УДК 517.954:532

ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ НЕРАВЕНСТВО И ЕДИНСТВЕННОСТЬ СЛАБОГО РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОУПРУГОЙ СРЕДЫ

© 2004 Д. А. Воротников

Воронежский государственный университет

Исследуется начально-краевая задача для уравнений движения вязкоупругой среды с определяющим соотношением Джеффриса. Для этой задачи найдено энергетическое неравенство и доказано существование слабого решения, удовлетворяющего этому неравенству. Получено достаточное условие единственности слабых решений этой задачи.

Вопрос о единственности слабых решений для большинства уравнений гидродинамики в общем случае остается открытым. Например, для уравнений Навье–Стокса в двумерном случае слабое решение единственно, а в трехмерном имеются лишь условные результаты, например, классический результат Сезера и Серрина ([1], теорема III.3.9) о том, что если слабое решение принадлежит дополнительно $L_8(0,T;L_4(\Omega))$, то оно единственно в классе слабых решений, удовлетворяющих энергетическому неравенству.

В [2] было доказано существование слабых решений начально-краевой задачи для уравнений движения вязкоупругой среды с определяющим соотношением Джеффриса [3]. В настоящей работе для этой задачи найдено энергетическое неравенство и доказано существование слабого решения, удовлетворяющего этому неравенству. Получен также аналог теоремы Сезера и Серрина о единственности слабых решений для этой задачи.

Работа поддержана грантами №04-01-00081 РФФИ и VZ-010 Минобразования и науки РФ и CRDF (США).

1. ОБОЗНАЧЕНИЯ

Будем использовать следующие обозначения, большинство из которых стандартны.

Обозначим через $\mathbb{R}^{n\times n}$ пространство матриц порядка $n\times n$ со скалярным произведением для $A=(A_{ij})$, $B=(B_{ij})$

$$(A,B)_{\mathbb{R}^{n\times n}} = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}B_{ij}$$

а через $\mathbb{R}_S^{n\times n}$ — его подпространство симметричных матриц.

Обозначим через $\mathbb{R}^{n\times n\times n}$ пространство упорядоченных наборов из n матриц порядка $n\times n$ со скалярным произведением для $A=(A_1,\dots,A_n)$, $B=(B_1,\dots,B_n)$

$$(A,B)_{\mathbb{R}^{n\times n\times n}} = \sum_{i=1}^{n} (A_i,B_i)_{\mathbb{R}^{n\times n}}.$$

Символом ∇u будем обозначать матрицу Якоби от вектор-функции $u:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$. Символом $\nabla\tau$ будем обозначать упорядоченный набор матриц Якоби столбцов матрицы-функции $\tau:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{n\times n}$.

Ниже E обозначает одно из пространств $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n\times n}, \mathbb{R}_S^{n\times n}$, $\mathbb{R}^{n\times n\times n}$.

Будем использовать стандартные обозначения $L_p(\Omega,E)$, $W_p^m(\Omega,E)$, $H^m(\Omega,E) = W_2^m(\Omega,E)$, $H_0^m(\Omega,E)=\overset{\circ}{W}{}_2^m(\Omega,E)$ для пространств Лебега и Соболева для функций со значениями в E. Иногда для краткости будем писать просто L_p вместо $L_p(\Omega,E)$ и т.п., если из контекста ясно, о каком пространстве E идет речь.

Скалярные произведения в $L_2(\Omega,E)$ и $H^1(\Omega,E)$ могут быть заданы выражениями

$$(u,v)=\int_\Omega (u(x),v(x))_E\,dx,$$

$$(u,v)_1=(u,v)+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i},\frac{\partial v}{\partial x_i}\right).$$

Евклидову норму в E будем обозначать $|\cdot|$, в L_2 — $\|\cdot\|$, в W_2^1 — $\|\cdot\|_1$.

Через $C_0^\infty(\Omega,E)$ будем обозначать пространство гладких функций с компактным носителем в Ω и со значениями в E.

Для краткости обозначим символом C_0^∞ пространство $C_0^\infty(\Omega,\mathbb{R}_S^{n\times n})$.

Пусть

$$\mathcal{V}=\{u\in C_0^\infty(\Omega,\mathbb{R}^n),\ div\ u=0\}.$$

Символами H и V обозначаются замыкания $\mathcal{V}$ соответственно в $L_2(\Omega,\mathbb{R}^n)$ и $W_2^1(\Omega,\mathbb{R}^n)$.

Следуя [1], будем отождествлять пространство H и его сопряженное пространство H^*. Поэтому имеем вложение

$$V\subset H\equiv H^*\subset V^*$$

Символами $C([0,T];X)$, $C_w([0,T];X)$, $L_2(0,T;X)$ и т.п. обозначаются банаховы пространства непрерывных, слабо непрерывных, суммируемых с квадратом и т.п. функций на промежутке $[0,T]$ со значениями в некотором банаховом пространстве X.

Символ $K_i, i=0,1,2,...$ будет обозначать положительные константы.

2. НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ МОДЕЛИ ДЖЕФФРИСА И ЕЕ СЛАБАЯ ПОСТАНОВКА

Пусть Ω — произвольная область в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n=2,3$, возможно и неограниченная.

Рассмотрим начально-краевую задачу, описывающую движение несжимаемой вязкоупругой среды в модели Джеффриса [2].

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\sum_{i=1}^n u_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+gradp=Div\sigma+f,\qquad(2.1)$$

$$\sigma+\lambda_1\Big(\frac{\partial\sigma}{\partial t}+\sum_{i=1}^n u_i\frac{\partial\sigma}{\partial x_i}\Big)=$$
$$=2\eta\Big(\mathcal{E}+\lambda_2\Big(\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial t}+\sum_{i=1}^n u_i\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial x_i}\Big)\Big),\qquad(2.2)$$

$$divu=0,\qquad(2.3)$$

$$u\,|_{\partial\Omega}=0,\qquad(2.4)$$

$$u\,|_{t=0}=a,\sigma\,|_{t=0}=\sigma_0.\qquad(2.5)$$

Здесь u — неизвестный вектор скорости точек среды, p — неизвестная функция давления, σ — неизвестный тензор касательных напряжений, f — плотность внешних сил(все они зависят от точки $x\in\Omega$ и момента времени t), $\mathcal{E}=\mathcal{E}(u)=(\mathcal{E}_{ij})$, $\mathcal{E}_{ij}=\frac{1}{2}\big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\big)$, η — вязкость среды, λ_1 — время релаксации, $\lambda_2<\lambda_1$ — время запаздывания. Дивергенция div и градиент $grad$ берутся по переменной x. Дивергенция Div от тензора это вектор с координатами $(Div\sigma)_j=\sum_{i=1}^n\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_i}$.

Пусть $f\in L_2(0,T;V^*)$.

Определение. Слабым решением задачи (2.1)—(2.5) называется пара функций

$$u\in L_2(0,T;V)\bigcap C_w([0,T];H),\frac{du}{dt}\in L_1(0,T;V^*),$$
$$\sigma\in L_2(0,T;L_2(\Omega,\mathbb{R}_S^{N\times N}))\bigcap C_w([0,T];H^{-1}(\Omega,\mathbb{R}_S^{N\times N})),\qquad(2.6)$$

удовлетворяющая условию (2.5) и тождествам

$$\frac{d}{dt}(u,\varphi)+(\sigma,\nabla\varphi)-\sum_{i=1}^n\Big(u_iu,\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\Big)=\langle f,\varphi\rangle,\qquad(2.7)$$

$$(\sigma,\Phi)+\lambda_1\frac{d}{dt}(\sigma,\Phi)-$$
$$-\lambda_1\sum_{i=1}^n\Big(u_i\sigma,\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\Big)=-2\eta(u,Div\Phi)-$$
$$-2\eta\lambda_2\Big(\frac{d}{dt}(u,Div\Phi)+\sum_{i=1}^n\Big(u_i\mathcal{E}(u),\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\Big)\Big)\qquad(2.8)$$

для всех $\varphi\in\mathcal{V}$ и $\Phi\in C_0^\infty$ в смысле распределений на $(0,T)$.

В работе [2] была доказана следующая теорема.

Теорема 2.1. *Пусть* $a\in H$, $\sigma_0\in W_2^{-1}(\Omega,\mathbb{R}_S^{n\times n})$, $f\in L_2(0,T;V^*)$, $\sigma_0-2\eta\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\mathcal{E}(a)\in L_2(\Omega,\mathbb{R}_S^{n\times n})$. *Тогда существует слабое решение задачи (2.1)—(2.5) в классе (2.6).*

3. ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ НЕРАВЕНСТВО

Введем обозначения

$$\mu_1=\eta\frac{\lambda_2}{\lambda_1},\mu_2=\frac{\eta-\mu_1}{\lambda_1},\tau=\sigma-2\mu_1\mathcal{E}.\qquad(3.1)$$

С помощью этих обозначений мы можем переписать (2.8) и (2.7) в следующем виде:

$$\frac{d}{dt}(\tau,\Phi)+\frac{1}{\lambda_1}(\tau,\Phi)-\sum_{i=1}^n\Big(u_i\tau,\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\Big)+$$
$$+2\mu_2(u,Div\Phi)=0,\qquad(3.2)$$

$$\frac{d}{dt}(u,\varphi)-\sum_{i=1}^n\Big(u_iu,\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\Big)+\mu_1(\nabla u,\nabla\varphi)+$$
$$+(\tau,\nabla\varphi)=\langle f,\varphi\rangle\qquad(3.3)$$

для всех $\varphi\in\mathcal{V}$ и $\Phi\in C_0^\infty$.

Ниже нам потребуется следующая

Лемма 3.1. *При* $u\in V,\tau\in H_0^1$ *имеют место тождества*

$$\sum_{i=1}^{n}(u_i u, \frac{\partial u}{\partial x_i}) = 0, \tag{3.4}$$

$$\sum_{i=1}^{n}(u_i \tau, \frac{\partial \tau}{\partial x_i}) = 0, \tag{3.5}$$

$$(\tau, \nabla u) + (u, Div\tau) = 0, \tag{3.6}$$

$$\sum_{i=1}^{n}(\frac{u_i u}{1+\delta(\frac{|\tau|^2}{2\mu_2}+|u|^2)}, \frac{\partial u}{\partial x_i}) + $$
$$+\frac{1}{2\mu_2}(\frac{u_i \tau}{1+\delta(\frac{|\tau|^2}{2\mu_2}+|u|^2)}, \frac{\partial \tau}{\partial x_i}) = 0. \tag{3.7}$$

Доказательство. Все тождества доказываются с помощью интегрирования по частям. Докажем, например, (3.7). Преобразуем его левую часть

$$\sum_{i=1}^{n}(\frac{u_i u}{1+\delta(\frac{|\tau|^2}{2\mu_2}+|u|^2)}, \frac{\partial u}{\partial x_i}) +$$
$$+\frac{1}{2\mu_2}(\frac{u_i \tau}{1+\delta(\frac{|\tau|^2}{2\mu_2}+|u|^2)}, \frac{\partial \tau}{\partial x_i}) =$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \frac{u_i}{1+\delta(\frac{|\tau|^2}{2\mu_2}+|u|^2)}[(u,\frac{\partial u}{\partial x_i})_{R^n} + \frac{1}{2\mu_2}(\tau,\frac{\partial \tau}{\partial x_i})_{\mathbb{R}^{n\times n}_S}]dx =$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \frac{u_i}{1+\delta(\frac{|\tau|^2}{2\mu_2}+|u|^2)}\frac{\partial}{\partial x_i}(|u|^2+\frac{1}{2\mu_2}|\tau|^2)dx =$$
$$=\frac{1}{2\delta}\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega u_i \frac{\partial}{\partial x_i}\ln(1+\delta(\frac{|\tau|^2}{2\mu_2}+|u|^2))dx =$$
$$=-\frac{1}{2\delta}\int_\Omega \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\ln(1+\delta(\frac{|\tau|^2}{2\mu_2}+|u|^2))dx = 0.$$

Обозначим через Ω_k пересечение области Ω с шаром радиуса k с центром в нуле в $\mathbb{R}^n$.

Из определения пространства H следует, что найдется последовательность $a_k \in \mathcal{V}, supp\, a_k \subset \Omega_k$, сходящаяся к a в $L_2(\Omega)$. Так как пересечение плотного множества $\mathcal{V}$ в пространстве H с шаром $\{u \in H; \|u\| \le \|a\|\}$ плотно в этом шаре, то без ограничения общности можно считать, что $\|a_k\| \le \|a\|$.

Рассмотрим вспомогательную задачу на области Ω_k:

$$\frac{d}{dt}(\tau,\Phi)+\frac{1}{\lambda_1}(\tau,\Phi)-\sum_{i=1}^{n}(\frac{u_i\tau}{1+\frac{1}{m}(\frac{|\tau|^2}{2\mu_2}+|u|^2)},\frac{\partial\Phi}{\partial x_i})+$$
$$+2\mu_2(u,Div\Phi)+\frac{1}{k\lambda_1}(\nabla\tau,\nabla\Phi)=0, \tag{3.8}$$

$$\frac{d}{dt}(u,\varphi)-\sum_{i=0}^{n}(\frac{u_i u}{1+\frac{1}{m}(\frac{|\tau|^2}{2\mu_2}+|u|^2)},\frac{\partial\varphi}{\partial x_i})+$$
$$+\mu_1(\nabla u,\nabla\varphi)+(\tau,\nabla\varphi)=\langle f,\varphi\rangle \tag{3.9}$$

для всех $\varphi \in V, \Phi \in H_0^1$ при п.в. $t \in (0,T)$;

$$u|_{t=0}=a_k, \tau|_{t=0}=\tau_0|_{\Omega_k}. \tag{3.10}$$

Натуральные числа m,k суть параметры.

Рассмотрим еще следующую систему на Ω_k:

$$\frac{d}{dt}(\tau,\Phi)+\frac{1}{\lambda_1}(\tau,\Phi)-\sum_{i=1}^{n}(u_i\tau,\frac{\partial\Phi}{\partial x_i})+$$
$$+2\mu_2(u,Div\Phi)+\frac{1}{k\lambda_1}(\nabla\tau,\nabla\Phi)=0, \tag{3.11}$$

$$\frac{d}{dt}(u,\varphi)-\sum_{i=1}^{n}(u_i u,\frac{\partial\varphi}{\partial x_i})+$$
$$+\mu_1(\nabla u,\nabla\varphi)+(\tau,\nabla\varphi)=\langle f,\varphi\rangle \tag{3.12}$$

для всех $\varphi \in V, \Phi \in H_0^1$ при п.в. $t \in (0,T)$.

Лемма 3.2. *У задачи (3.10)—(3.12) существует решение в классе*

$$u \in L_2(0,T;V), \tau \in L_2(0,T;H_0^1),$$
$$\frac{du}{dt} \in L_1(0,T;V^*), \frac{d\tau}{dt} \in L_1(0,T;H^{-1}), \tag{3.13}$$

которое удовлетворяет следующему неравенству при п.в. $t \in (0,T)$:

$$\frac{1}{2}\|u\|^2(t)+\frac{1}{4\mu_2}\|\tau\|^2(t)+$$
$$+\int_0^t \frac{1}{2\lambda_1\mu_2}\left((1-\frac{1}{k})\|\tau\|^2+\frac{1}{k}\|\tau\|_1^2\right)ds+\int_0^t \mu_1\|\nabla u\|^2 ds \le$$
$$\le \frac{1}{2}\|a\|^2+\frac{1}{4\mu_2}\|\tau_0\|^2+\int_0^t \langle f(s),u(s)\rangle ds. \tag{3.14}$$

Доказательство. Из леммы 1.1 главы III [1] следуют равенства

$$\left\langle\frac{du}{dt},\varphi\right\rangle=\frac{d}{dt}(u,\varphi), \left\langle\frac{d\tau}{dt},\Phi\right\rangle=\frac{d}{dt}(\tau,\Phi). \tag{3.15}$$

Поэтому

$$\frac{d}{dt}(u,\varphi)\,|_{\varphi=u(t)}=\left\langle \frac{du(t)}{dt}, u(t)\right\rangle=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(u(t),u(t)).$$

Аналогично

$$\frac{d}{dt}(\tau,\Phi)\,|_{\Phi=\tau(t)}=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\tau,\tau).$$

В [2] было доказано, что существуют решения (u_m,τ_m) (где m — натуральный параметр в (3.8)—(3.9)) задачи (3.8)—(3.10) в классе

$$u_m\in L_2(0,T;V), \frac{du_m}{dt}\in L_2(0,T;V^*),$$

$$\tau_m\in L_2(0,T;H_0^1), \frac{d\tau_m}{dt}\in L_2(0,T;H^{-1})$$

и что найдется пара (u,τ) из класса (3.13) такая, что при $m\to\infty$ $u_m\to u$ слабо в $L_2(0,T;V)$, $\tau_m\to\tau$ слабо в $L_2(0,T;H_0^1)$, и все члены в (3.8), (3.9) сходятся почти всюду на $(0,T)$ к соответствующим членам (3.11),(3.12). Пара (u,τ) является решением задачи (3.10)—(3.12).

Положим в (3.8) $\Phi=\dfrac{\tau_m(t)}{2\mu_2}$, а в (3.9) $\varphi=u_m(t)$ при почти всех $t\in[0,T]$, и сложим результаты. Получим с учетом (3.6) и (3.7):

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(u_m,u_m)+\frac{1}{4\mu_2}\frac{d}{dt}(\tau_m,\tau_m)+$$
$$+\mu_1(\nabla u_m,\nabla u_m)+\frac{1}{2\lambda_1\mu_2}(\tau_m,\tau_m)+ \qquad (3.16)$$
$$+\frac{1}{2k\lambda_1\mu_2}(\nabla\tau_m,\nabla\tau_m)=\langle f,u_m\rangle.$$

Проинтегрировав это равенство от 0 до произвольного $t\in[0,T]$, получим:

$$\frac{1}{2}\|u_m\|^2(t)+\frac{1}{4\mu_2}\|\tau_m\|^2(t)+$$
$$+\int_0^t\frac{1}{2\lambda_1\mu_2}\left((1-\frac{1}{k})\|\tau_m\|^2+\frac{1}{k}\|\tau_m\|_1^2\right)ds+\int_0^t\mu_1\|\nabla u_m\|^2\,ds=$$
$$=\frac{1}{2}\|a_k\|^2+\frac{1}{4\mu_2}\|\tau_0\|^2+\int_0^t\langle f(s),u_m(s)\rangle\,ds.$$

Умножим это равенство скалярно в $L_2(0,T)$ на гладкую скалярную финитную на $(0,T)$ функцию ψ с неотрицательными значениями.

$$\int_0^T\{\frac{1}{2}\|u_m\|^2(t)+\frac{1}{4\mu_2}\|\tau_m\|^2(t)+$$
$$+\int_0^t\frac{1}{2\lambda_1\mu_2}\left((1-\frac{1}{k})\|\tau_m\|^2+\frac{1}{k}\|\tau_m\|_1^2\right)ds+$$
$$+\int_0^t\mu_1\|\nabla u_m\|^2\,ds\}\psi(t)\,dt=$$
$$=\int_0^T\left(\frac{1}{2}\|a_k\|^2+\frac{1}{4\mu_2}\|\tau_0\|^2+\int_0^t\langle f(s),u_m(s)\rangle\,ds\right)\psi(t)\,dt$$

Переходя в этом соотношении к нижнему пределу при $m\to\infty$ и пользуясь тем фактом, что норма слабого предела последовательности не превосходит нижнего предела норм, получаем:

$$\int_0^T\{\frac{1}{2}\|u\|^2(t)+\frac{1}{4\mu_2}\|\tau\|^2(t)+$$
$$+\int_0^t\frac{1}{2\lambda_1\mu_2}\left((1-\frac{1}{k})\|\tau\|^2+\frac{1}{k}\|\tau\|_1^2\right)ds+$$
$$+\int_0^t\mu_1\|\nabla u\|^2\,ds\}\psi(t)dt\le$$
$$\le\int_0^T\left(\frac{1}{2}\|a_k\|^2+\frac{1}{4\mu_2}\|\tau_0\|^2+\int_0^t\langle f(s),u(s)\rangle\,ds\right)\psi(t)dt.$$

В силу произвольности функции ψ это влечет (3.14).

Теорема 3.1. *В условиях теоремы 2.1 найдется слабое решение (u,σ) задачи (2.1)—(2.5) из класса (2.6), которое удовлетворяет следующему неравенству при п.в.* $t\in[0,T]$

$$\frac{1}{2}\|u\|^2(t)+\frac{1}{4\mu_2}\|\tau\|^2(t)+\int_0^t\frac{1}{2\lambda_1\mu_2}\|\tau\|^2\,ds+$$
$$+\int_0^t\mu_1\|\nabla u\|^2\,ds\le\frac{1}{2}\|a\|^2+\frac{1}{4\mu_2}\|\tau_0\|^2+\int_0^t\langle f(s),u(s)\rangle\,ds, \qquad (3.17)$$

где $\tau=\sigma-2\mu_1\mathcal{E}(u)$, $\tau_0=\sigma_0-2\mu_1\mathcal{E}(a)$.

Доказательство теоремы 3.1. Обозначим существующие по лемме 3.2 решения задачи (3.10)—(3.12) через (u_k,τ_k) (где k — натуральный параметр в (3.11)). В [2] было доказано, что найдется пара (u,τ) из класса

$$u\in L_2(0,T;V)\cap L_\infty(0,T;H)\cap C_w([0,T],H),$$

$$\frac{du}{dt}\in L_1(0,T;V^*),$$

$$\tau\in L_\infty(0,T;L_2)\cap C_w([0,T],L_2), \frac{d\tau}{dt}\in L_2(0,T;H^{-2}) \qquad (3.18)$$

такая, что при $k \to \infty$ $u_k \to u$ слабо в $L_2(0,T;V)$, $\tau_k \to \tau$ *-слабо в $L_\infty(0,T;L_2)$ (и значит, слабо в $L_2(0,T;L_2)$), и все члены в (3.11), (3.12) сходятся почти всюду на $(0,T)$ к соответствующим членам (3.2),(3.3), причем $\frac{1}{k\lambda_1}(\nabla\tau_k,\nabla\Phi)$ сходится к нулю. Пара (u,τ) является решением задачи (3.2)—(3.3) с начальным условием

$$u\,|_{t=0}=a, \tau\,|_{t=0}=\tau_0. \tag{3.19}$$

По лемме 3.2 все пары (u_k,τ_k) удовлетворяют неравенству (3.14), а следовательно, и (3.17). Теперь, аналогично тому, как в доказательстве леммы 3.2, в полученных неравенствах (3.17) можно перейти к пределу при $k\to\infty$.

Легко видеть, что $\mathcal{E}(u)\in L_2(0,T;L_2)\cap \cap C_w([0,T];H^{-1})$. Положим $\sigma=\tau+2\mu_1\mathcal{E}(u)$. Тогда пара (u,σ) является искомым слабым решением задачи (2.1)—(2.5).

4. ТЕОРЕМА О ЕДИНСТВЕННОСТИ СЛАБЫХ РЕШЕНИЙ

Основным результатом этого пункта является

Теорема 4.1. *Пусть $n=3$ и в условиях теоремы 2.1 существует слабое решение (u_1,σ_1) задачи (2.1)—(2.5), причем*

$$\begin{gathered} u_1\in L_8(0,T;L_4),\\ \tau_1=[\sigma_1-2\mu_1\mathcal{E}(u_1)]\in L_4(0,T;W_4^1) \end{gathered} \tag{4.1}$$

Тогда это решение единственно в классе слабых решений (u,σ), удовлетворяющих энергетическому неравенству (3.17).

Доказательство. Пусть имеется слабое решение (u_2,σ_2) задачи (2.1)—(2.5), удовлетворяющее неравенству (3.17) с $\tau_2=\sigma_2-2\mu_1\mathcal{E}(u_2)$. Покажем, что оно совпадает с (u_1,σ_1), то есть что (u_2,τ_2) совпадает с (u_1,τ_1).

Очевидно, обе пары (u_1,τ_1) и (u_2,τ_2) являются решениями задачи (3.2), (3.3), (3.19).

Ниже мы будем пользоваться неравенством Гельдера в следующем виде:

$$\|uv\|_{L_p(0,T;L_q)}\le \|u\|_{L_{p_1}(0,T;L_{q_1})}\,\|v\|_{L_{p_2}(0,T;L_{q_2})},$$

при

$$p,p_1,p_2,q,q_1,q_2\ge 1,\ \frac{1}{p}=\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2},\ \frac{1}{q}=\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}.$$

Так как $u_1\in L_8(0,T;L_4)$, то из неравенства Гельдера следует, что $u_{1i}u_1\in L_4(0,T;L_2)$. Далее, так как $u_1\in L_\infty(0,T;L_2)$, $\tau_1\in L_4(0,T;W_4^1)$, $W_4^1\subset L_\infty$, то $u_{1i}\tau_1\in L_4(0,T;L_2)$. Так как $(u_{1i}\tau_1)$ есть решение системы (3.2), (3.3) при всех $\varphi\in V$, $\Phi\in C_0^\infty$, из леммы III.1.1 из [1] следует, что $\frac{du_1}{dt}\in L_2(0,T;V^*)$, $\frac{d\tau_1}{dt}\in L_2(0,T;H^{-1})$, и (u_1,τ_1) удовлетворяет (3.2), (3.3) при всех $\varphi\in V$, $\Phi\in H_0^1$.

Положим в (3.2) $\tau=\tau_1, \Phi=\dfrac{\tau_1(t)}{2\mu_2}$, а в (3.3) $u(t)=\varphi=u_1(t)$ при почти всех $t\in(0,T)$, и сложим результаты. Получим с учетом (3.4)-(3.6), (3.15) и леммы III.1.2 из [1]:

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(u_1,u_1)+\frac{1}{4\mu_2}\frac{d}{dt}(\tau_1,\tau_1)+\mu_1(\nabla u_1,\nabla u_1)+\\ +\frac{1}{2\lambda_1\mu_2}(\tau_1,\tau_1)=\langle f,u_1\rangle.\end{gathered} \tag{4.2}$$

Интегрируя это равенство от 0 до произвольного $t\in[0,T]$, получаем энергетическое равенство

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\|u_1\|^2(t)+\frac{1}{4\mu_2}\|\tau_1\|^2(t)+\\ +\int_0^t\frac{1}{2\lambda_1\mu_2}\|\tau_1\|^2\,ds+\int_0^t\mu_1\|\nabla u_1\|^2\,ds=\\ =\frac{1}{2}\|a\|^2+\frac{1}{4\mu_2}\|\tau_0\|^2+\int_0^t\langle f(s),u_1(s)\rangle\,ds\end{gathered} \tag{4.3}$$

Интегрируя по частям (3.2) с (u_1,τ_1), получим, что (u_1,τ_1) удовлетворяют тождеству:

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}(\tau_1,\Phi)+\frac{1}{\lambda_1}(\tau_1,\Phi)+\\ +\sum_{i=1}^n(u_{1i}\frac{\partial\tau_1}{\partial x_i},\Phi)-2\mu_2(\nabla u_1,\Phi)=0\end{gathered} \tag{4.4}$$

Из неравенства Гельдера следует $u_{1i}\frac{\partial\tau_1}{\partial x_i}\in L_2(0,T;L_2)$. Тогда из леммы III.1.1 из [1] следует, что (4.4) выполнено для всех $\Phi\in L_2$.

Положим в (4.4) $\Phi=\dfrac{\tau_2(t)}{2\mu_2}$, а в (3.3) $u=u_1,\varphi=u_2(t)$ при почти всех $t\in(0,T)$, (учитывая (3.15)) и сложим результаты:

$$\begin{gathered}\left\langle\frac{d}{dt}u_1,u_2\right\rangle+\frac{1}{2\mu_2}\left\langle\frac{d}{dt}\tau_1,\tau_2\right\rangle+\frac{1}{2\lambda_1\mu_2}(\tau_1,\tau_2)+\\ +\frac{1}{2\mu_2}\sum_{i=1}^n(u_{1i}\frac{\partial\tau_1}{\partial x_i},\tau_2)-(\nabla u_1,\tau_2)-\sum_{i=1}^n(u_{1i}u_1,\frac{\partial u_2}{\partial x_i})+\\ +\mu_1(\nabla u_1,\nabla u_2)+(\tau_1,\nabla u_2)=\langle f,u_2\rangle.\end{gathered} \tag{4.5}$$

Интегрируя по частям (3.3) с (u_2, τ_2), получим, что (u_2, τ_2) удовлетворяют тождеству:

$$\frac{d}{dt}(u_2, \varphi) + \sum_{i=1}^{n}(u_{2i}\frac{\partial u_2}{\partial x_i}, \varphi) + \\ + \mu_1(\nabla u_2, \nabla\varphi) + (\tau_2, \nabla\varphi) = \langle f, \varphi\rangle \tag{4.6}$$

Из леммы III.1.1 из [1] следует, что (4.6) выполнено для всех $\varphi \in V$.

Положим в (3.2) $\tau = \tau_2, \Phi = \dfrac{\tau_1(t)}{2\mu_2}$, а в (4.6) $\varphi = u_1(t)$ при почти всех $t \in (0,T)$ (учитывая (3.15)) и сложим результаты:

$$\left\langle \frac{d}{dt}u_2, u_1\right\rangle + \frac{1}{2\mu_2}\left\langle\frac{d}{dt}\tau_2, \tau_1\right\rangle + \frac{1}{2\lambda_1\mu_2}(\tau_2, \tau_1) - \\ -\frac{1}{2\mu_2}\sum_{i=1}^{n}(u_{2i}\tau_2, \frac{\partial\tau_1}{\partial x_i}) - (\nabla u_2, \tau_1) + \mu_1(\nabla u_2, \nabla u_1) + \\ +\sum_{i=1}^{n}(u_{2i}\frac{\partial u_2}{\partial x_i}, u_1) + (\tau_2, \nabla u_1) = \langle f, u_2\rangle. \tag{4.7}$$

Напомним, что при $n = 3$ имеет место неравенство([1], лемма III.3.5)

$$\|u\|_{L_4} \le 2^{1/2}\|u\|^{\frac14}\|\nabla u\|^{\frac34}. \tag{4.8}$$

Из него следует, что

$$\|u_2\|_{L_{8/3}(0,T;L_4)} \le 2^{1/2}\|u_2\|^{\frac14}_{L_\infty(0,T;L_2)}\|u_2\|^{\frac34}_{L_2(0,T;V)} < +\infty.$$

Отсюда и из неравенства Гельдера следует, что $u_{2i}\frac{\partial u_2}{\partial x_i} \in L_{8/7}(0,T;L_{4/3})$. Следовательно, $\frac{du_2}{dt} \in L_{8/7}(0,T;L_{4/3}) + L_2(0,T;V^*)$. Поэтому $u_2 = u_{21} + u_{22}$, $\frac{du_{21}}{dt} \in L_{8/7}(0,T;L_{4/3})$, $\frac{du_{22}}{dt} \in L_2(0,T;V^*)$. Аналогично $u_{1i}\frac{\partial\tau_1}{\partial x_i} \in L_{8/3}(0,T;L_2)$ и $\frac{d\tau_1}{dt} \in L_2(0,T;L_2)$, $u_{2i}\tau_2 \in L_{8/3}(0,T;L_{4/3})$ и $\frac{d\tau_2}{dt} \in L_2(0,T;W^{-1}_{4/3})$. Следовательно, все члены равенств (4.5) и (4.7) суммируемы на $(0,T)$.

Имеет место формула:

$$\left\langle\frac{d}{dt}u_2, u_1\right\rangle + \frac{1}{2\mu_2}\left\langle\frac{d}{dt}\tau_2, \tau_1\right\rangle + \left\langle\frac{d}{dt}u_1, u_2\right\rangle + \\ + \frac{1}{2\mu_2}\left\langle\frac{d}{dt}\tau_1, \tau_2\right\rangle = \frac{d}{dt}[(u_1, u_2) + \frac{1}{2\mu_2}(\tau_1, \tau_2)]. \tag{4.9}$$

Для доказательства можно воспользоваться усреднением по t. Положим

$$\psi_h(t) = \int_{\frac{T-h}{T}t}^{\frac{T-h}{T}t+h}\psi(s)\,ds,$$

где ψ — функция скалярного аргумента со значениями в каком-нибудь банаховом пространстве X, а h — малый положительный параметр. Нетрудно видеть, что если $\psi \in L_p(0,T;X)$, то $\psi_h \in W^1_p(0,T;X)$ и $\psi_h \to \psi$ в $L_p(0,T;X)$ при $h \to 0$. Кроме того, эта операция усреднения коммутирует с дифференцированием по t. Поэтому, если $\psi \in W^1_p(0,T;X)$, то $\psi_h \in W^2_p(0,T;X)$ и $\psi_h \to \psi$ в $W^1_p(0,T;X)$ при $h \to 0$.

Заметим теперь, что

$$\left\langle\frac{d}{dt}u_{2h}, u_{1h}\right\rangle + \frac{1}{2\mu_2}\left\langle\frac{d}{dt}\tau_{2h}, \tau_{1h}\right\rangle + \left\langle\frac{d}{dt}u_{1h}, u_{2h}\right\rangle + \\ + \frac{1}{2\mu_2}\left\langle\frac{d}{dt}\tau_{1h}, \tau_{2h}\right\rangle = \frac{d}{dt}[(u_{1h}, u_{2h}) + \frac{1}{2\mu_2}(\tau_{1h}, \tau_{2h})]. \tag{4.10}$$

Имеем: $u_{1h} \to u_1$ в $L_8(0,T;L_4)$ и в $L_2(0,T;V)$. Далее, $u_2 = u_{21} + u_{22}$, $\frac{du_{21h}}{dt} \to \frac{du_{21}}{dt}$ в $L_{8/7}(0,T;L_{4/3})$, $\frac{du_{22h}}{dt} \to \frac{du_{22}}{dt}$ в $L_2(0,T;V^*)$. Поэтому

$$\left\langle\frac{d}{dt}u_{2h}, u_{1h}\right\rangle = \left\langle\frac{d}{dt}u_{21h}, u_{1h}\right\rangle + \left\langle\frac{d}{dt}u_{22h}, u_{1h}\right\rangle \underset{h\to\infty}{\to} \\ \underset{h\to\infty}{\to}[\text{п.в. на }(0,T)] \underset{h\to\infty}{\to} \left\langle\frac{d}{dt}u_{21}, u_1\right\rangle + \left\langle\frac{d}{dt}u_{22}, u_1\right\rangle = \\ = \left\langle\frac{d}{dt}u_2, u_1\right\rangle.$$

Аналогично, остальные члены левой части (4.10) сходятся к соответствующим членам левой части (4.9). Кроме того, очевидно

$$(u_{1h}, u_{2h}) + \frac{1}{2\mu_2}(\tau_{1h}, \tau_{2h}) \to (u_1, u_2) + \frac{1}{2\mu_2}(\tau_1, \tau_2).$$

Переходя в (4.10) к пределу при $h \to \infty$ в смысле распределений на $(0,T)$, получим (4.9).

Положим $w = u_1 - u_2, \sigma_* = \tau_1 - \tau_2$. Имеют место также следующие формулы:

$$-\sum_{i=1}^{n}(u_{1i}u_1, \frac{\partial u_2}{\partial x_i}) + \sum_{i=1}^{n}(u_{2i}\frac{\partial u_2}{\partial x_i}, u_1) = \sum_{i=1}^{n}(w_i\frac{\partial w}{\partial x_i}, u_1)$$

$$\sum_{i=1}^{n}(u_{1i}\frac{\partial\tau_1}{\partial x_i}, \tau_2) - \sum_{i=1}^{n}(u_{2i}\tau_2, \frac{\partial\tau_1}{\partial x_i}) = -\sum_{i=1}^{n}(w_i\sigma_*, \frac{\partial\tau_1}{\partial x_i}).$$

Эти формулы достаточно показать для гладких функций u_1, u_2, τ_1, τ_2, что делается с помощью интегрирования по частям.

Приняв во внимание эти формулы и формулу (4.9), сложим (4.5) и (4.7) и проинтегрируем от 0 до произвольного $t \in [0,T]$. Получим равенство:

$$(u_1,u_2)(t)+\frac{1}{2\mu_2}(\tau_1,\tau_2)(t)+\sum_{i=1}^{n}\int_0^t(w_i\frac{\partial w}{\partial x_i},u_1)ds-$$
$$-\frac{1}{2\mu_2}\sum_{i=1}^{n}\int_0^t(w_i\sigma_*,\frac{\partial \tau_1}{\partial x_i})ds+\int_0^t\frac{1}{\lambda_1\mu_2}(\tau_1,\tau_2)ds+$$
$$+2\int_0^t\mu_1(\nabla u_1,\nabla u_2)\,ds= \tag{4.11}$$
$$=\|a\|^2+\frac{1}{2\mu_2}\|\tau_0\|^2+\int_0^t\langle f(s),u_1(s)+u_2(s)\rangle\,ds.$$

Но (u_2,τ_2) удовлетворяет неравенству (3.17):

$$\frac{1}{2}\|u_2\|^2(t)+\frac{1}{4\mu_2}\|\tau_2\|^2(t)+$$
$$+\int_0^t\frac{1}{2\lambda_1\mu_2}\|\tau_2\|^2\,ds+\int_0^t\mu_1\|\nabla u_2\|^2\,ds\le \tag{4.12}$$
$$\le\frac{1}{2}\|a\|^2+\frac{1}{4\mu_2}\|\tau_0\|^2+\int_0^t\langle f(s),u_2(s)\rangle\,ds.$$

Прибавим к этому неравенству (4.3) и вычтем (4.11). Имеем:

$$\frac{1}{2}\|w\|^2(t)+\frac{1}{4\mu_2}\|\sigma_*\|^2(t)+$$
$$+\int_0^t\frac{1}{2\lambda_1\mu_2}\|\sigma_*\|^2\,ds+\int_0^t\mu_1\|\nabla w\|^2\,ds\le \tag{4.13}$$
$$\le\sum_{i=1}^{n}\int_0^t(w_i\frac{\partial w}{\partial x_i},u_1)ds-\frac{1}{2\mu_2}\sum_{i=1}^{n}\int_0^t(w_i\sigma_*,\frac{\partial\tau_1}{\partial x_i})ds.$$

Применяя неравенство Гельдера, получаем:

$$\frac{1}{2}\|w\|^2(t)+\frac{1}{4\mu_2}\|\sigma_*\|^2(t)+$$
$$+\int_0^t\frac{1}{2\lambda_1\mu_2}\|\sigma_*\|^2\,ds+\int_0^t\mu_1\|\nabla w\|^2\,ds\le \tag{4.14}$$
$$\le\int_0^t(\|w\|_{L_4}\|\nabla w\|\|u_1\|_{L_4}+\frac{1}{2\mu_2}\|w\|_{L_4}\|\sigma_*\|\|\tau_1\|_{W_4^1})ds.$$

Но (4.8) влечет

$$\|w\|_{L_4}\|\nabla w\|\|u_1\|_{L_4}\le 2^{1/2}\|w\|^{1/4}\|\nabla w\|^{7/4}\|u_1\|_{L_4}.$$

Из неравенства Юнга следует, что найдется такая константа K_1, что последнее выражение не превосходит $\frac{1}{2}\mu_1\|\nabla w\|^2+K_1\|w\|^2\|u_1\|_{L_4}^8$.

Далее, (4.8) и неравенство Юнга дают

$$\|w\|_{L_4}\|\sigma_*\|\|\tau_1\|_{W_4^1}\le\|w\|^{1/4}\|\sigma_*\|^{1/4}\|\nabla w\|^{3/4}\|\sigma_*\|^{3/4}\|\tau_1\|_{W_4^1}\le$$
$$\le\sqrt{\frac{\mu_1}{\lambda_1\mu_2}}\|\nabla w\|\|\sigma_*\|+K_2\|w\|\|\sigma_*\|\|\tau_1\|_{W_4^1}^4\le$$
$$\le\frac{1}{2}\mu_1\|\nabla w\|^2+\frac{1}{2\lambda_1\mu_2}\|\sigma_*\|^2+\frac{1}{2}K_2(\|w\|^2+\|\sigma_*\|^2)\|\tau_1\|_{W_4^1}^4.$$

Тогда (4.14) влечет:

$$\frac{1}{2}\|w\|^2(t)+\frac{1}{4\mu_2}\|\sigma_*\|^2(t)+\int_0^t\frac{1}{2\lambda_1\mu_2}\|\sigma_*\|^2\,ds+$$
$$+\int_0^t\mu_1\|\nabla w\|^2\,ds\le\int_0^t(\mu_1\|\nabla w\|^2+\frac{1}{2\lambda_1\mu_2}\|\sigma_*\|^2+ \tag{4.15}$$
$$+\frac{1}{2}K_2(\|w\|^2+\|\sigma_*\|^2)\|\tau_1\|_{W_4^1}^4+K_1\|w\|^2\|u_1\|_{L_4}^8)ds.$$

Поэтому

$$\frac{1}{2}\|w\|^2(t)+\frac{1}{4\mu_2}\|\sigma_*\|^2(t)\le$$
$$\le\int_0^t(\frac{1}{2}K_2(\|w\|^2+\|\sigma_*\|^2)\|\tau_1\|_{W_4^1}^4+K_1\|w\|^2\|u_1\|_{L_4}^8)ds. \tag{4.16}$$

Но функции $\|u_1\|_{L_4}^8(t)$ и $\|\tau_1\|_{W_4^1}^4(t)$ суммируемы на $(0,T)$. Тогда по лемме Гронуолла $w\equiv 0,\sigma_*\equiv 0$, и теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Темам Р.* Уравнения Навье−Стокса. М.: Мир, 1981. — 408 с.

2. *Vorotnikov D.A., Zvyagin V.G.* On the existence of weak solutions for the initial-boundary value problem in the Jeffreys model of motion of a viscoelastic medium// Abstract and Applied Analysis, Volume 2004 (to appear).

3. *Рейнер М.* Реология. М.: Физматгиз, 1965. — 224 с.