УДК 517.958

КОНСТРУКЦИИ ОПЕРАТОРА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ В МОДЕЛЯХ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОУПРУГИХ СРЕД*

© 2004 В. Т. Дмитриенко, В. Г. Звягин

Воронежский государственный университет

В работе приводятся различные конструкции оператора регуляризации поля скоростей, сохраняющие свойство соленоидальности, и исследуются свойства этих конструкций.

ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно, что движение вязкой несжимаемой среды описывается системой уравнений в форме Коши (см., например,[1])

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+v_i\,\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)+\operatorname{grad} p=\operatorname{Div}\sigma+\rho\varphi, \quad (0.1)$$

$$\operatorname{div} v=0,$$

где σ — девиатор тензора напряжений, $v=(v_1,\ldots,v_n)$ — скорость, p — давление среды, φ — плотность внешних сил и $\rho=const$ — плотность среды. Тип рассматриваемой среды определяется выбором соотношения между σ и тензором скоростей деформаций $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}_{ij}=\mathcal{E}_{ij}(v)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$. Это соотношение в литературе называется определяющим соотношением или уравнением состояния.

Наиболее известна модель с определяющим соотношением $\sigma=2\nu\mathcal{E}$ (ньютоновская жидкость). Уравнения движения такой жидкости называют уравнениями Навье−Стокса. Эта модель описывает течения при умеренных скоростях большинства встречающихся на практике вязких жидкостей. Однако существуют вязкие несжимаемые среды, не подчиняющиеся ньютоновскому определяющему соотношению. Различные модели таких сред, учитывающие предысторию течения, были предложены в XIX в. Дж. Максвеллом, В. Кельвином и В. Фойгтом и в середине XX в. Дж. Г. Олдройдом (см. [2]).

В работах [5—7] рассмотрено уравнение состояния вида

$$\left(1+\lambda\frac{d}{dt}\right)\sigma=2\nu\left(1+æ\nu^{-1}\frac{d}{dt}\right)E,\lambda,\nu,æ>0, \quad (0.2)$$

где $\frac{d}{dt}\equiv\frac{\partial}{\partial t}+v\cdot\operatorname{grad}$. Система уравнений (0.1), (0.2) образует замкнутую систему уравнений, описывающую движение отдельных классов вязкоупругих сред. Один из подходов к исследованию таких систем состоит в исключении σ из системы. Выражая σ из определяющего соотношения (0.2) и подставляя в уравнение (0.1), получим уравнения движения

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+v_i\,\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)(t,x)-\mu_1\operatorname{Div}\int_6^t e^{-\frac{t-s}{\lambda}}\mathcal{E}(v)(s,z(s;t,x))ds-$$
$$-\mu_0\operatorname{Div}\mathcal{E}(v)(t,x)=-\operatorname{grad}p(t,x)+ \quad (0.3)$$
$$+\operatorname{Div}\sigma_0(z(0;t,x))+\rho\varphi(t,x),\quad \operatorname{div}v=0.$$

Уравнения системы (0.3) содержат не только неизвестные скорости движения v и давление p, но и неизвестные траектории движения частиц среды $z=z(\tau;t,x)$, определяемые полем скоростей.

Исследование как слабых, так и сильных обобщенных решений начально-краевой задачи для уравнения системы (0.3) наталкивается на ту трудность, что в этом случае поле скоростей не определяет однозначно траектории движения частиц. Один из возможных выходов из этой ситуации, как отмечено в [3], — это сглаживание (регуляризация) поля скоростей и определение траекторий $z=Z_\delta(v)$ для сглаженного поля скоростей $S_\delta(v)$. При этом система уравнений движения принимает вид

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+v_i\,\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)-\mu_1 Div\int_0^t e^{-\frac{t-s}{\lambda}}\mathcal{E}(v)(s,Z_\delta(v)(s;t,x))\,ds$$
$$-\mu_0 Div\mathcal{E}(v)=-\operatorname{grad}p+\rho\varphi,\quad \operatorname{div}v=0. \quad (0.4)$$

В настоящей работе авторы приводят различные конструкции оператора регуля-

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант №04-01-00081, и CRDF, грант № VZ-010-0.

ризации поля скоростей и исследуют свойства таких операторов. В частности, авторы исправляют ошибки, допущенные в работе [6], при описании конструкции оператора регуляризации.

1. НЕОБХОДИМЫЕ СВЕДЕНИЯ И ТРЕБОВАНИЯ К ОПЕРАТОРУ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

Рассмотрим движение жидкости, заполняющей область Ω в $\mathbb{R}^n$, на промежутке времени $(0,T), T>0$. Будем предполагать, что Ω — ограниченная область с локально-липшицевой границей Γ.

Пусть $v(t,x)$ — вектор скорости частицы в точке x области Ω в момент времени $t, 0<t<T$, и $v_1,...,v_n$ — компоненты v. Траектории движения частиц жидкости определяются полем скоростей v как решение интегрального уравнения

$$z(\tau;t,x)=x+\int_t^\tau v(s,z(\tau;t,x))\,ds. \tag{1.1}$$

Через $Z(\tau;t,x)$ обозначим решение этого уравнения. Функция $Z(\tau;t,x)$ показывает положение в момент времени τ занимаемое частицей, находящейся в момент времени t в точке $x\in\Omega$ при заданном поле скоростей $v(t,x)$.

Введем необходимые функциональные пространства.

Мы будем использовать стандартные обозначения $C(\bar{\Omega})$, $L_2(\Omega)$, $L_p(\Omega)$, $W_2^1(\Omega)$, $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ для функций на Ω со значениями в $\mathbb{R}$ и обозначения $C(\bar{\Omega})^n$, $L_2(\Omega)^n$, $L_p(\Omega)^n$, $W_2^1(\Omega)^n$, $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ для функций со значениями в $\mathbb{R}^n$. Обозначим через $(u,v)_{L_2(\Omega)^n}$ скалярное произведение в $L_2(\Omega)^n$ для функций $u,v\in L_2(\Omega)^n$. Следуя [8], обозначим через $H^{1/2}(\Gamma)$ — пространство следов на Γ для функций класса $W_2^1(\Omega)$ и $H^{-1/2}(\Gamma)$ — сопряженное к нему пространство функционалов. Действие функционала $h\in H^{-1/2}(\Gamma)$ на функцию $v\in H^{1/2}(\Gamma)$ обозначим через $\langle h,v\rangle$.

Пусть $V=\{v\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)^n : \operatorname{div} v=0\}$. Пространство V гильбертово со скалярным произведением $(v,u)_V=\int_\Omega \mathcal{E}_{ij}(u)\cdot\mathcal{E}_{ij}(v)\,dx$ и соответствующей нормой $\|v\|$. Эта норма в пространстве V эквивалентна норме, индуцированной из пространства $W_2^1(\Omega)^n$. Обозначим через $H=H(\Omega)$ — замыкание V в норме пространства $L_2(\Omega)^n$.

Мы также используем стандартные обозначения банаховых пространств $L_p(a,b;E)$, $L_\infty(a,b;E)$, $C([a,b],E)$ для функций $v:[a,b]\to E$ со значениями в банаховом пространстве E. Будем считать, что в $L_p(a,b;E)$ введена норма

$$\|v\|_{L_p(a,b;E)}=\left(\int_a^b \|v(t)\|_E^p\,dt\right)^{1/p}.$$

Уравнение (0.3) включает интеграл, вычисляемый вдоль траекторий движения частиц жидкости. Поэтому необходимо, чтобы траектории однозначно определялись полем скоростей $v(t,x)$, другими словами, чтобы уравнение (1.1) имело единственное решение для поля скоростей $v(t,x)$. Однако существование решений уравнения (1.1) при фиксированном v известно лишь в случае $v\in L_1(0,T;C(\bar{\Omega})^n)$, таких что $v|_{(0,T)\times\Gamma}=0$, и это решение единственно для $v\in L_1(0,T;C^1(\bar{\Omega})^n)$ (см., например, [9]). Поэтому даже для сильных обобщенных решений, частные производные которых, содержащиеся в уравнении (0.3), принадлежат пространству $L_2(0,T;L_2(\Omega)^n)$, траектории движения не определяются однозначно. Как отмечено в [3], один из возможных выходов из этой ситуации — это регуляризация поля скоростей в каждый момент времени t и определение траекторий $Z(\tau;t,x)$ для регуляризованного поля скоростей. Однако стандартная процедура регуляризации, связанная с усреднением функции v, приводит к выходу носителя функции за границу области Ω. При этом траектории жидкости также «расползаются» за границу области. Возникающие при этом проблемы можно увидеть на примере статьи [4].

Пусть $\mathcal{D}_\sigma(\Omega)$ — пространство вектор-функций v класса C^∞ с компактным носителем в области Ω, таких что $\operatorname{div} v=0$. Известно, что $D_\sigma(\Omega)$ плотно в H и V. Конструкция функций из $\mathcal{D}_\sigma(\Omega)$, аппроксимирующих функцию v, содержится в работе [8]. Однако для изучения слабых решений системы необходимо построить непрерывный оператор регуляризации $S_\delta: H\to C^1(\bar{\Omega})^n\cap V$ для $\delta>0$ такой, что $S_\delta(v)\to v$ в H при $\delta\to 0$ и порождаемое им отображение $S_\delta: L_2(0,T;H)\to L_2(0,T;C^1(\bar{\Omega})^n\cap V)$ непрерывно.

Конструкция такого оператора приведена в работе [6], однако ее описание содержит ошибки. Для случая сильных обобщенных решений $v \in W_p^2(\Omega)^n$, $1 < p < n$, необходимо построить оператор регуляризации $S_\delta : V \cap \cap W_p^1(\Omega)^n \to C^1(\bar{\Omega})^n \cap V$, такой что $S_\delta(v) \to v$ в $V \cap W_p^1(\Omega)^n$ при $\delta \to 0$ и порождаемое им отображение $S_\delta : L_2(0,T;V \cap W_p^1(\Omega)^n) \to \to L_2(0,T;C^1(\bar{\Omega})^n \cap V)$ непрерывно.

Дальнейшие разделы статьи содержат различные конструкции оператора регуляризации.

2. КОНСТРУКЦИЯ ОПЕРАТОРА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ В СЛУЧАЕ ЗВЕЗДНОЙ ОБЛАСТИ

Пусть Ω ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с границей Γ. Будем предполагать, что Ω звездная область, т.е. существует точка $x^* \in \Omega$ такая, что для любого $x \in \Gamma$ имеем $x^* \cdot \varepsilon + x \cdot (1-\varepsilon) \in \Omega$ для всех $0 < \varepsilon \le 1$. Обозначим через $\sigma_\varepsilon(x^*), \varepsilon \ne 0$, преобразование гомотетии с коэффициентом $1-\varepsilon$:

$$x \to x^* \cdot \varepsilon + x \cdot (1-\varepsilon).$$

Для этого преобразования $\sigma_\varepsilon(\Omega) \subset \sigma_\varepsilon(\bar{\Omega}) \subset \Omega$.

Пусть $v \in H$ и $0 < \varepsilon < 1$. Считаем, что функция v доопределена нулем на все пространство $\mathbb{R}^n$. Обозначим через v_ε функцию $\sigma_\varepsilon[v](x) = v(\sigma_\varepsilon(x))$. Как доказано в [8, гл. I, лемма 1.1], для любой функции $v \in H$ функции $v_\varepsilon = \sigma_\varepsilon[v]$ сходятся к v в $L_2(\Omega)^n$ при $\varepsilon \to 0$. Отметим также, что при фиксированном ε, $0 < \varepsilon < 1$, носитель функции v_ε содержится в замыкании области $\Omega_\varepsilon = \sigma_\varepsilon(\Omega)$. Поэтому для достаточно малого $\delta > 0$ в Ω содержится и δ-окрестность Ω_ε.

Функция v_ε принадлежит пространству $H(\Omega_\varepsilon)$, поэтому ее продолжение нулем на область Ω обладает свойством $v_\varepsilon \in H = H(\Omega)$ и, следовательно, $\operatorname{div} v_\varepsilon = 0$ в каждой точке области. Действительно, по определению пространства $H(\Omega_\varepsilon)$ функция v_ε является пределом последовательности функций $w_k \in \mathcal{D}_\sigma(\Omega_\varepsilon)$ в норме пространства $L_2(\Omega_\varepsilon)$. Продолжая функции w_k нулем на дополнение к области Ω_δ, получим функции $\overline{w}_k$, принадлежащие $\mathcal{D}_\sigma(\Omega)$. Нетрудно видеть, что функция v_ε является пределом последовательности функций $\overline{w}_k$ в норме пространства $L_2(\Omega)$. Поэтому эта функция принадлежит пространству $H(\Omega)$.

Пусть ρ — функция класса C^∞ с компактным носителем в $B_1(0)$ — шаре радиуса 1 с центром в нуле и такая, что $\rho \ge 0, \int\limits_{R^n} \rho(x)dx = \int\limits_{B_1(0)} \rho(x)dx = 1$. Обозначим через ρ_δ функцию $\frac{1}{\delta^n}\rho\left(\frac{x}{\delta}\right)$. При $\delta \to 0$ функции ρ_δ сходятся в смысле распределений к функции Дирака и $\rho_\delta * v \to v$ в $L_2(R^n)^n$ для любой функции $v \in L_2(R^n)^n$, где $*$ — свертка функций.

Применим операцию усреднения по Стеклову к функции v_ε, получим $\tilde{v} = \rho_\delta * v_\varepsilon$. Выбор достаточно малого $\delta > 0$ обеспечивает выполнение условия, что носитель $\tilde{v}$ является компактом в Ω. Так как

$$\operatorname{div} \tilde{v} = \operatorname{div}(\rho_\delta * v_\varepsilon) = \rho_\delta * \operatorname{div} v_\varepsilon = 0,$$

то $\tilde{v} \in V \cap C^\infty(\bar{\Omega})^n$.

Каждое из преобразований, используемое при построении $\tilde{v}$, определяет линейное ограниченное отображение в соответствующих пространствах. Поэтому отображение регуляризации

$$S_\varepsilon : H \to V \cap C^1(\bar{\Omega})^n, S_\varepsilon(v) = \tilde{v} = \rho_\delta * v_\varepsilon,$$

непрерывно. Так как конструкция S_ε не зависит от t, то отображение $S_\varepsilon : L_2(0,T;H) \to \to L_2(0,T;V \cap C^1(\bar{\Omega})^n)$ также непрерывно.

Кроме того, так как функции $v_\varepsilon = \sigma_\varepsilon[v]$ сходятся к v в $L_2(\Omega)^n$ при $\varepsilon \to 0$, то $S_\varepsilon(v) \to v$ в H при $\varepsilon \to 0$ для любой функции $v \in H$ и в $L_2(0,T;H)$ для любой функции $v \in L_2(0,T;H)$.

Заметим также, что для $v \in V \cap W_p^1(\Omega)^n$, $1 < p < n$, $S_\varepsilon(v)$ сходятся к v в пространстве $V \cap W_p^1(\Omega)^n$ при $\varepsilon \to 0$ и если $v \in L_2(0,T; V \cap W_p^1(\Omega)^n)$, то $S_\varepsilon v \in L_2(0,T;V \cap W_p^1(\Omega)^n)$.

3. КОНСТРУКЦИЯ ОПЕРАТОРА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ В СЛУЧАЕ ЛИПШИЦЕВОЙ ОБЛАСТИ

Пусть Ω ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с локально липшицевой границей Γ. Выберем конечное покрытие области Ω открытыми множествами $U, U_1, \cdots, U_k$ такими, что $U \subset \bar{U} \subset \Omega$, каждое из множеств $\Gamma \cap U_j$, $j = 1, 2, \cdots, k$, непустое и его можно представить в виде графика липшицевой функции. Кроме того, каждое из множеств $\Omega \cap U_j$ звездное относительно одной из своих точек x_j^*.

Выберем C^∞-гладкое разбиение единицы, подчиненное покрытию $U, U_1, \cdots, U_k$ множества Ω, т.е. числовые функции $\phi, \phi_j, j = 1, 2, \cdots, k$ на Ω такие, что

$$\phi + \sum_{j=1}^{k} \phi_j = 1 \quad \text{где } \operatorname{supp} \phi \subset U,$$
$$\operatorname{supp} \phi_j \subset U_j, j = 1, 2, \cdots, k.$$

Пусть $v \in H$, тогда

$$v = \phi v + \sum_{j=1}^{k} \phi_j v, \tag{3.1}$$

причем каждое слагаемое содержится в $L_2(\Omega)^n$. Обозначим через $\sigma_\varepsilon(x_j^*), \varepsilon \neq 0$, преобразование гомотетии с коэффициентом $1-\varepsilon$: $x \to x_j^* \cdot \varepsilon + x \cdot (1-\varepsilon)$. Для этого преобразования $\sigma_\varepsilon(\Omega \cap U_j) \subset \sigma_\varepsilon(\bar{\Omega} \cap U_j) \subset \Omega \cap U_j$ для любых j. Обозначим через u_j функцию $u_j = \phi_j v$ и через $\sigma_\varepsilon[u_j]$ функцию $\sigma_\varepsilon[u_j](x) = u_j(\sigma_\varepsilon(x))$. Считаем, что каждая из функций u_j продолжена нулем на все пространство $\mathbb{R}^n$. Как доказано в [8, гл. I, лемма 1.1], $\sigma_\varepsilon[u_j]$ сходится к u_j в $L_2(\Omega)^n$ при $\varepsilon \to 0$. Отметим также, что при фиксированном $\varepsilon > 0$ носитель каждой функции $\sigma_\varepsilon[u_j]$, $j = 1, 2, \cdots, k$, и его 2δ-окрестность содержатся в $U_j \cap \Omega$ для достаточно малого $\delta > 0$. То же справедливо для функции $u = \phi v$, так как функция ϕ имеет компактный носитель в Ω. Таким образом, функция

$$\bar{v} = u + \sum_{j=1}^{k} \sigma_\varepsilon[u_j]$$

имеет компактный носитель в Ω.

Выберем подобласть

$$\Omega_\delta = \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \Gamma) > \delta\}.$$

области Ω, содержащую носитель функции $\bar{v}$.

Известно (см. [10]), что пространство $L_2(\Omega_\delta)^n$ разлагается в прямую сумму

$$L_2(\Omega_\delta)^n = H(\Omega_\delta) \oplus G(\Omega_\delta),$$
$$\text{где } G(\Omega_\delta) = \{\nabla p : p \in W_2^1(\Omega_\delta)\}.$$

Обозначим через P_δ оператор ортогонального проектирования $L_2(\Omega_\delta)^n$ в $H(\Omega_\delta)$. Применим этот оператор к функции $\bar{v}$, получим $v_\delta = P_\delta(\bar{v})$. Функция v_δ принадлежит пространству $H(\Omega_\delta)$, поэтому ее продолжение нулем на область Ω обладает свойством $\operatorname{div} v_\delta = 0$ в каждой точке области и, следовательно, $v_\delta \in H = H(\Omega)$.

Применим операцию усреднения по Стеклову к функции v_δ, получим $\tilde{v} = \rho_\delta * v_\delta$. Выбор δ обеспечивает выполнение условия, что носитель $\tilde{v}$ является компактом в Ω. Так как

$$\operatorname{div}\tilde{v} = \operatorname{div}(\rho_\delta * v_\delta) = \rho_\delta * \operatorname{div} v_\delta = 0,$$

то $\tilde{v} \in V \cap C^\infty(\bar{\Omega})^n$.

Каждое из преобразований, используемое при построении $\tilde{v}$, определяет линейное ограниченное отображение в соответствующих пространствах. Поэтому отображение $S_\delta : H \to V \cap C^1(\bar{\Omega})^n$, $S_\delta(v) = \tilde{v} = \rho_\delta * v_\delta$ непрерывно. Так как конструкция S_δ не зависит от t, то отображение $S_\delta : L_2(0,T;H) \to$ $\to L_2(0,T; V \cap C^1(\bar{\Omega})^n)$ также непрерывно.

Кроме того, $S_\varepsilon v \to v$ в H при $\varepsilon \to 0$ для любой функции $v \in H$ и в $L_2(0,T;H)$ для любой функции $v \in L_2(0,T;H)$. Для проверки этого факта достаточно показать, что $v_\delta \to v$ в H при $\delta \to 0$. Это будет доказано при рассмотрении второй конструкции оператора регуляризации.

4. ВТОРАЯ КОНСТРУКЦИЯ ОПЕРАТОРА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ В СЛУЧАЕ ЛИПШИЦЕВОЙ ОБЛАСТИ

Пусть Ω ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с локально липшицевой границей Γ. Для $\delta > 0$ обозначим через Ω_δ множество

$$\Omega_\delta = \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \Gamma) > \delta\}.$$

Известно, что для $\delta > 0$ достаточно малых области Ω_δ имеют липшицеву границу.

Пусть $v \in H$ — произвольная функция. Обозначим через v_δ сужение функции v на область Ω_δ: $v_\delta = v|_{\Omega_\delta}$. Будем полагать, что функция v_δ продолжена нулем на $\Omega \setminus \Omega_\delta$.

Известно (см. [10]), что пространство $L_2(\Omega_\delta)^n$ разлагается в прямую сумму

$$L_2(\Omega_\delta)^n = H(\Omega_\delta) \oplus G(\Omega_\delta),$$
$$\text{где } G(\Omega_\delta) = \{\nabla p : p \in W_2^1(\Omega_\delta)\}.$$

Обозначим через P_δ оператор проектирования $L_2(\Omega_\delta)^n$ в $H(\Omega_\delta)$ параллельно подпространству $G(\Omega_\delta)$. Применим этот оператор к функции v_δ, получим $\bar{v}_\delta = P_\delta(v_\delta)$. Функция $\bar{v}_\delta$ принадлежит пространству $H(\Omega_\delta)$, поэтому ее продолжение нулем на область Ω обладает свойством $\bar{v}_\delta \in H = H(\Omega)$ и, следовательно, $\operatorname{div} \bar{v}_\delta = 0$ в каждой точке области.

Применим операцию усреднения по Стеклову к функции $\bar{v}_\delta$, получим $\tilde{v}_\delta = \rho_\delta * \bar{v}_\delta$. Выбор δ обеспечивает выполнение условия, что носитель $\tilde{v}_\delta$ является компактом в Ω. Так как

$$\operatorname{div}\tilde{v}_\delta = \operatorname{div}(\rho_\delta * \bar{v}_\delta) = \rho_\delta * \operatorname{div}\bar{v}_\delta = 0,$$

то $\tilde{v}_\delta \in V \cap C^\infty(\bar{\Omega})^n$.

Каждое из преобразований, используемое при построении $\tilde{v}_\delta$, определяет линейное ограниченное отображение в соответствующих пространствах. Поэтому отображение $S_\delta : v \to \bar{v}_\delta = \rho_\delta * \bar{v}_\delta$ удовлетворяет условиям на оператор регуляризации, а именно, $S_\delta : H \to V \cap C^1(\bar{\Omega})^n$ непрерывно. Так как конструкция S_δ не зависит от параметра t, то отображение $S_\delta : L_2(0,T;H) \to$ $\to L_2(0,T;V \cap C^1(\bar{\Omega})^n)$ также непрерывно.

Нетрудно видеть, что отображения $S_\delta : V \to V \cap C^1(\bar{\Omega})^n$ и $S_\delta : L_q(0,T;V) \to$ $\to L_q(0,T;V \cap C^1(\bar{\Omega})^n)$ корректно определены и непрерывны.

Проверим, что для любой функции $v \in V$ выполняется

$$S_\delta v \to v \text{ в } H \text{ при } \delta \to 0.$$

Приведем доказательство для случая области Ω с границей Γ класса C^2.

Рассмотрим конструкцию проектора P_δ. Пусть Γ_δ — граница области Ω_δ и ν_δ — внешняя нормаль к границе Γ_δ. Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{cases} \Delta p(x) = 0, \quad x \in \Omega_\delta, \\ \left.\dfrac{\partial p}{\partial \nu_\delta}\right|_{\Gamma_\delta} = \gamma_{\nu_\delta}(v_\delta). \end{cases} \tag{4.1}$$

Оператор γ_{ν_δ} (см. определение [8], стр. 16) принимает значения в пространстве $H^{-1/2}(\Gamma_\delta)$ и в случае гладкой функции $\gamma_{\nu_\delta}(v_\delta) = (v_\delta|_{\Gamma_\delta}) \cdot \nu_\delta$. Как показано в [12, гл. 35, теорема 35.1], задача (4.1) имеет единственное решение $p_\delta \in W_2^1(\Omega)$ такое, что $\int\limits_\Omega p_\delta(x)dx = 0$, при условии, что

$$\langle \gamma_{\nu_\delta}(v_\delta), 1 \rangle = 0.$$

Покажем, что это условие выполняется. Для этого используем обобщенную формулу Стокса [8, с. 17] для функций v_δ и $\omega \in H^1(\Omega_\delta)$

$$(v_\delta, \operatorname{grad}\omega)_{L_2(\Omega_\delta)^n} + (\operatorname{div} v_\delta, \omega)_{L_2(\Omega_\delta)} =$$
$$= \langle \gamma_{\nu_\delta}(v_\delta), \gamma_0\omega \rangle,$$

где $\gamma_0\omega$ — след функции ω на границе. При выборе $\omega \equiv 1$ получим $\langle \gamma_{\nu_\delta}(v_\delta), 1 \rangle = 0$.

Отметим, что решение p_δ задачи (4.1) удовлетворяет оценке (см., например, [11, теорема 1.2])

$$\|p_\delta\|_{W_2^1(\Omega_\delta)} < c_0 \|\gamma_{\nu_\delta}(v_\delta)\|_{H^{-1/2}(\Gamma_\delta)} \tag{4.2}$$

с некоторой константой c_0, не зависящей от δ.

Как показано в [8],

$$P_\delta v_\delta = v_\delta - \operatorname{grad} p_\delta.$$

Используя конструкцию оператора P_δ, покажем, что для любой функции $v \in V$ выполняется

$$\bar{v}_\delta \to v \text{ в } H \text{ при } \delta \to 0.$$

Прежде всего, так как $\bar{v}_\delta = 0$ на $\Omega \setminus \Omega_\delta$, то

$$\|\bar{v}_\delta - v\|_{L_2(\Omega)^n} \le \|\bar{v}_\delta - v\|_{L_2(\Omega_\delta)^n} + \|v|_{\Omega\setminus\Omega_\delta}\|_{L_2(\Omega\setminus\Omega_\delta)^n}.$$

Из свойства абсолютной непрерывности интеграла Лебега следует, что

$$\|v|_{\Omega\setminus\Omega_\delta}\|_{L_2(\Omega\setminus\Omega_\delta)^n} \to 0 \text{ при } \delta \to 0.$$

Кроме того, в силу оценки (4.2)

$$\|\bar{v}_\delta - v\|_{L_2(\Omega_\delta)^n} = \|P_\delta v_\delta - v\|_{L_2(\Omega_\delta)^n} =$$
$$= \|\operatorname{grad} p_\delta\|_{L_2(\Omega_\delta)^n} < c_0 \|\gamma_{\nu_\delta}(v_\delta)\|_{H^{-1/2}(\Gamma_\delta)}$$

Поэтому достаточно показать, что $\|\gamma_{\nu_\delta}(v_\delta)\|_{H^{-1/2}(\Gamma_\delta)} \to 0$ при $\delta \to 0$.

Пусть $h \in H^{1/2}(\Gamma_\delta)$ и $\omega \in W_2^1(\Omega \setminus \Omega_\delta)$ — ее продолжение на область $\Omega \setminus \Omega_\delta$. При этом можно считать, что оператор продолжения непрерывен и справедлива оценка

$$\|\omega\|_{W_2^1(\Omega\setminus\Omega_\delta)} \le c_1 \|h\|_{H^{1/2}(\Gamma_\delta)}$$

с некоторой константой c_1, не зависящей ни от δ, ни от выбора h.

Применим формулу Стокса к функциям v и ω на области $\Omega \setminus \Omega_\delta$

$$(v, \operatorname{grad}\omega)_{L_2(\Omega\setminus\Omega_\delta)^n} + (\operatorname{div} v, \omega)_{L_2(\Omega\setminus\Omega_\delta)} =$$
$$= \langle \gamma_\nu(v), \gamma_{0,\Gamma}\omega \rangle + \langle \gamma_{-\nu_\delta}(v), \gamma_{0,\Gamma_\delta}\omega \rangle.$$

Так как $\operatorname{div} v = 0$, $\gamma_\nu(v) = 0$ для $v \in H$, $\gamma_{-\nu_\delta}(v) = -\gamma_{\nu_\delta}(v_\delta)$ и $\gamma_{0,\Gamma}\omega = h$, то полученное выше равенство принимает вид

$$(v, \operatorname{grad}\omega)_{L_2(\Omega\setminus\Omega_\delta)^n} = -\langle \gamma_{\nu_\delta}(v_\delta), h \rangle.$$

По определению

$$\left\|\gamma_{\nu_\delta}(v_\delta)\right\|_{H^{-1/2}(\Gamma_\delta)} = \sup\{\left\langle\gamma_{\nu_\delta}(v_\delta), h\right\rangle : h \in H^{1/2}(\Gamma_\delta), \|h\|_{H^{1/2}(\Gamma_\delta)} = 1\} \le$$

$$\le \sup\{\|v\|_{L_2(\Omega\setminus\Omega_\delta)^n} \cdot \|\mathrm{grad}\,\omega\|_{L_2(\Omega\setminus\Omega_\delta)^n} : h \in H^{1/2}(\Gamma_\delta), \|h\|_{H^{1/2}(\Gamma_\delta)} = 1\}.$$

Следовательно,

$$\left\|\gamma_{\nu_\delta}(v_\delta)\right\|_{H^{-1/2}(\Gamma_\delta)} \le c_1 \|v\|_{L_2(\Omega\setminus\Omega_\delta)^n} .$$

Таким образом, так как $\left\|v|_{\Omega\setminus\Omega_\delta}\right\|_{L_2(\Omega\setminus\Omega_\delta)^n} \to 0$ при $\delta \to 0$, то $\left\|\gamma_{\nu_\delta}(v_\delta)\right\|_{H^{-1/2}(\Gamma_\delta)^n} \to 0$ и, следовательно, $\bar{v}_\delta \to v$ в $L_2(\Omega)^n$ при $\delta \to 0$.

Покажем теперь, что

$$\tilde{v}_\delta = S_\delta v \to v \text{ в } H \text{ при } \delta \to 0.$$

Нетрудно видеть, что

$$\left\|\tilde{v}_\delta - v\right\|_{L_2(\Omega)^n} \le$$

$$\le \left\|\rho_\delta * \bar{v}_\delta - \rho_\delta * v\right\|_{L_2(\Omega)^n} + \left\|\rho_\delta * v - v\right\|_{L_2(\Omega)^n} .$$

Как отмечалось выше, операция усреднения по Стеклову обладает свойством

$$\rho_\delta * v \to v \text{ в } L_2(R^n)^n$$

для любой функции $v \in L_2(R^n)^n$, поэтому второе слагаемое в полученном неравенстве стремится к нулю. Для первого слагаемого имеем оценку

$$\left\|\rho_\delta * \bar{v}_\delta - \rho_\delta * v\right\|_{L_2(\Omega)^n} \le c_2 \left\|\bar{v}_\delta - v\right\|_{L_2(\Omega)^n}$$

с константой c_2, не зависящей от δ. Поэтому $\left\|\tilde{v}_\delta - v\right\|_{L_2(\Omega)^n} \to 0$ при $\delta \to 0$.

Так как $S_\delta v = \tilde{v}$, то для любой функции $v \in V$ имеем

$$S_\delta v \to v \text{ в } H \text{ при } \delta \to 0.$$

Кроме того, если $v \in L_2(0,T;V)$, то аналогичные рассуждения показывают, что

$$S_\delta v \to v \text{ в } L_2(0,T;H) \text{ при } \delta \to 0.$$

В заключение отметим, что приведенные выше аргументы можно повторить и для случая областей с липшицевой границей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гольдштейн Р.В., Городцов В.А.* Механика сплошных сред. Ч. I. Наука. Физматлит. 2000. 256 с.

2. *Олдройт Дж.Г.* Неньютоновские течения жидкостей и твердых тел: //Реология: Теория и приложения. М.: ИЛ, 1962. С. 757—793.

3. *Litvinov W.G.* A model and general problem on plastic flow under deformations // Universitat Stuttgart. Bericht. 1999. 99/07. 31 p.

4. *Litvinov W.G.* Regular model and nonstationary problem for the nonlinear viscoelastic fluid // Siberian Journal of Diff. Eq. 1997. V. 1, № 4, P. 351—382.

5. *Звягин В.Г., Дмитриенко В.Т.* О слабых решениях начально-краевой задачи для уравнений движения вязкоупругой жидкости // Докл. РАН. 2001. Т. 380. № 3. С. 308—311.

6. *Звягин В.Г., Дмитриенко В.Т.* О слабых решениях регуляризованной модели вязкоупругой жидкости // Диф. уравнения. 2002. Т. 38. № 12. С. 1633—1645.

7. *Дмитриенко В.Т., Звягин В.Г.* О сильных решениях начально-краевой задачи для регуляризованной модели вязкоупругой среды // Известия ВУЗов. Математика. 2004.

8. *Темам Р.* Уравнение Навье−Стокса. Теория и численный анализ. М.: Мир. 1987. 408 с.

9. *Orlov V.P., Sobolevskii P.E.* On mathematical models of a viscoelasticity with a memory // Differential and Integral Equations. 1991. V. 4. № 1. P. 103—115.

10. *Ладыженская О.А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука. Гл. ред. физико-математической литературы, 1970. 288 с.

11. *Фурсиков А.В.* Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. Новосибирск: Научная книга, 1999. 352 с.

12. *Ректорис К.* Вариационные методы в математической физике и технике. М.: Мир. 1985. 590 с.