Y)$ *полунепрерывно сверху, тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *у* F *существует однозначная* ε*-аппроксимация* f_ε *и* $f_\varepsilon(X) \subset \lambda(F(X))$.

2. ГОМОТОПИЧЕСКИЕ КЛАССЫ. ТЕОРЕМА БИЕКЦИИ

Пусть X — метрическое пространство, E — банахово пространство.

2.1. Определение. *Многозначное полунепрерывное сверху отображение* $\Phi : X \to C(E)$ *называется собственным, если для любого компактного множества* $K \subset E$ *полный прообраз* $\Phi_\Pi^{-1}(K) = \{x \in X \mid \Phi(x) \cap K \neq \varnothing\}$ *является компактным множеством.*

Рассмотрим следующий важный пример собственного многозначного отображения. Обозначим $K(E)$ — множество всех непустых компактных подмножеств в E. Пусть $v : X \to E$ — непрерывное собственное однозначное отображение, $F : X \to K(E)$ —

полунепрерывное сверху компактное многозначное отображение, т.е. образ $\overline{F(X)}$ является компактом в E.

2.2. Лемма. *Многозначное отображение $\Phi(x) = v(x) - F(x)$ является собственным многозначным отображением.*

Доказательство. Пусть K — произвольный компакт в E, пусть последовательность $\{x_n\} \subset F_{\Pi}^{-1}(K)$. Тогда существуют точки $y_n \in (\Phi(x_n) \cap K)$. В силу компактности множества K без ограничения общности будем считать, что последовательность $y_n \to y_* \in K$. Рассмотрим точки $z_n = v(x_n) + y_n \in F(x_n)$. Так как многозначное отображение F является компактным, то без ограничения общности будем также считать, что последовательность $z_n \to z_*$. Тогда последовательность $v(x_n) = z_n - y_n$ сходится к точке $z_* - y_*$. Следовательно, в силу собственности отображения v, из последовательности x_n можно выбрать сходящуюся подпоследовательность, что и доказывает собственность отображения Φ.

Нам понадобится следующие свойства собственных многозначных отображений.

2.3. Лемма. *Если многозначное отображение $\Phi : X \to C(Y)$ является собственным, то оно имеет замкнутый график.*

Доказательство. Пусть последовательности таковы, что $\{x_n\} \subset X$, $x_n \to x_0$, $y_n \in \Phi(x_n)$, $y_n \to y_0$. Рассмотрим компактное множество $K = \overset{\infty}{\underset{n=0}{\cup}} y_n$. В силу собственности многозначного отображения Φ множество $\Phi_{\Pi}^{-1}(K) \subset X$ также является компактным, следовательно, замкнутым. Тогда, очевидно, что $x_0 \in \Phi_{\Pi}^{-1}(K)$, т.е. $F(x_0) \cap K \neq \varnothing$. Покажем, что $F(x_0) \ni y_0$. Предположим противное, тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что $U_{\varepsilon}(y_0) \cap F(x_0) = \varnothing$. Так как $y_n \to y_0$, то существует номер n_0 такой, что $y_n \notin F(x_0)$ при $n \geq n_0$.

С другой стороны, если рассмотреть компакт $K_1 = \overset{\infty}{\underset{n=n_0}{\cup}} y_n$, то множество $\Phi_{\Pi}^{-1}(K_1) \subset X$ также является компактным и содержит точку x_0. Полученное противоречие и доказывает лемму.

2.4. Лемма. *Пусть $A \subset X$ — замкнутое подмножество, $B \subset Y$ — компактное подмножество. Пусть $\Phi : X \to C(Y)$ собственное многозначное отображение такое, что $\Phi(x) \cap B = \varnothing$ для любого $x \in A$. Тогда существует положительное число ε_0 такое, что $U_{\varepsilon_0}(\Gamma_X(\Phi)) \cap (A \times B) = \varnothing$, где $U_{\varepsilon_0}(\Gamma_X(\Phi))$ — ε_0-окрестность графика многозначного отображения Φ.*

Доказательство. Предположим противное, тогда существуют последовательности $x_n \in U_{1/n}(A)$ и $y_n \in \Phi(x_n)$ такие, что $\rho(y_n, B) < 1/n$. Обозначим точки $y_n' \in B$ такие, что $\rho(y_n, y_n') < 1/n$. В силу компактности множества B без ограничения общности можно считать, что последовательность $y_n' \to y_* \in B$. Тогда и последовательность $y_n \to y_*$. Рассмотрим компактное множество $K = (\underset{n}{\cup} y_n) \cup y_*$. В силу собственности отображения Φ, множество $\Phi_{\Pi}^{-1}(K)$ является компактным. Так как точки $x_n \in \Phi_{\Pi}^{-1}(K)$, то без ограничения общности можно считать, что последовательность $x_n \to x_* \in A$. Тогда, в силу замкнутости графика отображения Φ, получаем, что $(x_*, y_*) \in \Gamma_X(\Phi)$, т.е. $(\Phi(x_*) \cap B) \ni y_*$. Это противоречит условиям леммы.

Дадим следующее определение.

2.5. Определение. *Семейство подмножеств $\mathcal{P}(Y)$ назовем АМН-семейством, если:*

(H1) семейство $\mathcal{P}(Y)$ является сильной системой Майкла;

(H2) для любого компактного множества $A \in \mathcal{P}(Y)$ множество $\lambda(A)$ также является компактным;

(H3) произвольная точка $y \in Y$ принадлежит семейству $\mathcal{P}(Y)$, т.е. $\{y\} \in \mathcal{P}(Y)$ для любой точки $y \in Y$.

2.6. Предложение. *Пусть $\mathcal{P}(Y)$ — АМН-семейство в пространстве Y. Тогда для любого полунепрерывного сверху многозначного отображения $F : X \to K(Y)$ многозначное отображение $F^{\lambda} : X \to \mathcal{P}(Y)$, $F^{\lambda}(x) = \lambda(F(x))$, также полунепрерывно сверху.*

Доказательство. Пусть U — произвольное открытое множество в Y. Покажем, что малый прообраз $(F^{\lambda})_M^{-1}(U)$ является открытым множеством в X. Действительно, пусть точка $x_0 \in (F^{\lambda})_M^{-1}(U)$, т.е. $F^{\lambda}(x_0) \subset U$. Так как множество $F^{\lambda}(x_0)$ является компактным, то существует такое положительное число η, что η-окрестность $U_{\eta}(F^{\lambda}(x_0)) \subset U$. В силу полунепрерывности сверху многозначного отображения F и свойства c) аппроксимационного семейства, существуют $\varepsilon > 0$ и $\delta = \delta(\eta) > 0$ такое, что для любой точки $x \in X$ такой, что $\rho(x, x_0) < \varepsilon$ выполнены включения: $F(x) \subset U_{\delta}(F(x_0))$ и

$\lambda(U_\delta(F(x_0))) \subset U_\eta(\lambda(F(x_0))) \subset U$. Следовательно, $F^\lambda(x) = \lambda(F(x)) \subset U_\eta(\lambda(F(x_0))) \subset U$ если $\rho(x, x_0) < \varepsilon$. Это и доказывает полунепрерывность сверху отображения F.

Пусть $v : X \to E$ — фиксированное собственное однозначное отображение, $P(E)$ — АМН-семейство в E. Пусть $F : X \to P(E)$ — полунепрерывное сверху компактное многозначное отображение. Рассмотрим многозначное собственное отображение $\Phi = v - F : X \to \mathcal{P}(E)$. Такое отображение будем называть многозначным компактным векторным полем с главной частью v и компактной частью F. Пусть A — замкнутое подмножество в X, а B — компактное подмножество в E. В дальнейшем, будем считать, если не оговорено противное, что многозначные отображения имеют образы из семейства $\mathcal{P}(E)$.

2.7. Определение. *Будем говорить, что многозначное компактное векторное поле* Φ *допустимо относительно пар* (X, A) *и* $(E, E \setminus B)$, *если* $\Phi(A) \subset (E \setminus B)$.

Обозначим $\mathcal{D}_\mathcal{P}((X, A); (E, E \setminus B))$ множество допустимых многозначных компактных векторных полей с главной частью v.

2.8. Определение. *Пусть* $\Phi_0 = v - F_0$, $\Phi_1 = v - F_1 \in \mathcal{D}_\mathcal{P}((X, A); (E, E \setminus B))$. *Будем говорить, что поле* Φ_0 *гомотопно полю* Φ_1, $(\Phi_0 \sim \Phi_1)$, *если существует полунепрерывное сверху компактное отображение* $K : X \times [0,1] \to \mathcal{P}(E)$ *такое, что:*

а) $\Phi_0(x) = v(x) - K(x, 0)$, $\Phi_1(x) = v(x) - K(x, 1)$ *для любого* $x \in X$;

б) $(v(x) - K(x, t)) \cap B = \varnothing$ *для любых* $x \in A$ *и* $t \in [0,1]$.

Нетрудно проверить, что отношение гомотопности полей является отношением эквивалентности в множестве $\mathcal{D}_\mathcal{P}((X, A); (E, E \setminus B))$, т.е. удовлетворяет условиям:

a) $\Phi \sim \Phi$;

b) если $\Phi_0 \sim \Phi_1$, то $\Phi_1 \sim \Phi_0$;

c) если $\Phi_0 \sim \Phi_1$ и $\Phi_1 \sim \Phi_2$, то $\Phi_0 \sim \Phi_2$.

Тогда множество $\mathcal{D}_\mathcal{P}((X, A); (E, E \setminus B))$ распадается на множество непересекающихся гомотопических классов

$$[\Phi]_P = \{\tilde{\Phi} \in \mathcal{D}_\mathcal{P}((X, A); (E, E \setminus B)) \mid \tilde{\Phi} \sim \Phi\}.$$

Обозначим множество различных гомотопических классов $\Pi_\mathcal{P}[(X, A); (E, E \setminus B)]$.

В силу свойства (Н3) определения АМН-системы, однозначные непрерывные компактное отображения являются частными случаями полунепрерывных сверху компактных многозначных отображений. Следовательно, в множестве $\mathcal{D}_\mathcal{P}((X, A); (E, E \setminus B))$ выделяется подмножество $\mathcal{D}_0((X, A); (E, E \setminus B))$ — множество допустимых однозначных непрерывных компактных векторных полей $\varphi = v - f$ с главной частью v и компактной частью f.

В этом подмножестве $\mathcal{D}_0((X, A); (E, E \setminus B))$ также можно определить отношение гомотопности, предполагая, что K является однозначным компактным непрерывным отображением. Тогда множество $\mathcal{D}_0((X, A); (E, E \setminus B))$ также распадается на множество непересекающихся гомотопических классов $[\varphi]_0$. Обозначим это множество $\Pi_0[(X, A); (E, E \setminus B)]$.

Пусть поле $\varphi = v - f \in \mathcal{D}_0((X, A); (E, E \setminus B))$, тогда гомотопический класс $[\varphi]_0$ поля φ из множества $\Pi_0[(X, A); (E, E \setminus B)]$ вкладывается в гомотопический класс $[\varphi]_\mathcal{P}$ этого поля из множества $\Pi_\mathcal{P}[(X, A); (E, E \setminus B)]$. Возникает отображение вложения множества $\Pi_0[(X, A); (E, E \setminus B)]$ во множество $\Pi_\mathcal{P}[(X, A); (E, E \setminus B)]$.

2.8. Теорема. *Отображение вложения* $\tau : \Pi_0[(X, A); (E, E \setminus B)] \to \Pi_\mathcal{P}[(X, A); (E, E \setminus B)]$, *устанавливает биективное соответствие между этими множествами.*

Доказательство. Докажем сюръективность отображения τ. Пусть $\Phi = v - F \in \mathcal{D}_\mathcal{P}((X, A); (E, E \setminus B))$, тогда, в силу леммы 2.3, существует положительное число ε_0 такое, что $U_{\varepsilon_0}(\Gamma_X(\Phi)) \cap (A \times B) = \varnothing$. В силу теоремы 1.3, существует полунепрерывное снизу многозначное отображение $F_{\varepsilon_0} : X \to \mathcal{P}(E)$ удовлетворяющее следующим условиям:

1) $F(x) \subset F_{\varepsilon_0}(x)$ для любого $x \in X$;

2) график $\Gamma_X(F_{\varepsilon_0}) \subset U_{\varepsilon_0}(\Gamma_X(F))$.

3) $F_{\varepsilon_0}(X) \subset \lambda(F(X))$.

Рассмотрим поле $\Phi_{\varepsilon_0}(x) = v(x) - F_{\varepsilon_0}(x)$. Очевидно, что график $\Gamma_X(\Phi_{\varepsilon_0}) \subset U_{\varepsilon_0}(\Gamma_X(\Phi))$. Следовательно, $\Gamma_X(\Phi_{\varepsilon_0}) \cap (A \times B) = \varnothing$.

В силу теоремы 1.9, многозначное отображение F_{ε_0} имеет непрерывное сечение f_{ε_0}.

Рассмотрим многозначное отображение $F_1(x) = f_{\varepsilon_0}(x) \cup F(x)$. Очевидно, что это отображение полунепрерывно сверху и имеет компактные образы. Следовательно, многозначное отображение $F_1^\lambda : X \to \mathcal{P}(E)$, $F_1^\lambda(x) = \lambda(F_1(x))$, также полунепрерывно сверху. Так как $F_1(x) \subset F_{\varepsilon_0}(x)$, то, в силу свойства (А2), выполняется включение $F_1^\lambda(x) \subset F_{\varepsilon_0}(x)$.

Рассмотрим гомотопию

$$\Psi(x,t)=\begin{cases} v(x)-f_{\varepsilon_0}(x), & \text{если } t\in[0,1/3),\\ v(x)-F_1^{\lambda}(x), & \text{если } t\in[1/3,2/3],\\ v(x)-F(x), & \text{если } t\in(2/3,1].\end{cases}$$

Нетрудно видеть, что это отображение полунепрерывно сверху, образы его принадлежат $\mathcal{P}(E)$ и оно является вполне непрерывным.

Так как $\Psi(x,t)\subset\Phi_{\varepsilon_0}(x)=v(x)-F_{\varepsilon_0}(x)$ для любых $x\in X$ и $t\in[0,1]$, то $\Psi(x,t)\cap B=\varnothing$ для любых $x\in A$ и $t\in[0,1]$. Следовательно, $\tau([v-f_{\varepsilon_0}]_0)=[\Phi]\in\Pi_{\mathcal{P}}[(X,A);(E,E\setminus B)]$, где $[v-f_{\varepsilon_0}]_0$ — гомотопический класс отображения $v-f_{\varepsilon_0}$ из множества $\Pi_0[(X,A);(E,E\setminus B)]$.

Докажем теперь инъективность отображения τ. Пусть даны два отображения $f_0,f_1:X\to\to E$ такие, что $\varphi_i=v-f_i\in\mathcal{D}_0((X,A);(E,E\setminus B))$, где $i=0,1$. Пусть $\tau([\varphi_0]_0)=\tau([\varphi_1]_0)$. Докажем тогда, что отображения φ_0 и φ_1 гомотопны в $\Pi_0((X,A);(E,E\setminus B))$.

Действительно, если $\tau([\varphi_0]_0)=\tau([\varphi_1]_0)$, то существует полунепрерывное сверху компактное отображение $K:X\times[0,1]\to\mathcal{P}(E)$ такое, что:

а) $\varphi_0(x)=v(x)-K(x,0)$, $\varphi_1(x)=v(x)-K(x,1)$ для любого $x\in X$;

б) $(v(x)-K(x,t))\cap B=\varnothing$ для любых $x\in A$ и $t\in[0,1]$.

Очевидно, что многозначное отображение $\Psi=v-K:X\times[0,1]\to\mathcal{P}(E)$ является собственным и для любых $x\in A$, $t\in[0,1]$ пересечение $\Psi(x,t)\cap B=\varnothing$. Тогда существует $\varepsilon_0>0$ такое, что $U_{\varepsilon_0}(\Gamma_{X\times[0,1]}(\Psi))\cap(A\times[0,1]\times B)=\varnothing$.

В силу теоремы 1.3, существует полунепрерывное снизу многозначное отображение $F_{\varepsilon_0}:X\times[0,1]\to\mathcal{P}(E)$ удовлетворяющее следующим условиям:

1) $K(x,t)\subset F_{\varepsilon_0}(x,t)$ для любых $x\in X$ и $t\in[0,1]$;

2) график $\Gamma_{X\times[0,1]}(F_{\varepsilon_0})\subset U_{\varepsilon_0}(\Gamma_{X\times[0,1]}(K))$.

3) $F_{\varepsilon_0}(X\times[0,1])\subset\lambda(K(X\times[0,1]))$.

На множестве $\tilde{A}=(X\times 0)\cup(X\times 1)$ у многозначного отображения F_{ε_0} существует непрерывное сечение $\tilde{f}:\tilde{A}\to E$, где $\tilde{f}(x,i)=f_i(x)$. В силу определения АМН-системы, сечение $\tilde{f}$ может быть продолжено на все множество $X\times[0,1]$. Обозначим это продолжение также $\tilde{f}$.

Рассмотрим отображение $\Psi_{\varepsilon_0}(x,t)==v(x)-F_{\varepsilon_0}(x,t)$. Очевидно, что график $\Gamma_{X\times[0,1]}(\Psi_{\varepsilon_0})\subset\subset U_{\varepsilon_0}(\Gamma_{X\times[0,1]}(\Psi))$. Следовательно, $\Psi_{\varepsilon_0}(x,t)\cap\cap(A\times B)=\varnothing$ для любых $x\in A$, $t\in[0,1]$.

Рассмотрим гомотопию $\psi(x,t)=v(x)-\tilde{f}(x,t)\in\in\Psi_{\varepsilon_0}(x,t)$, которая соединяет поля φ_0 и φ_1 в $\Pi_0((X,A);(E,E\setminus B))$, что и доказывает теорему.

3. О ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ИНВАРИАНТАХ МНОГОЗНАЧНЫХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

Теорема биекции играет основопологающую роль в построении топологических инвариантов многозначных векторных полей. Рассмотрим абстрактную схему этого построения.

Пусть задано некоторое отображение
$\gamma:\mathcal{D}_0((X,A);(E,E\setminus B))\to G$,
где G — некоторое множество.

Будем называть отображение γ топологическим инвариантом, если из того, что $\varphi_0,\varphi_1\in\mathcal{D}_0((X,A);(E,E\setminus B))$ и $\varphi_0\sim\varphi_1$, вытекает, что $\gamma(\varphi_0)=\gamma(\varphi_1)$.

Таким образом, топологический инвариант γ порождает отображение множества гомотопических классов $\Pi_0[(X,A);(E,E\setminus B)]$ в множество G. Это отображение будем обозначать той же буквой γ.

Пусть G_0 некоторое подмножество в G.

3.1. Определение. *Будем говорить, что множество G_0 является существенным для топологического инварианта γ, если для любого поля $\varphi\in\mathcal{D}_0((X,A);(E,E\setminus B))$, из того что $\gamma(\varphi)\in G_0$, вытекает, что $B\subset\varphi(X)$.*

Аналогично можно определить понятие топологического инварианта на множестве $\mathcal{D}_{\mathcal{P}}((X,A);(E,E\setminus B))$.

Имеет место следующая теорема о продолжении и единственности топологических инвариантов.

3.2. Теорема. *Пусть топологический инвариант*

$$\gamma:\mathcal{D}_0((X,A);(E,E\setminus B))\to G$$

такой, что множество $G_0\subset G$ является для него существенным. Тогда существует единственный топологический инвариант

$$\tilde{\gamma}:\mathcal{D}_{\mathcal{P}}((X,A);(E,E\setminus B))\to G$$

такой, что:

(a) если $\varphi=v-f$ — однозначное векторное поле, то $\gamma(\varphi)=\tilde{\gamma}(\varphi)$;

(b) если $\Phi=v-F\in\mathcal{D}_{\mathcal{P}}((X,A);(E,E\setminus B))$ и $\tilde{\gamma}(\Phi)\in G_0$, то $B\subset\Phi(X)$, т.е. множество G_0 также является существенным для $\tilde{\gamma}$.

Доказательство. Определим отображение $\tilde{\gamma}$ следующим образом:

$$\tilde{\gamma}(\Phi) = \gamma(\tau^{-1}([\Phi])).$$

Очевидно, что это отображение определено корректно и является топологическим инвариантом на $\mathcal{D}((X,A);(E,E\setminus B))$, причем, если $\varphi = v - f$ — однозначное векторное поле, то $\gamma(\varphi) = \tilde{\gamma}(\varphi)$.

Покажем теперь, что множество G_0 является существенным для топологического инварианта $\tilde{\gamma}$. Предположим противное, тогда существует такое многозначное векторное поле $\Phi = v - F \in \mathcal{D}((X,A);(E,E\setminus B))$ такое, что $\gamma(\Phi)\in G_0$ и $B \not\subset \Phi(X)$. Следовательно, существует точка $u_0 \in B$ такая, что $u_0 \notin \Phi(x)$ для любого $x \in X$.

В силу леммы 2.3, существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что $U_{\varepsilon_0}(\Gamma_X(F)) \cap (X \times u_0) = \varnothing$.

В силу теоремы 1.3, существует полунепрерывное снизу многозначное отображение $F_{\varepsilon_0} : X \to \mathcal{P}(E)$ удовлетворяющее следующим условиям: 1) $F(x) \subset F_{\varepsilon_0}(x)$ для любого $x \in X$; 2) график $\Gamma_X(F_{\varepsilon_0}) \subset U_{\varepsilon_0}(\Gamma_X(K))$; 3) $F_{\varepsilon_0}(X) \subset \lambda(F(X))$.

Рассмотрим поле $\Phi_{\varepsilon_0}(x) = v(x) - F_{\varepsilon_0}(x)$. Очевидно, что график $\Gamma_X(\Phi_{\varepsilon_0}) \subset U_{\varepsilon_0}(\Gamma_X(\Phi))$. Следовательно, $\Gamma_X(\Phi_{\varepsilon_0}) \cap (X \times u_0) = \varnothing$.

В силу теоремы 1.8, многозначное отображение F_{ε_0} имеет непрерывное сечение f_{ε_0}.

Рассмотрим многозначное отображение $F_1(x) = f_{\varepsilon_0}(x) \cup F(x)$. Очевидно, что это отображение полунепрерывно сверху и имеет компактные образы. Следовательно, многозначное отображение $F_1^{\lambda} : X \to \mathcal{P}(E)$, $F_1^{\lambda}(x) = \lambda(F_1(x))$, также полунепрерывно сверху. Так как $F_1(x) \subset F_{\varepsilon_0}(x)$, то, в силу свойства (A2), выполняется включение $F_1^{\lambda}(x) \subset F_{\varepsilon_0}(x)$.

Рассмотрим гомотопию

$$\Psi(x,t) = \begin{cases} v(x) - f_{\varepsilon_0}(x), & \text{если } t \in [0,1/3), \\ v(x) - F_1^{\lambda}(x), & \text{если } t \in [1/3,2/3], \\ v(x) - F(x), & \text{если } t \in (2/3,1]. \end{cases}$$

Так как $\Psi(x,t) \subset \Phi_{\varepsilon_0}(x)$ для любых $x \in X$ и $t \in [0,1]$, то $\Psi(x,t) \cap u_0 = \varnothing$ для любых $x \in A$ и $t \in [0,1]$. Следовательно,

$$\tau([v - f_{\varepsilon_0}]_0) = [\Phi]_{\mathcal{P}} \in \Pi_{\mathcal{P}}[(X,A);(E,E\setminus B)],$$

где $[v - f_{\varepsilon_0}]_0$ — гомотопический класс отображения $v - f_{\varepsilon_0}$ из множества $\Pi_0[(X,A);(E,E\setminus B)]$.

Так как

$$\gamma(v - f_{\varepsilon_0}) = \tilde{\gamma}(v - f_{\varepsilon_0}) = \tilde{\gamma}(\Phi) \in G_0,$$

то $u_0 \in B \subset (v - f_{\varepsilon_0})(X)$. Следовательно, пересечение

$$\Gamma_X(v - f_{\varepsilon_0}) \cap (X \times u_0) \neq \varnothing.$$

Тогда и пересечение

$$\Gamma_X(\Phi_{\varepsilon_0}) \cap (X \times u_0) \neq \varnothing.$$

Полученное противоречие и доказывает существенность топологического инварианта $\tilde{\gamma}$.

Проверим теперь единственность топологического инварианта $\tilde{\gamma}$. Предположим, что существуют два топологических инварианта $\tilde{\gamma}_1$ и $\tilde{\gamma}_2$, удовлетворяющих условиям теоремы. Пусть поле $\Phi \in \mathcal{D}_{\mathcal{P}}((X,A);(E,E\setminus B))$ и $\varphi \in \mathcal{D}_0((X,A);(E,E\setminus B))$ такое однозначное векторное поле, что $\tau([\varphi]_0) = [\Phi]_{\mathcal{P}}$. Тогда,

$$\gamma(\varphi) = \tilde{\gamma}_1(\Phi) = \tilde{\gamma}_2(\Phi),$$

откуда и вытекает утверждение теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Борисович Ю.Г.* Современный подход к теории топологических характеристик нелинейных операторов. I. // Геом. и теория особенностей в нелинейных уравнениях. Воронеж, ВГУ. 1987. С. 24—46.

2. *Борисович Ю.Г.* Современный подход к топологических характеристик нелинейных операторов. II. // Глобал. анал. и нелинейн. уравнения. Воронеж, ВГУ. 1988. С. 22—43.

3. *Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В.* Введение в теорию многозначных отображений / Воронеж: Изд-во ВГУ, 1986. — 102 с.

4. *Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В.* Топологические методы в теории неподвижных точек многозначных точек многозначных отображений// Успехи мат. наук. 1980. Т. 35, № 1. С. 59—126.

5. *Гельман Б.Д.* Непрерывные сечения и аппроксимации многозначных отображений// Вестник ВГУ, серия физика, матем. — 2002. № 2. — С. 50—55.

6. *Гельман Б.Д., Ал-Хашеми Х.Р.* Об аппроксимациях многозначных отображений// Вестник ВГУ, серия физика, матем. — 2003. № 2. — С. 136—143.

7. *Дмитриенко В.Т.* Гомотопическая классификация одного класса многозначных отображений / Воронеж, 1980, 18 с. Рукопись представлена Воронеж. ун-том. Деп. в ВИНИТИ 27 мая 1980, N2092-80.