УДК 517.946

# ТЕОРЕМА О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МАЛЫХ КОЛЕБАНИЙ ВЯЗКОЙ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В СЛУЧАЕ РАЗРЫВНОГО ГРАНИЧНОГО УСЛОВИЯ

**© 2004 С. А. Баева**

*Воронежский государственный университет*

В работе доказана теорема о существовании обобщенного решения начально-краевой задачи для системы уравнений, описывающих динамику вязкой сжимаемой жидкости в случае разрывного граничного условия. Изучена гладкость этого решения.

В работе доказана теорема о существовании обобщенного решения начально-краевой задачи для системы уравнений, описывающих динамику вязкой сжимаемой жидкости в случае разрывного граничного условия. При этом используются методы, развитые в [1] для задач с гладкими граничными условиями. Асимптотические при $t \to \infty$ формулы для решения этой задачи получены в [2].

На множестве $R^3_{++} = \{(x,t) : x_1 \in R^1, x_2 > 0, t > 0\}$ рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} - \nu\left(\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}\right) + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1} = 0; \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} - \nu\left(\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}\right) + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_2} = 0; \\ \alpha^2 \dfrac{\partial u_3}{\partial t} + \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $\alpha \neq 0$, $\nu > 0$ — некоторые постоянные числа.

Задача состоит в нахождении решения системы (1), удовлетворяющего начальным условиям

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2, +0) &= 0, \\ u_2(x_1, x_2, +0) &= 0, \\ u_3(x_1, x_2, +0) &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

и граничным условиям

$$\begin{aligned} u_1(x_1, +0, t) &= 0, \\ u_3(x_1, +0, t) &= w_3(x_1, t). \end{aligned} \tag{3}$$

Предположим, что функция $w_3(x_1, t)$ удовлетворяет следующему условию:

**Условие 1.** Функция $w_3(x_1, t)$ имеет вид $w_3(x_1, t) = p_1(x_1)p_2(t)$, где $p_1(x_1)$ — характеристическая функция отрезка [-1;1], а функция $p_2(t) \in C^\infty(0; +\infty)$ и имеет компактный носитель, причем $p_2(0) = 0$.

В работе доказано следующее утверждение:

**Теорема 1**. Пусть выполнено условие 1. Тогда существует обобщенное решение $U = (u_1, u_2, u_3)$ задачи (1)—(3) такое, что

$$u_1(x,t) = \int_0^t B_1(x, t-\tau) f_2(\tau) d\tau, \tag{4}$$

где $x = (x_1, x_2)$, $f_2(t) = 2p_2(t) + 2\alpha^2 \nu p_2'(t)$,

$$\begin{aligned} B_1(x,t) = {} & \frac{1}{2\pi} F^{-1}_{s\to x}[e^{-\nu|s|^2 t}] \underset{(x_1,x_2)}{*} g_1(x_1,x_2) - \\ & - \frac{1}{2\pi} e^{t\alpha^{-2}\nu^{-1}} F^{-1}_{s\to x}[e^{-\nu|s|^2 t}] \underset{(x_1,x_2)}{*} g_1(x_1,x_2) + \\ & + B_1^1(x,t) + B_1^2(x,t), \end{aligned} \tag{5}$$

$$g_1(x_1, x_2) = \frac{x_2}{x_2^2 + (x_1+1)^2} - \frac{x_2}{x_2^2 + (x_1-1)^2}, \tag{6}$$

причем функции $B_1^1(x,t)$, $B_1^2(x,t)$ — непрерывные и ограниченные по совокупности переменных $x_1 \in R^1$, $x_2 > 0$, $t > 0$ функции, $F^{-1}_{s\to x}$ — обратное преобразование Фурье;

$$\begin{aligned} u_2(x,t) = {} & \int_0^t B_{2,1}(x, t-\tau) f_2(\tau) d\tau + \\ & + \int_0^t B_{2,2}(x, t-\tau)(f_2'(\tau) - f_2(0)) d\tau, \end{aligned}$$

где

$$B_{2,1}(x,t) = \frac{1}{2\pi} F^{-1}_{s\to x}[e^{-\nu|s|^2 t}] \underset{(x_1,x_2)}{*} g_1(x_1,x_2) - \\ - \frac{1}{2\pi} e^{-t\alpha^{-2}\nu^{-1}} F^{-1}_{s\to x}[e^{-\nu|s|^2 t}] \underset{(x_1,x_2)}{*} g_1(x_1,x_2) + \\ + B^1_{2,1}(x,t)e^{t\alpha^{-2}\nu^{-1}} + B^2_{2,1}(x,t)te^{t\alpha^{-2}\nu^{-1}} + B^3_{2,1}(x,t), \quad (7)$$

причем функции $B^j_{2,1}(x,t), j=1,2,3$ есть непрерывные и ограниченные функции по совокупности переменных $x_1 \in R^1$, $x_2 > 0$, $t > 0$; $B_{2,2}(x,t)$ есть непрерывная и ограниченная по совокупности переменных $x_1 \in R^1$, $x_2 > 0$, $t > 0$ функция;

$$u_3(x,t) = \int_0^t B_3(x,t-\tau) f_2(\tau)d\tau,$$

где

$$B_3(x,t) = \frac{-1}{2\pi\alpha^2\nu} e^{t\alpha^{-2}\nu^{-1}} F^{-1}_{s\to x}[e^{-\nu|s|^2 t}] \underset{x_1,x_2}{*} g_2(x_1,x_2) + \\ + \frac{1}{2\alpha^2\nu} e^{-t\alpha^{-2}\nu^{-1}} g_2(x_1,x_2) + B^1_3(x,t)e^{t\alpha^{-2}\nu^{-1}} + \\ + B^2_3(x,t)te^{t\alpha^{-2}\nu^{-1}} + B^3_3(x,t), \quad (8)$$

$$g_2(x_1,x_2) = \frac{1}{\pi}\left( arctg\frac{x_1+1}{x_2} - arctg\frac{x_1-1}{x_2} \right), \quad (9)$$

причем функции $B^j_3$, $j=1,2,3$ есть непрерывные и ограниченные по совокупности переменных $x_1 \in R^1$, $x_2 > 0$, $t > 0$.

**Следствие 1**. При выполнении условий теоремы 1 существует обобщенное решение задачи (1)—(3) такое, что функции $u_j(x_1,x_2,t)$, $j=1,2,3$ есть непрерывные ограниченные по совокупности переменных $x_1 \in R^1$, $x_2 > 0$, $t \in (0;T]$, где $T > 0$ — любое число.

Изложим кратко схему доказательства этих утверждений. По вектор-функции $U(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t))$, заданной при всех $x_1 \in R^1$, $x_2 > 0$, $t > 0$, построим вектор-функцию $V(x,t)$, заданную при всех $x_1 \in R^1$, $x_2 \in R^1$, $t \in R^1$ следующим образом:

$$V(x,t) = (v_1(x,t), v_2(x,t), v_3(x,t)) = \\ = (l_0 u_1(x,t), l_1 u_2(x,t), l_0 u_3(x,t)),$$

где $l_0$ — оператор продолжения функции нечетным образом на $x_2 < 0$ и нулем на $t < 0$, а $l_1$ — оператор продолжения функции четным образом на $x_2 < 0$ и нулем на $t < 0$. Функция $V(x,t)$ в обобщенном смысле является решением следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_1}{\partial t} - \nu\left(\dfrac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2}\right) + \dfrac{\partial v_3}{\partial x_1} = 0; \\ \dfrac{\partial v_2}{\partial t} - \nu\left(\dfrac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2}\right) + \dfrac{\partial v_3}{\partial x_2} = G(x,t); \\ \alpha^2\dfrac{\partial v_3}{\partial t} + \dfrac{\partial v_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0, \end{cases} \quad (10)$$

где $G(x,t) = 2w_{3,0}(x_1,t)\delta(x_2) + 2\alpha^2\nu\dfrac{\partial w_{3,0}(x_1,t)}{\partial t}\delta(x_2)$.

Функция $w_{3,0}(x_1,t)$ есть функция $w_3(x_1,t)$, продолженная нулем на $t < 0$.

Применим к обеим частям уравнений системы (10) преобразование Фурье $F_{x\to s}$ и преобразование Лапласа $L_{t\to\gamma}$, получим систему алгебраических уравнений. Решая эту систему и применяя к построенному решению обратные преобразования Фурье и Лапласа, получим

$$v_j(x,t) = F^{-1}_{x\to s} L^{-1}_{\gamma\to t}[b_j(s,\gamma) F_{x\to s} L_{t\to\gamma}[G(x,t)]], \\ j=1,2,3, \quad (11)$$

где $b_1(s,\gamma) = \dfrac{-s_1 s_2}{P(s,\gamma)}$; $b_2(s,\gamma) = \dfrac{\alpha^2\gamma(\gamma+\nu|s|^2) + s_1^2}{P(s,\gamma)}$;

$b_3(s,\gamma) = \dfrac{-is_2(\gamma+\nu|s|^2)}{P(s,\gamma)}$; $P(s,\gamma) = (\alpha^2\gamma(\gamma+\nu|s|^2) + $

$+|s|^2)(\gamma+\nu|s|^2)$.

Представления (11) можно записать в виде $v_j(x,t) = \int_0^t B_j(x,t-\tau) f_2(\tau)d\tau$, $j=1,2,3$; где функция $f_2(t)$ определена выше; $B_j(x,t) = F^{-1}_{s\to x} L^{-1}_{\gamma\to t}[b_j(s,\gamma)\hat{p}_1(s_1)]$, $j=1,2,3$; $\hat{p}_1(s_1) = F_{x_1\to s_1}[p_1(x_1)]$.

Дальнейшие рассуждения посвящены доказательству формул (5), (7), (8) и исследованию гладкости и ограниченности функций $B_j(x,t)$, $j=1,2,3$. Из последнего следует гладкость и ограниченность компонент решения задачи (1)—(3).

Функцию $B_1(x,t)$ можно представить в виде

$$B_1(x,t) = B_{1,1}(x,t) + B_{1,2}(x,t) + B_{1,3}(x,t), \quad (12)$$

где

$$B_{1,j}(x,t)=\frac{1}{(2\pi)^2\alpha^2}\int\limits_{\Omega_j}e^{i(x,s)}(-s_1s_2\hat{p}_1(s_1))\times$$
$$\times\left(\frac{e^{\gamma_1 t}}{(\gamma_1-\gamma_2)(\gamma_1-\gamma_3)}+\frac{e^{\gamma_2 t}}{(\gamma_2-\gamma_1)(\gamma_2-\gamma_3)}+\right. \tag{13}$$
$$\left.+\frac{e^{\gamma_3 t}}{(\gamma_3-\gamma_1)(\gamma_3-\gamma_2)}\right)ds;\ j=1,2,3,$$

где $\Omega_1=\{s:|s|<\delta\}$, $\Omega_2=\{s:\delta<|s|<N\}$, $\Omega_3=\{s:|s|>N\}$, $\delta>0$ — достаточно малое число, а $N>0$ — достаточно большое число; $(x,s)=x_1s_1+x_2s_2$; $\gamma_k$, $k=1,2,3$ — корни уравнения

$$P(s,\gamma)=0. \tag{14}$$

Справедливо следующее утверждение:

**Лемма 1**. Для корней уравнения (14) при $|s|\to 0$ справедливы асимптотические формулы:

$$\gamma_1=-\nu|s|^2+O(|s|^{N_1}) \text{ для любого } N_1>0;$$
$$\gamma_j=-0,5\nu|s|^2+(-1)^j i|s|\alpha^{-1}+O(|s|^3),\ j=2,3.$$

При $|s|\to\infty$ справедливы асимптотические формулы:

$$\gamma_1=-\nu|s|^2+O(|s|^{-N_1}) \text{ для любого } N_1>0;$$
$$\gamma_2=-\nu|s|^2+\alpha^{-2}\nu^{-1}+O(|s|^{-2}),$$
$$\gamma_3=-\alpha^{-2}\nu^{-1}+O(|s|^{-3}).$$

С помощью леммы 1 доказываются следующие утверждения:

**Лемма 2**. Если функция $p_1(x_1)$ удовлетворяет условию 1, то функция $B_{1,1}(x,t)$ есть непрерывная и ограниченная по совокупности переменных функция.

**Лемма 3.** Если функция $p_1(x_1)$ удовлетворяет условию 1, то функция $B_{1,2}(x,t)$ есть непрерывная и ограниченная по совокупности переменных $x_1\in R^1$, $x_2>0$, $t>0$ функция.

**Лемма 4.** Если функция $p_1(x_1)$ удовлетворяет условию 1, то функция $B_{1,3}(x,t)$ имеет вид

$$B_{1,3}(x,t)=\frac{1}{2\pi}F^{-1}_{s\to x}[e^{-\nu|s|^2t}]\underset{(x_1,x_2)}{*}g_1(x_1,x_2)-$$
$$-\frac{1}{2\pi}e^{t\alpha^{-2}\nu^{-1}}F^{-1}_{s\to x}[e^{-\nu|s|^2t}]\underset{(x_1,x_2)}{*}g_1(x_1,x_2)+$$
$$+B^1_{1,3}(x,t)+B^2_{1,3}(x,t)e^{t\alpha^{-2}\nu^{-1}},$$

где функция $g_1(x_1,x_2)$ определена в (6), функции $B^1_{1,3}(x,t)$, $B^2_{1,3}(x,t)$ являются непрерывными и ограниченными по совокупности переменных $x_1\in R^1$, $x_2>0$, $t>0$ функциями.

Из лемм 1—3 вытекает справедливость равенства (5). Кроме того, из лемм 1—3 вытекает справедливость следующего утверждения.

**Следствие 2.** Если функция $p_1(x_1)$ удовлетворяет условию 1, то функция $B_1(x,t)$ есть непрерывная функция по совокупности переменных $x_1\in R^1$, $x_2>0$, $t>0$.

Изучим теперь вторую компоненту решения задачи (1)—(3). Равенство (11) при $j=2$ можно записать в виде

$$v_2(x,t)=L^{-1}_{\gamma\to t}F^{-1}_{s\to x}[\frac{s_1^2\hat{p}_1(s_1)}{P(s,\gamma)}]\underset{(t)}{*}f_2(t)+$$
$$+L^{-1}_{\gamma\to t}F^{-1}_{s\to x}[\frac{\alpha^2(\gamma+\nu|s|^2)\hat{p}_1(s_1))}{P(s,\gamma)}]\underset{(t)}{*}$$
$$\underset{(t)}{*}L^{-1}_{\gamma\to t}[\gamma L_{t\to\gamma}[f_2(t)]]=B_{2,1}(x,t)\underset{(t)}{*}f_2(t)+ \tag{15}$$
$$+B_{2,2}(x,t)\underset{(t)}{*}L^{-1}_{\gamma\to t}[\gamma L_{t\to\gamma}[f_2(t)]].$$

Изучим теперь функции $B_{2,1}(x,t)$ и $B_{2,2}(x,t)$. Функцию $B_{2,1}(x,t)$ можно представить в виде $B_{2,1}(x,t)=B^1_{2,1}(x,t)+B^2_{2,1}(x,t)+B^3_{2,1}(x,t)$, где

$$B^j_{2,1}(x,t)=\frac{1}{(2\pi)^2\alpha^2}\int\limits_{\Omega_j}e^{i(x,s)}s_1^2\hat{p}_1(s_1)\times$$
$$\times\left[\frac{e^{\gamma_1 t}}{(\gamma_1-\gamma_2)(\gamma_1-\gamma_3)}+\frac{e^{\gamma_2 t}}{(\gamma_2-\gamma_1)(\gamma_2-\gamma_3)}+\right.$$
$$\left.+\frac{e^{\gamma_3 t}}{(\gamma_3-\gamma_1)(\gamma_3-\gamma_2)}\right]ds,\ j=1,2,3.$$

Области $\Omega_j$ определены выше.

Доказаны следующие утверждения.

**Лемма 5.** Если функция $p_1(x_1)$ удовлетворяет условию 1, то функция $B^1_{2,1}(x,t)$ есть непрерывная и ограниченная по совокупности переменных $x_1\in R^1$, $x_2>0$, $t>0$ функция.

**Лемма 6.** Если функция $p_1(x_1)$ удовлетворяет условию 1, то функция $B^2_{2,1}(x,t)$ есть непрерывная и ограниченная по совокупности переменных $x_1\in R^1$, $x_2>0$, $t>0$ функция.

**Лемма 7.** Если функция $p_1(x_1)$ удовлетворяет условию 1, то функция $B^3_{2,1}(x,t)$ может быть представлена в виде

$$B_{2,1}^3(x,t) = F_{s\to x}^{-1}[e^{-\nu|s|^2 t}] \underset{(x_1,x_2)}{*} g_1(x_1,x_2) -$$
$$-e^{t\alpha^{-2}\nu^{-1}} F_{s\to x}^{-1}[e^{-\nu|s|^2 t}]$$
$$\underset{(x_1,x_2)}{*} g_1(x_1,x_2) + B_{2,1}^{3,1}(x,t)e^{\alpha^{-2}\nu^{-1}t} +$$
$$+B_{2,1}^{3,2}(x,t)te^{-\alpha^{-2}\nu^{-1}t} + B_{2,1}^{3,3}(x,t),$$

где функция $g_1(x_1,x_2)$ определена в (6), а функции $B_{2,1}^{3,j}(x,t)$, $j=1,2,3$ есть непрерывные и ограниченные по совокупности переменных $x_1 \in R^1$, $x_2 > 0$, $t > 0$ функции.

**Следствие 3**. Функция $B_{2,1}(x,t)$ есть непрерывная по совокупности переменных функция при всех $x_1 \in R^1$, $x_2 > 0$, $t > 0$. Эта функция является ограниченной по совокупности переменных $x_1 \in R^1$, $x_2 > 0$, $t \in (0;T]$, где $T > 0$ — любое число.

Из лемм 5—7 вытекает справедливость равенства (7).

Рассмотрим теперь функцию $B_{2,2}(x,t)$. Эту функцию можно представить в виде $B_{2,2}(x,t) = B_{2,2}^1(x,t) + B_{2,2}^2(x,t) + B_{2,2}^3(x,t)$, где

$$B_{2,2}^j(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^2\alpha^2} \int_{\Omega_j} e^{i(x,s)} \frac{(e^{\gamma_2 t} - e^{\gamma_3 t})\hat{p}_1(s_1)}{\gamma_2 - \gamma_3} ds,$$

где области $\Omega_j$, $j=1,2,3$ определены выше.

Доказаны следующие утверждения:

**Лемма 8.** Если функция $p_1(x_1)$ удовлетворяет условию 1, то функция $B_{2,2}^1(x,t)$ есть непрерывная и ограниченная по совокупности переменных $x_1 \in R^1$, $x_2 > 0$, $t > 0$ функция.

**Лемма 9.** Если функция $p_1(x_1)$ удовлетворяет условию 1, то функция $B_{2,2}^2(x,t)$ есть непрерывная и ограниченная по совокупности переменных $x_1 \in R^1$, $x_2 > 0$, $t > 0$ функция.

**Лемма 10.** Если функция $p_1(x_1)$ удовлетворяет условию 1, то функция $B_{2,2}^3(x,t)$ есть непрерывная и ограниченная по совокупности переменных $x_1 \in R^1$, $x_2 > 0$, $t > 0$ функция.

Из лемм 8—10 следует, что функция $B_{2,2}(x,t)$ есть непрерывная и ограниченная по совокупности переменных $x_1 \in R^1$, $x_2 > 0$, $t > 0$ функция.

Рассмотрим теперь функцию $B_3(x,t)$. Эту функцию можно представить в виде $B_3(x,t) = B_3^1(x,t) + B_3^2(x,t) + B_3^3(x,t)$, где

$$B_3^j(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^2\alpha^2} \int_{\Omega_j} e^{i(x,s)} \frac{-is_2(e^{\gamma_2 t} - e^{\gamma_3 t})\hat{p}_1(s_1)}{\gamma_2 - \gamma_3} ds,$$

области $\Omega_j$, $j=1,2,3$ определены выше.

Доказаны следующие утверждения:

**Лемма 11.** Если функция $p_1(x_1)$ удовлетворяет условию 1, то функция $B_3^1(x,t)$ есть непрерывная и ограниченная по совокупности переменных $x_1 \in R^1$, $x_2 > 0$, $t > 0$ функция.

**Лемма 12.** Если функция $p_1(x_1)$ удовлетворяет условию 1, то функция $B_3^1(x,t)$ есть непрерывная и ограниченная по совокупности переменных $x_1 \in R^1$, $x_2 > 0$, $t > 0$ функция.

**Лемма 13**. Если функция $p_1(x_1)$ удовлетворяет условию 1, то функция $B_3^3(x,t)$ может быть представлена в виде

$$B_3^3(x,t) = -\frac{1}{2\alpha^2\nu} e^{t\alpha^{-2}\nu^{-1}} F_{s\to x}^{-1}[e^{-\nu|s|^2 t}] \underset{x_1,x_2}{*} g_2(x_1,x_2) +$$
$$+\frac{1}{2\alpha^2\nu} e^{-t\alpha^{-2}\nu^{-1}} g_2(x_1,x_2) + B_3^{3,1}(x,t)e^{\alpha^{-2}\nu^{-1}t} +$$
$$+B_3^{3,2}(x,t)te^{\alpha^{-2}\nu^{-1}t} + B_3^{3,3}(x,t),$$

где функция $g_2(x_1,x_2)$ определена выше, а функция $B_3^{3,j}(x,t), j=1,2,3$ есть непрерывные и ограниченные по совокупности переменных $x_1 \in R^1$, $x_2 > 0$, $t > 0$ функции.

**Следствие 3**. Функция $B_3(x,t)$ есть непрерывная по совокупности переменных $x_1 \in R^1$, $x_2 > 0$, $t > 0$ функция. Эта функция является ограниченной по совокупности переменных $x_1 \in R^1$, $x_2 > 0$, $t \in (0;T]$, где $T > 0$ — любое число.

Из результатов лемм 1—13 вытекает справедливость теоремы 1 и следствия 1.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю, доктору физико-математических наук А. В. Глушко за постоянную помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Глушко А.В.*// Асимптотические методы в задачах гидродинамики. Воронеж: Воронежский гос. университет, 2003. — 300 с.

2. *Баева С.А.* Асимптотические при $t \to \infty$ формулы решения начально-краевой задачи для системы уравнений Навье—Стокса в случае разрывного граничного условия // Вестник ВГУ, Серия Физика, математика, 2004, № 1,с. 67—70.