ВЕСТНИК ВГУ, Серия: Физика, математика, 2004, № 2

УДК 62-50

ПОСТРОЕНИЕ РЕГУЛЯТОРА ДЛЯ ОБЪЕКТА С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ ПО ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ ЗАМКНУТОЙ СИСТЕМЫ

© 2004 А. В. Дылевский, Г. И. Лозгачев

Воронежский государственный университет

Для объекта с распределенными параметрами рассматривается метод построения модального регулятора, обеспечивающий заданное распределение корней характеристического уравнения замкнутой системы. Процедура синтеза позволяет получить передаточную функцию регулятора непосредственно по передаточной функции объекта. Метод синтеза регулятора сводится к решению интерполяционной задачи.

ВВЕДЕНИЕ

В современной теории автоматического управления все больший удельный вес получают системы, описываемые дифференциальными уравнениями в частных производных. Это объясняется тем, что задачи управления объектами с распределенными параметрами возникают в самых различных областях науки и техники [1, 2]. Настоящая статья посвящена методу синтеза распределенных систем управления с помощью передаточных функций. Предлагаемый метод дает возможность проектировать не только свободное, но и вынужденное движение замкнутой системы управления, учитывая априорную информацию о задающих воздействиях и внешних возмущениях. Класс реализуемых модальных регуляторов, полученный с помощью рассматриваемого в данной статье метода, включает регуляторы Смита для объектов с запаздыванием [3, 4].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Обозначим через $\mathcal{R}_n$ множество алгебраических многочленов степени n над полем действительных чисел. Пусть передаточная функция объекта управления имеет вид

$$W(s) = W_0(s)\Psi(s), \tag{1}$$

где

$$W_0(s) = \frac{B(s)}{A(s)}, \quad A(s) \in \mathcal{R}_m,\ B(s) \in \mathcal{R}_l,\ m \geq l, \tag{2}$$

функция $\Psi(s)$ комплексной переменной s является аналитической в правой полуплоскости и на мнимой оси.

Для заданной передаточной функции $W(s)$ объекта управления (1) и заданного полинома $D(s) \in \mathcal{R}_n$ требуется определить дробно-рациональную передаточную функцию реализуемого регулятора

$$V_0(s) = \frac{M(s)}{N(s)} \tag{3}$$

с компенсирующей обратной связью, чтобы передаточная функция замкнутой системы управления по управляющему воздействию, блок-схема которой изображена на рис., имела вид

$$\Phi(s) = \frac{M(s)B(s)}{D(s)}\Psi(s) \tag{4}$$

и учитывала полезную информацию о задающих воздействиях $g(t)$ и внешних возмущениях $f(t)$. Следуя принципу поглощения [5], классы задающих воздействий и внешних возмущений описываются линейными дифференциальными операторами $L_1(p)$ и $L_2(p)$, аннулирующими соответственно задание $g(t)$ и возмущение $f(t)$, т.е.

$$L_1(p)g(t) = 0, \quad L_2(p)f(t) = 0, \quad p = \frac{d}{d\,t}. \tag{5}$$

Конкретные представители классов задающих и возмущающих воздействий определяются начальными условиями дифференциальных уравнений (5).

2. СИНТЕЗ МОДАЛЬНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ

Для решения поставленной задачи воспользуемся методом синтеза модальных ре-

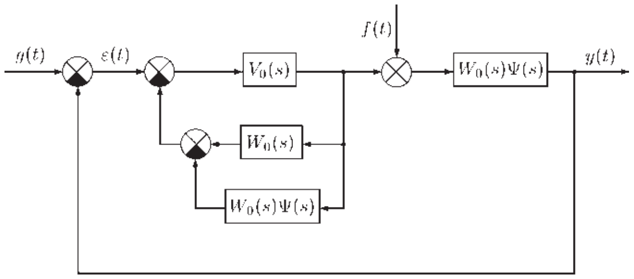

Рис.

гулятров, изложенным в [6—8]. На основе блок-схемы (см. рис.) можно получить зависимость между $Y(s)$, $G(s)$ и $F(s)$

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{V_0(s)W(s)}{1+W_0(s)V_0(s)}G(s) + \\ &+ \frac{W(s)[1+V_0(s)(W_0(s)-W(s))]}{1+W_0(s)V_0(s)}F(s). \end{aligned} \tag{6}$$

Отсюда находим передаточную функцию замкнутой системы по заданию

$$\Phi(s) = \frac{V_0(s)W(s)}{1+W_0(s)V_0(s)}.$$

Принимая во внимание условие (4) и формулы (1)—(3), получаем полиномиальное уравнение для многочленов $M(s)$ и $N(s)$:

$$M(s)B(s) + N(s)A(s) = D(s). \tag{7}$$

Решение этого полиномиального уравнения будем искать в виде

$$\begin{aligned} M(s) &= M_0(s) - A(s)C(s), \\ N(s) &= N_0(s) + B(s)C(s), \end{aligned} \tag{8}$$

где $C(s)$ — произвольный многочлен, $C(s) \in \mathcal{R}_{k-1}$; $M_0(s)$ и $N_0(s)$ являются решениями следующего уравнения:

$$M_0(s)B(s) + N_0(s)A(s) = D(s). \tag{9}$$

Введем в рассмотрение функцию

$$\chi_{ml} = \begin{cases} 1, & m > l, \\ 0, & m = l. \end{cases}$$

Имеет место следующая теорема [8].

Теорема 1. *Если многочлены $A(s) \in \mathcal{R}_m$ и $B(s) \in \mathcal{R}_l$, $m \ge l$, взаимно простые, то для любого полинома $D(s) \in \mathcal{R}_n$, $n \ge 2m - \chi_{ml}$, существует единственная пара многочленов $M_0(s) \in \mathcal{R}_{m-1}$ и $N_0(s) \in \mathcal{R}_{n-m}$, являющаяся решением полиномиального уравнения (9).*

Таким образом,

$$V_0(s) = \frac{M(s)}{N(s)} = \frac{M_0(s) - A(s)C(s)}{N_0(s) + B(s)C(s)} \tag{10}$$

и соответствующая передаточная функция регулятора $V(s)$ с компенсирующей обратной связью приобретает вид

$$V(s) = \frac{V_0(s)}{1+V_0(s)W_0(s)[1-\Psi(s)]}, \tag{11}$$

или, учитывая формулы (2), (8), (10), получаем

$$\begin{aligned} V(s) &= \frac{M(s)A(s)}{D(s) - M(s)B(s)\Psi(s)} = \\ &= \frac{[M_0(s) - A(s)C(s)]A(s)}{D(s) - [M_0(s) - A(s)C(s)]B(s)\Psi(s)}. \end{aligned} \tag{12}$$

Условие реализуемости передаточной функции регулятора (10) определяется следующим условием [8]:

$$n \ge 2m + \chi_{ml} + k. \tag{13}$$

3. ПОСТРОЕНИЕ РЕГУЛЯТРОВ ПРИ ЗАДАННЫХ КЛАССАХ ВНЕШНИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

Для повышения качества управления определим передаточную функцию регулятора, использующего полезную информацию о задающих воздействиях и внешних возмущениях. Обозначим через $\lambda_i \in \mathbb{C}, i = \overline{1,\mu}$, различные корни кратности ν_i многочлена $L(s) = L_1(s)L_2(s) \in \mathcal{R}_r$,

$$\sum_{i=1}^{\mu} \nu_i = r,$$

и рассмотрим интерполяционную задачу

$$[D(s) - M(s)B(s)\Psi(s)]_{s=\lambda_i}^{(\rho_i)} = L^{(\rho_i)}(\lambda_i) = 0, \tag{14}$$

где $\rho_i = \overline{0,\nu_i - 1}$, $i = \overline{1,\mu}$. Так как полином $M(s)$ определяется формулой (8), то интерполяционная задача (15) принимает вид

$$\begin{aligned} &[D(s) - M_0(s)B(s)\Psi(s) + \\ &+ C(s)A(s)B(s)\Psi(s)]_{s=\lambda_i}^{(\rho_i)} = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Поэтому

$$C^{(\rho_i)}(\lambda_i) = \left[\frac{M_0(s)B(s)\Psi(s) - D(s)}{A(s)B(s)\Psi(s)}\right]_{s=\lambda_i}^{(\rho_i)}. \tag{16}$$

Если функции $A(s)B(s)\Psi(s)$ и $L(s)$ являются взаимно простыми, то $A(\lambda_i)B(\lambda_i)\Psi(\lambda_i) \ne 0$

и согласно [9] существует единственный интерполяционный полином Эрмита $C(s)$ степени $r-1$, удовлетворяющий условию (16). Кроме того, если $\Psi(\lambda_i)\in\mathbb{R}\ \forall\lambda_i\in\mathbb{R}$ и $\overline{\Psi(\lambda_i)}=\Psi(\bar{\lambda}_i)\ \ \forall\lambda_i\in\mathbb{C}$, то $C(s)\in\mathcal{R}_{r-1}$. Таким образом, за счет выбора соответствующих коэффициентов многочлена $C(s)$ решается задача проектирования вынужденного движения замкнутой системы управления. Действительно, согласно (6) и (11) изображение по Лапласу для ошибки регулирования $\varepsilon(t)$ определяется формулой

$$E(s)=\frac{1+V_0(s)(W_0(s)-W(s))}{1+V_0(s)W_0(s)}(G(s)-W(s)F(s)).$$

Принимая во внимание равенства (5), после элементарных преобразований получаем

$$E(s)=\frac{1+V_0(s)(W_0(s)-W(s))}{1+V_0(s)W_0(s)}\left[\frac{G_0(s)}{L_1(s)}-\frac{W(s)F_0(s)}{L_2(s)}\right],$$

где $G_0(s)$ и $F_0(s)$ — алгебраические многочлены степени r_1-1 и r_2-1 соответственно, определяемые начальными условиями уравнений (5). Здесь $r_i=\deg L_i(s)$, $i=1,2$. Очевидно, что интерполяционная задача (14) может быть представлена в виде

$$D(s)-M(s)B(s)\Psi(s)=L(s)\Theta(s),$$

где $\Theta(s)$ — некоторая функция, для которой $\Theta^{(\rho_i)}(\lambda_i)\neq 0,\ \rho_i=\overline{0,\nu_i-1},\ \forall i=\overline{1,\mu}$. Поэтому

$$E(s)=\frac{[D(s)-M(s)B(s)\Psi(s)]G_0(s)}{D(s)L_1(s)}-\\ -\frac{[D(s)-M(s)B(s)\Psi(s)]B(s)\Psi(s)F_0(s)}{A(s)D(s)L_2(s)}. \qquad (17)$$

Из формулы (17) и теоремы Хевисайда о разложении [10] сразу вытекает следующий результат: если полиномы $A(s)$ и $D(s)$ являются гурвицевыми и выполнено условие (14), то ошибка регулирования $\varepsilon(t)\to 0$ при $t\to\infty$ для всех внешних воздействий, определяемых дифференциальными уравнениями (5). При этом, условие физической реализуемости передаточной функции регулятора $V_0(s)$, учитывающего полезную информацию о входных сигналах, определяется условием (4) при $k=r$. Анализ формулы (17) показывет, что поведение ошибки регулирования будет определяться не только полюсами передаточной функции замкнутой системы, но и полюсами передаточной функции объекта. Поэтому для нейтрального и неустойчивого объекта при наличии внешних возмущений или при ненулевых начальных условиях объекта система управления будет неработоспособной.

4. СИНТЕЗ РЕГУЛЯТОРА ДЛЯ УСТОЙЧИВОГО ОБЪЕКТА

Рассмотрим теперь метод синтеза модальных регуляторов для устойчивого объекта, т.е. когда многочлен $A(s)$ является гурвицевым. С этой целью введем следующие обозначения: $M_0(s)=\tilde{M}_0(s)A(s)$ и $D(s)=D_0(s)A(s)$. Тогда полиномиальное уравнение (9) примет вид

$$\tilde{M}_0(s)B(s)+N_0(s)=D_0(s).$$

Нетрудно проверить, что решением этого уравнения является пара многочленов

$$\tilde{M}_0(s)=0,\quad N_0(s)=D_0(s), \qquad (18)$$

или

$$\tilde{M}_0(s)=1,\quad N_0(s)=D_0(s)-B(s). \qquad (19)$$

Принимая во внимание формулы (8), получаем

$$M(s)=A(s)[\tilde{M}_0(s)-C(s)],\\ N(s)=N_0(s)+B(s)C(s). \qquad (20)$$

В этом случае передаточные функции (10) и (12) имеют соответственно вид

$$V_0(s)=\frac{[\tilde{M}_0(s)-C(s)]A(s)}{N_0(s)+B(s)C(s)},\\ V(s)=\frac{[\tilde{M}_0(s)-C(s)]A(s)}{D_0(s)-[\tilde{M}_0(s)-C(s)]B(s)\Psi(s)}. \qquad (21)$$

Отсюда сразу следует, что интерполяционная задача (14) принимает следующий вид:

$$[D_0(s)-(\tilde{M}_0(s)-C(s))B(s)\Psi(s)]^{(\rho_i)}_{s=\lambda_i}=0, \qquad (22)$$

где $\rho_i=\overline{0,\nu_i-1},\quad i=\overline{1,\mu}$. После элементарных преобразований находим

$$C^{(\rho_i)}(\lambda_i)=\left[\frac{\tilde{M}_0(s)B(s)\Psi(s)-D_0(s)}{B(s)\Psi(s)}\right]^{(\rho_i)}_{s=\lambda_i}. \qquad (23)$$

Отметим, что условие физической реализуемости регулятора $V_0(s)$ определяется неравенством (13) при $k=r$.

5. ПРИМЕР

Пусть задана передаточная функция объекта управления с распределенными параметрами

$$W(s) = \frac{2-s}{(s+2)\sqrt{s+1}}. \qquad (24)$$

Здесь

$$W_0(s) = \frac{2-s}{s+2}, \quad \Psi(s) = \frac{1}{\sqrt{s+1}}.$$

Поэтому

$$B(s) = 2 - s, \quad l = 1,$$

$$A(s) = s + 2, \quad m = 1, \quad m \geq l.$$

Синтезируем астатический регулятор $V(s)$ с компенсирующей обратной связью для объекта (24). Так как полином $A(s)$ является гурвицевым, то воспользуемся методом синтеза регуляторов, изложенным в п. 4. Положим $L_1(s) = L(s) = s$, $r = 1$. Условие реализуемости регулятора определяется неравенством (13), т.е. $n \geq 1$.

Пусть $n = 1$ и $D(s) = s + 2$. В этом случае согласно (19) и (20) имеем $\tilde{M}_0(s) = 0$, $N_0(s) = 1$ и

$$M(s) = -(s+2)C(s),$$

$$N(s) = 1 + (2-s)C(s).$$

Здесь $C(s)$ — полином нулевой степени со свободным коэффициентом. Для того чтобы регулятор был астатическим выберем полином $C(s)$, удовлетворяющим следующей интерполяционной задаче (22):

$$[1 + C(s)(2-s)\sqrt{s+1}\,]_{s=0} = 0.$$

Отсюда находим $C(s) = -1/2$. Таким образом,

$$M(s) = \frac{1}{2}(s+2), \quad N(s) = \frac{s}{2}.$$

Окончательно получаем передаточные функции регулятора

$$V_0(s) = \frac{s+2}{s}, \quad V(s) = \frac{(s+2)\sqrt{s+1}}{2\sqrt{s+1} + (s-2)}.$$

Передаточная функции замкнутой системы при этом имеет вид

$$\Phi(s) = \frac{(s+2)(2-s)}{2(s+2)\sqrt{s+1}} = \frac{2-s}{2\sqrt{s+1}}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бутковский А.Г.* Методы управления системами с распределенными параметрами. — М.: Наука, 1975. — 568 с.

2. *Гурецкий Х.* Анализ и синтез систем управления с запаздыванием. — М.: Машиностроение, 1974. — 328 с.

3. *Smith O.J.M.* Closer Control of Loops with Dead Time // Chem. Eng. Progr. 1957. V. 53. P. 217.

4. *Лозгачев Г.И., Тучинский С.В.* Построение модального регулятора для объекта с запаздыванием по передаточной функции замкнутой системы // Нелинейная динамика и управление. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. Вып. 1, С. 151—154.

5. *Вишняков А.Н., Цыпкин Я.З.* Синтез модальных дискретных систем управления // Автоматика и телемеханика. 1993. № 7. С. 86—94.

6. *Лозгачев Г.И.* Синтез модальных регуляторов по передаточной функции замкнутой системы // Автоматика и телемеханика. 1995. № 5. С. 49—55.

7. *Дылевский А.В., Лозгачев Г.И.* Синтез линейных систем управления с заданным характеристических полиномом // Известия РАН. Теория и системы управления. № 4. 2003. С. 17—20.

8. *Дылевский А. В., Лозгачев Г.И.* Синтез модальных систем управления // Вестник ВГУ. Серия физика, математика. Вып. 1. 2004. С. 103—109.

9. *Уолш Дж.Л.* Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области. — М.: Изд-во Иностранной литературы, 1961. — 508 с.

10. Теория автоматического управления. Ч. 1. Теория линейных систем автоматического управления / Под ред. А. А. Воронова. — М.: Высш. шк. 1986. — 367 с.