

УДК 591.526

СИСТЕМА РЕКУРРЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ НА БАЗЕ МОДЕЛИ ФЕРХЮЛЬСТА–ПИРЛА

© 2004 Н. В. Волкова, В. Н. Думачев, В. А. Родин

С помощью системы рекуррентных уравнений, содержащей два параметра, изучается динамика численности двух видов, каждый из которых непосредственно влияет на изменение популяции второго. Система, основанная на модели Ферхюльста–Пирла, может иметь от одного до четырех решений. Определены области изменения управляющих параметров, гарантирующие реализацию определенной эволюционной ситуации: зоны устойчивых решений, зоны появления бифуркации и циклов, зона хаоса и неопределенности. Как следствие, на диагонали (при равенстве управляющих параметров), получены ранее известные утверждения для второй итерации отображения Ферхюльста–Пирла.

1. ВВЕДЕНИЕ

Одна из первых моделей динамики численности вида — модель Ферхюльста–Пирла послужила началом целому циклу работ в этом направлении (напр. в обзорах [1—2]). Пусть x_n — численность одного вида, а y_n — другого в n -ом году. Рассмотрим систему, состоящую из двух итерационных уравнений:

$$\begin{cases} y_{n+1} = \alpha x_n(1 - x_n), \\ x_{n+1} = \beta y_{n+1}(1 - y_{n+1}). \end{cases} \quad (1)$$

Относительная численность в $n+1$ году популяции y_{n+1} зависит от численности x_n в n -ом году ($0 \leq x_n, y_n \leq 1$). В свою очередь x_{n+1} зависит от y_{n+1} . Параболы в правой части каждого из уравнений имеют максимум в точке $1/2$, который равен $\alpha/4$ или $\beta/4$ соответственно. Поэтому, в силу нормировки численности, управляющие параметры удовлетворяют неравенствам $0 \leq \alpha, \beta \leq 4$.

В монографии [2] главы 4—7 посвящены изучению динамики численности конкурирующих видов. Однако, общая теория рассматриваемая там, так же как и частные случаи, относится к уравнениям другого вида $x_{n+1} = x_n f(x_n, y_n)$, а функция $xf(x, 0)$, связанная с «запасами» должна быть монотонно возрастающей. Наиболее близкой к системе (1) можно считать систему двух связанных популяций, рассмотренную в [2, с. 117]. Динамика численности популяции с признаками каннибализма описывается системой, в которой второе уравнение имеет принципиально другой вид [2, с. 21]. Отметим также работу [3], в которой рассматривались вопросы самоуничтожения одного вида.

Типичные сценарии перехода к хаосу через каскад удвоения периода в различных нелинейных системах хорошо изучен (см. обзоры [4, 7, 8]). Наиболее близкой по тематике к настоящей работе, по мнению авторов, являются классические работы С. П. Кузнецова [5, 6].

При этом, системы изучаемые в данных работах, содержат одинаковые переменные в обеих частях уравнения и принципиально отличаются от системы (1).

В работе [9] численными методами подтверждена гипотеза о существовании различных циклических решений системы (1) и появления «хаоса» (рис. 1). В настоящей работе некоторые гипотезы, вызванные иссле-

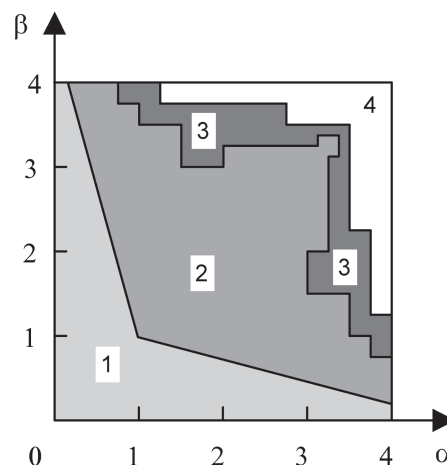


Рис. 1. Результаты численного моделирования системы (1) при изменении параметров $0 \leq \alpha, \beta \leq 4$. 1 — область, где оба вида вырождаются; 2 — область, где численность обоих видов стабилизируется; 3 — область, где появляется устойчивый цикл S^2 ; 4 — область, где появляются циклы периода 3 и больше

дованием количественной компьютерной графики, получили аналитическое доказательство.

2. УПРАВЛЕНИЕ ЧИСЛОМ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ (1)

Исследование задачи значительно облегчается, если заметить, что разностная система (1), по существу, является простой итерационной схемой отыскания корней системы нелинейных уравнений

$$\begin{cases} y = \alpha x(1-x), \\ x = \beta y(1-y), \end{cases} \quad (2)$$

решение которой имеет вид

$$x_1 = 0, \quad x_3 = \frac{2}{3} + \frac{A(-1+i\sqrt{3})}{12\beta\alpha} - \frac{(\alpha-3)\beta(1+i\sqrt{3})}{3A},$$

$$x_2 = \frac{2}{3} + \frac{A}{6\beta\alpha} + \frac{2(\alpha-3)\beta}{3A}, \quad x_4 = \frac{2}{3} - \frac{A(1+i\sqrt{3})}{12\beta\alpha} + \frac{(\alpha-3)\beta(-1+i\sqrt{3})}{3A},$$

где

$$A = \sqrt[3]{(36\alpha\beta - 8\alpha^2\beta - 108 + 12\sqrt{g})\alpha\beta^2},$$

$$g(\alpha, \beta) = 81 - 54\alpha\beta + 12\alpha\beta^2 - 3\alpha^2\beta^2 + 12\alpha^2\beta. \quad (3)$$

Точку $(\bar{x}, \bar{y}) \in [0,1]^2$ как обычно будем называть стационарной или точкой положения равновесия, если она удовлетворяет системе (2). В этом пункте мы определим зоны изменения параметров $(\alpha, \beta) \in [0,4]^2$, точно гарантирующие определенное количество стационарных точек. Основным инструментом для определения этих зон будет анализ вза-

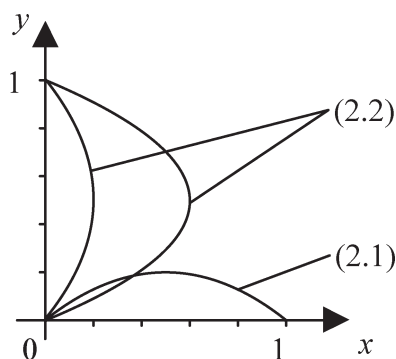


Рис. 2. Пересечение графиков функции системы (2) имеющее 1 и 2 корня

имного расположения графиков парабол с перпендикулярными осями симметрии (рис. 2, 3).

В зависимости от значений α и β данная система будет иметь от 1 до 4-х вещественных корней. На рис. 4 показана точная «карта» этих зон. Рассмотрим подробнее вопросы аналитического построения границ областей существования корней системы (2).

Точка $(0,0)$ есть положение равновесия. Записывая (2) в виде одного разностного уравнения $x_{n+1} = F(x_n)$, где

$$F(x) = \alpha\beta x - \alpha\beta(1+\alpha)x^2 + 2\alpha^2\beta x^3 - \alpha^2\beta x^4, \quad (4)$$

согласно теореме Банаха, получим условие локальной устойчивости этой точки в виде $|F'(0)| < 1$, или $\alpha\beta < 1$.

Это неравенство определяет зону существования одного корня $x_1 = 0$ системы (2) и автоматически дает границу области для появления второго корня системы (рис. 4).

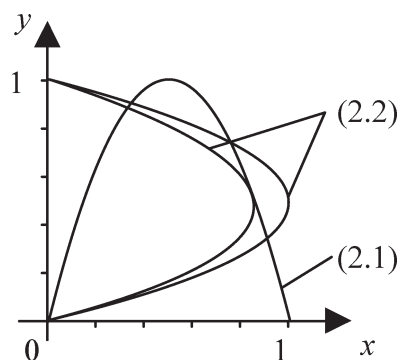


Рис. 3. Пересечение графиков функции системы (2) имеющее 3 и 4 корня

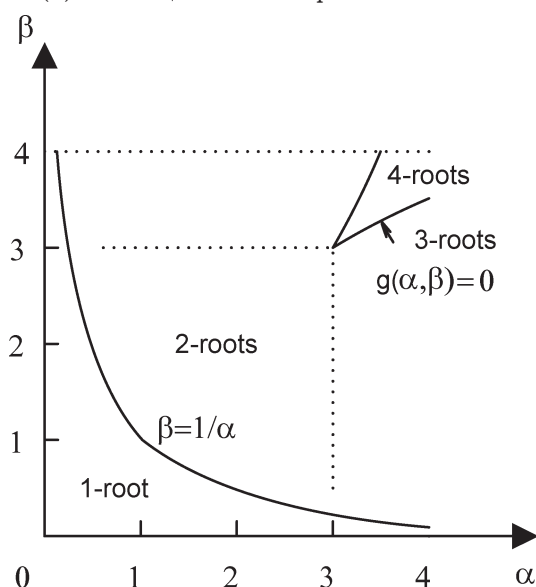


Рис. 4. Области существования 1, 2, 3 и 4-х корней системы

Если $\alpha\beta = 1$, то $x_1 = 0$ имеет кратность 2, $F'(0) = 1$ и на всей границе $\alpha\beta = 1$ ноль теряет устойчивость. Устойчивым в области двух корней (рис. 4) является корень x_2 .

Условие положительности выражения (3) под знаком радикала $g \geq 0$ также определяет границу области существования одновременно 3-х или 4-х корней системы.

Рассмотрим подробнее поведение итерационной схемы в различных областях значений параметров $0 < \alpha < 4$ и $0 < \beta < 4$.

3. ЭВОЛЮЦИЯ КОРНЕЙ СИСТЕМЫ ПРИ $\alpha = \beta$.

Для случая $\alpha = \beta$ функция (4) имеет вид

$$F_1(x) = \alpha^2 x(1-x)[1 - \alpha x(1-x)]$$

и является второй итерацией отображения Ферхюльста-Пирла. Эволюция этой функции при увеличении $\alpha \in [0, 4]$, корни уравнения $x = F_1(x)$ и поведение итераций с возникновением циклов хорошо известны (напр. [1]) и, как частный случай, будет следовать из утверждений пункта 4. Для проверки согласования построения зон в общем случае мы приводим следующие известные факты. Для $0 \leq \alpha \leq 1$ уравнение $x = F_1(x)$ имеет один нулевой корень $x_1 = 0$, для $1 < \alpha < 3$ нулевой неустойчивый и устойчивый корень $x_2 = 1 - \frac{1}{\alpha}$, а при $\alpha > 3$ — еще два корня

$$x_{3,4} = \frac{1}{2} \pm \frac{1 \mp \sqrt{(\alpha+1)(\alpha-3)}}{2\alpha}. \quad (5)$$

До значения $\alpha = 1 + \sqrt{5}$ обе точки (5) устойчивы, при переходе через это значение устойчивость теряется и за бифуркационным значением $1 + \sqrt{6}$ возникает цикл с периодом 2. Ради полноты изложения покажем, как вычисляется этот результат. Появление цикла характеризуется таким значением параметра $\alpha > 3$ при котором выполняется равенство $F_1'(x_4) = -1$. Так как угловой коэффициент биссектрисы первого координатного угла равен 1, то касательная к F_1 в точке x_4 ортогональна биссектрисе и возникает цикл. Равенство $F_1'(x_4) = -1$ эквивалентно уравнению $\alpha^2(1-2x)(1-2y) = -1$. Вследствие симметрии задачи на диагонали последнее выражение можно переписать в виде $\alpha^2(1-2x)(1-2\bar{x}) = -1$, где x и \bar{x} — сопряженные корни, определяемые выражением (5). В результате по-

лучим $\alpha^2 - 2\alpha - 5 = 0$, положительный корень которого равен $1 + \sqrt{6}$.

Приведем оригинальный график, поясняющий появление 2-х и 4-х корней, а также опишем их взаимное расположение связанное с некоторым эллипсом. Вычитая из первого уравнения системы (2) второе, получаем: 1) $x = y = 1 - 1/\alpha$, или 2) $x + y = 1 + 1/\alpha$. Разделив (2.1) на (2.2), получаем: 1) $x = y = 1 - 1/\alpha$, или 2) $x^2 + y^2 + xy - x - y = 0$. Итак, точки (x, y) являющиеся решениями системы (2) или лежат на диагонали квадрата $[0, 1]^2$ и имеют координаты $x_1 = y_1 = 1 - 1/\alpha$, или мы получаем решения как точки пересечения эллипса $x^2 + y^2 + xy - x - y = 0$ и прямой $x + y = 1 + 1/\alpha$. Проследим за эволюцией решений на рис. 5. Для $0 \leq \alpha \leq 1$ имеется одно решение $(0, 0)$, для $1 < \alpha < 3$ два решения $(0, 0)$ и (x_1, x_1) — точка на отрезке ОМ. Для $\alpha = 3$ точка бифуркации М является точкой касания прямой $x + y = 1 + 1/\alpha$ эллипса $x^2 + y^2 + xy - x - y = 0$ и одновременно точкой $x_1 = y_1 = 1 - 1/\alpha = 2/3$. Если $3 < \alpha < 4$, то кроме нулевой точки мы имеем три точки. Одна лежит на диагонали вне эллипса M_1 и имеет координаты $(1 - 1/\alpha, 1 - 1/\alpha)$. Две симметричные точки A_1 и A_2 — точки пересечения эллипса $x^2 + y^2 + xy - x - y = 0$ и прямой $x + y = 1 + 1/\alpha$.

Ниже в п. 4 будет показана решающая роль касательных в определении поведения итераций вблизи решений системы (2). В завершение данного пункта получим утверждение о касательных проведенных в точке пересечения парабол на диагонали для случая $\alpha = \beta$.

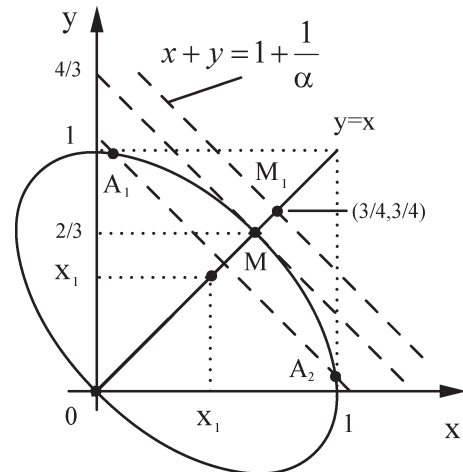


Рис. 5. Эволюция корней системы при $\alpha = \beta$

Утверждение. Если $\alpha = \beta$, то для угловых коэффициентов касательных к параболам, составляющим систему (2), в точке их пересечения, лежащей на диагонали справедливо равенство $k_1 \times k_2 = 1$.

Доказательство. Производная к первой параболе $y'(1-1/\alpha) = 2 - \alpha$. Производная ко второй $y'(1 - \frac{1}{\alpha}) = \pm \frac{1}{\sqrt{(\alpha-2)^2}} = \pm \frac{1}{|\alpha-2|}$. В силу

графического расположения вершины параболы $x = \alpha(y - y^2)$, знак плюс выбираем, если $\alpha < 2$, и минус, если $\alpha > 2$. Если $\alpha = 2$, то касательная к параболе $y = 2(x - x^2)$ в точке $x = 1/2$ параллельна оси абсцисс. А касательная к параболе $x = 2(y - y^2)$ в точке $x = 1/2$ ей ортогональна.

4. ЭВОЛЮЦИЯ КОРНЕЙ СИСТЕМЫ ПРИ $\alpha \neq \beta$

Рассмотрим подробнее поведение итерационной схемы в различных областях значений параметров α и β (рис. 4).

1. Область 1-root

Область устойчивости корня $x_1 = 0$. При любых начальных условиях итерационная последовательность сходится к точке $x = 0$ (рис. 6).

2. Область 2-root

Область, где корень $x_1 = 0$ теряет свою устойчивость. Устойчивым становится второй корень системы x_2 (рис. 7). Однако здесь возникают особенности, связанные с различным характером поведения итерационной

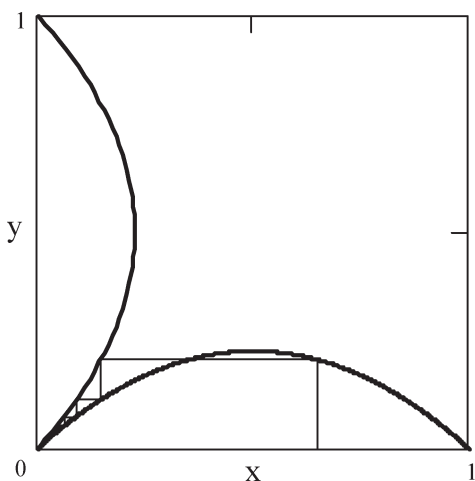


Рис. 6. Эволюция системы при $\alpha = 0.9$, $\beta = 0.9$

последовательности в зависимости от угла наклона касательных к графикам функций в точке пересечения. Рассматривая для простоты линейные функции, заметим, что итерационная последовательность сходится, если соответствующие производные в точке пересечения имеют одинаковый знак ($f'_1(x_0) \cdot f'_2(x_0) > 0$). Если итерационная последовательность расходится, то достаточно поменять уравнения местами, после чего последовательность будет сходиться.

Интересная особенность возникает, когда производные в точке пересечения графиков функций имеют противоположный знак ($f'_1 \cdot f'_2 < 0$), но равны по модулю ($|f'_1| = |f'_2|$). В этом случае вокруг точки пересечения возникает итерационный цикл (рис. 8). Другими словами, итерационным методом такую систему решить невозможно.

Возвращаясь к нашей задаче, будем искать области, где возможно образование итерационных циклов. Т.е. области с проти-

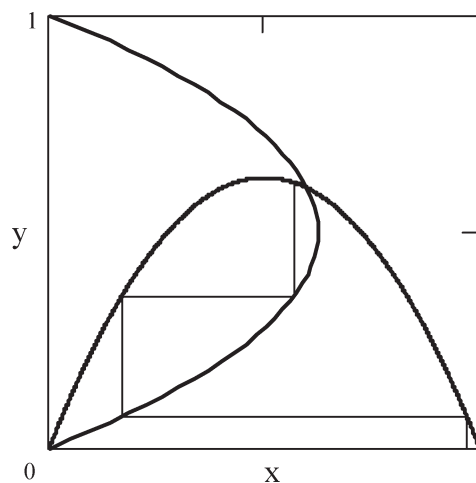


Рис. 7. Эволюция системы при $\alpha = 2.5$, $\beta = 2.5$

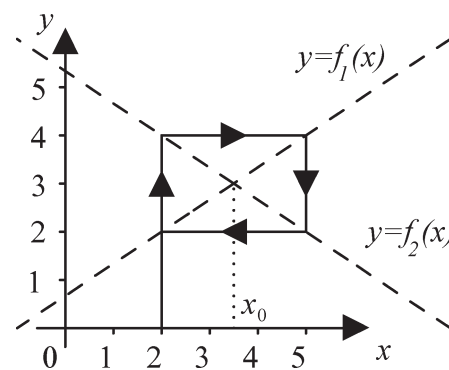


Рис. 8. Образование итерационного цикла

воположным знаком первой производной в точке пересечения ($f'_1 \cdot f'_2 < 0$). Очевидно, что для любой функции знак производной меняется на противоположный после прохождения максимума (рис. 9). Для первого уравнения системы (2) точка максимума есть $y(1/2) = \alpha/4$. Подставляя ее во второе уравнение, получим

$$\beta = \frac{8}{\alpha(4-\alpha)}. \tag{6}$$

Вследствие симметрии задачи имеем

$$\alpha = \frac{8}{\beta(4-\beta)}. \tag{7}$$

Мы получили области, в которых возможны возникновения итерационных циклов (рис. 10). Точки пересечения этих функций $\alpha = \beta = 2$ и $\alpha = \beta = 1 + \sqrt{5}$ определяют границы неустойчивости решений, что совпадает с поведением на диагонали (п. 3). Однако, такой переход еще

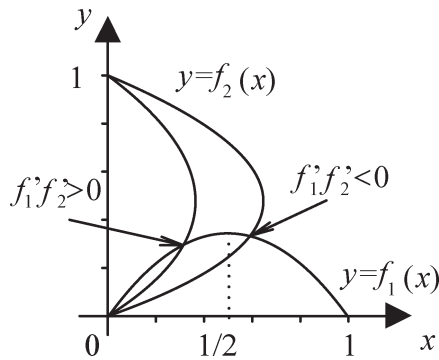


Рис. 9. Изменение знака производной при прохождении точки экстремума

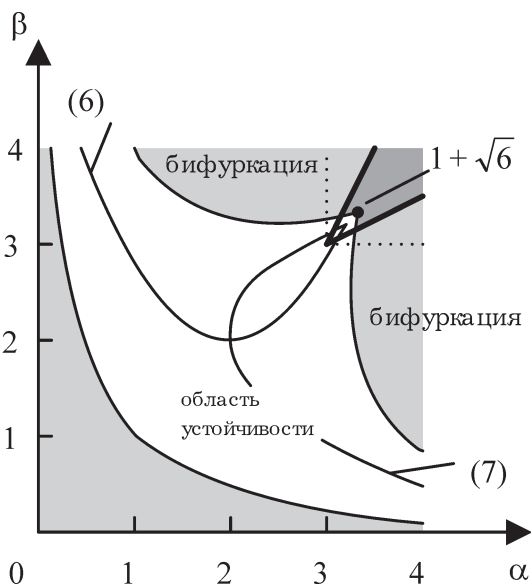


Рис. 10. Области образования бифуркаций

не гарантирует появление итерационных циклов, поскольку для них еще должно выполняться условие $f'_1 \cdot f'_2 = -1$. Выписывая это условие в виде $\alpha\beta(1-2x)(1-2y) = -1$, где x, y решение системы (2), получим область возникновения бифуркаций. Один из возможных сценариев событий при $\alpha = 2, \beta = 3.5$ показан на рис. 11. При любых начальных условиях итерационная последовательность сходится к аттрактору с центром в точке пересечения графиков функции.

3. Область 4-root

В данном пункте удобно рассматривать не только область, где имеются 3 или 4 корня решения системы уравнений (2), но всю область ограниченную значениями $3 < \alpha < 4, 3 < \beta < 4$.

В области 1 (рис.12) имеется одна устойчивая точка и поведение системы аналогично рис. 7. Кривая $g = 0$ соответствует значе-

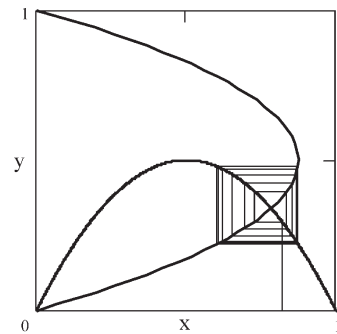


Рис. 11. Эволюция системы при $\alpha = 2, \beta = 3.5$

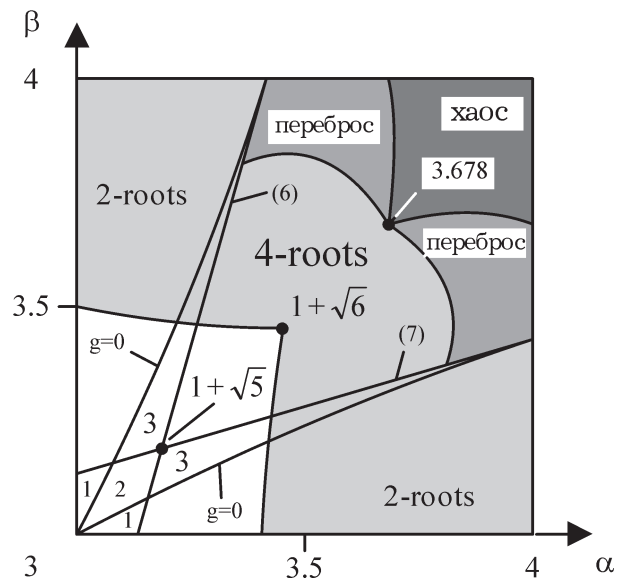


Рис. 12. Тонкая структура области $3 < \alpha < 4, 3 < \beta < 4$

ниям (α, β) , при которых система (2) имеет 3 корня. По существу 3-й корень есть точка касания кривых (2.1) и (2.2).

В области 2 (рис. 12) система (2) имеет 4 различных корня, из которых два центральных неустойчивы, а два остальных устойчивы (рис. 13).

Область 3 (рис. 12) соответствует пересечению одной функцией (2) максимума другой и образованию периодического цикла, аналогичного рис. 11. В области 4-roots рисунка 12 в зависимости от начальных условий аттракторы могут возникать вокруг любой из двух точек пересечения, расположенных по разную сторону от диагонали (рис. 14).

Наиболее сложные явления возникают при таких значениях параметров α и β , когда ширина аттракторов увеличивается настолько, что итерационные циклы начи-

нают перебрасываться из области одного аттрактора в область другого (рис. 15). Рассмотрим подробнее условия возникновения такого явления. Очевидно, что ширина цикла ограничивается максимумом функций. Пусть мы имеем два цикла, проходящие через максимумы функций (2.1) и (2.2) (рис. 14, 15). Первоначальная эволюция одного цикла протекает через состояния $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$, эволюция другого — через состояния $0' \rightarrow 1' \rightarrow 2' \rightarrow 3'$ (рис. 16). Очевидно, что ключевую роль здесь играет точка «А» — пересечения графиков функций (2.1) и (2.2). Если ширина аттрактора оказывается больше чем превышение точки «0» (или «0'») над точкой «А», то итерационный цикл $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ не сможет достичь своего аттрактора, поскольку перейдет в зону действия другого аттрактора. Рассматривая эволюцию цикла $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$, имеем

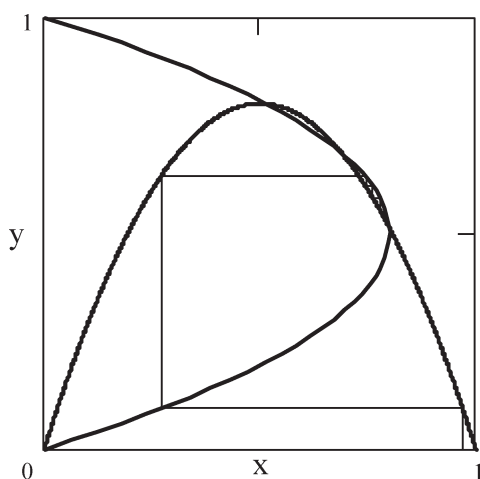


Рис. 13. Эволюция системы при $\alpha = 3.2$, $\beta = 3.2$

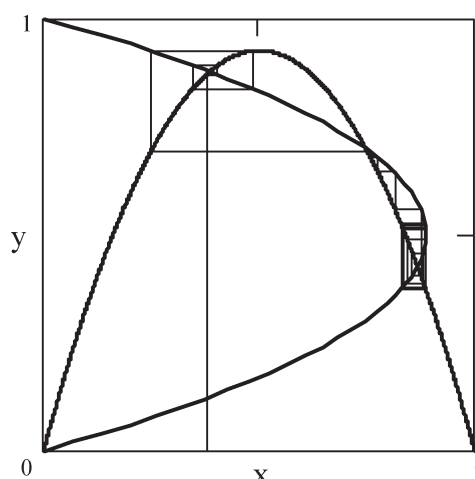


Рис. 15. Эволюция системы при $\alpha = 3.7$, $\beta = 3.55$

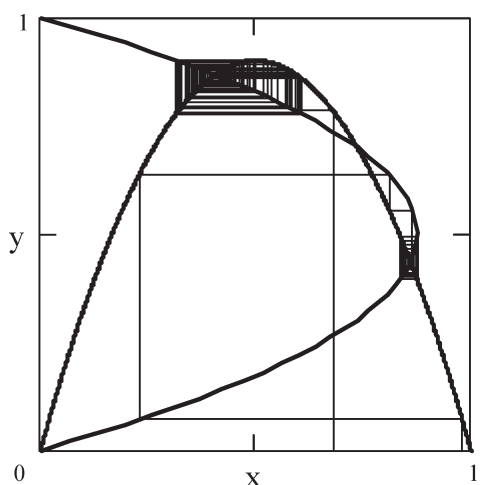


Рис. 14. Эволюция системы при $\alpha = 3.6$, $\beta = 3.5$

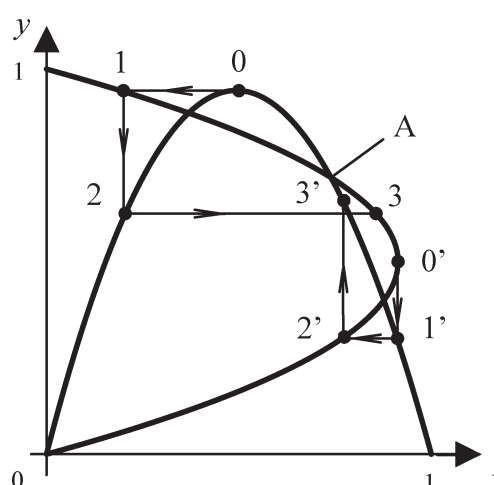


Рис. 16. Возникновение явления переброса между циклами

$$\begin{aligned}
 x_0 &= \frac{1}{2}, \\
 y_0 &= \frac{\alpha}{4}, \\
 x_1 &= \frac{\alpha\beta}{4} \left(1 - \frac{\alpha}{4}\right), \\
 y_2 &= \frac{\alpha^2\beta}{4} \left(1 - \frac{\alpha}{4}\right) \left[1 - \frac{\alpha\beta}{4} \left(1 - \frac{\alpha}{4}\right)\right], \\
 x_3 &= \frac{\alpha^2\beta^2}{4} \left(1 - \frac{\alpha}{4}\right) \left[1 - \frac{\alpha\beta}{4} \left(1 - \frac{\alpha}{4}\right)\right] \times \\
 &\times \left\{1 - \frac{\alpha^2\beta}{4} \left(1 - \frac{\alpha}{4}\right) \left[1 - \frac{\alpha\beta}{4} \left(1 - \frac{\alpha}{4}\right)\right]\right\}.
 \end{aligned}$$

Для цикла $0' \rightarrow 1' \rightarrow 2' \rightarrow 3'$ получим

$$\begin{aligned}
 y_{0'} &= \frac{1}{2}, \\
 x_{0'} &= \frac{\beta}{4}, \\
 y_{1'} &= \frac{\alpha\beta}{4} \left(1 - \frac{\beta}{4}\right), \\
 x_{2'} &= \frac{\alpha\beta^2}{4} \left(1 - \frac{\beta}{4}\right) \left[1 - \frac{\alpha\beta}{4} \left(1 - \frac{\beta}{4}\right)\right].
 \end{aligned}$$

Приравнивая $x_2 = x_3$, получим уравнение кривой начала перекрытия аттракторов. Пользуясь симметрией задачи, можно принять $x_3 = 1 - x_1$ и упростить выражение: $x_2 = 1 - x_1$ или

$$\frac{\alpha\beta^2}{4} \left(1 - \frac{\beta}{4}\right) \left[1 - \frac{\alpha\beta}{4} \left(1 - \frac{\beta}{4}\right)\right] = 1 - \frac{\alpha\beta}{4} \left(1 - \frac{\alpha}{4}\right).$$

При $\alpha = \beta$ это выражение принимает вид

$$\frac{\alpha^3}{4} \left(1 - \frac{\alpha}{4}\right) - 1 = 0$$

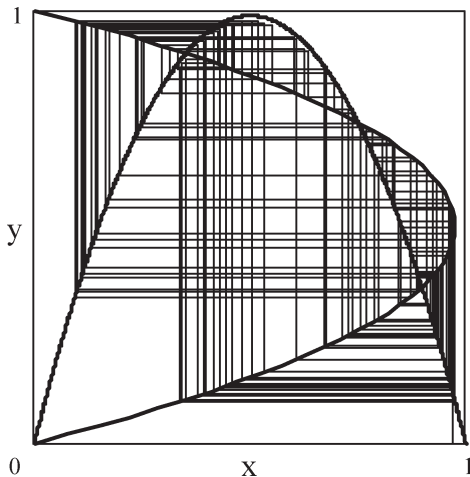


Рис. 17. Эволюция системы при $\alpha = 3.95$, $\beta = 3.9$

с вещественным решением

$$\alpha = \frac{2}{3} \left(\sqrt{19 + 3\sqrt{33}} + \frac{4}{\sqrt{19 + 3\sqrt{33}}} + 1 \right) \approx 3.678.$$

Таким образом, при значениях $\alpha, \beta \geq 3.678$ возникает то, что принято называть хаосом. Ширина циклов увеличивается настолько, что бесконечно повторяющаяся итерационная последовательность может принимать практически любые значения, пытаясь равномерно заполнить все пространство состояний (рис. 17).

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе для системы (1) проведен подробный анализ двухпараметрической критичности с присущей данной системе структурой пространства параметров вблизи линий критических точек. Определены области изменения управляющих параметров, гарантирующие реализацию определенной эволюционной ситуации: зоны устойчивых решений, зоны появления бифуркации и циклов, зона хаоса и неопределенности.

Сравнивая эволюцию полученной системы с динамикой непрерывных гамильтоновых систем, можно провести аналогию между «диффузией Арнольда» (возникновением процессов переброса между стохастическими слоями фазового пространства) и перекрытием аттракторов (рис. 15, 16). Оба эти явления приводят к такой развитой стохастичности движения (рис. 17), которая начинает обладать свойствами «эргодичности», т.е. для любой динамической переменной системы ее среднее по времени сравнивается со средним по совокупности (по фазовому объему).

Отметим, что выводы данной работы о строении бифуркационных диаграмм согласуются с фундаментальными положениями, имеющимися в [10, 11]. Кроме того, в данной статье мы не проводили ни приближенного, ни точного ренормгруппового анализа вдоль какого-либо направления совместного изменения управляющих параметров. Кроме диагонального направления в работе также не изучались виды скейлинга, возникающего при подходе к области, закрашенной темным цветом на рис. 12. Авторы надеются проделать эти и другие исследования по известной классической схеме (см. напр. [5, 7]) в следующих работах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Компьютеры и нелинейные явления. М. Наука. 1988.
2. Скалецкая Е.И., Фрисман Е.Я., Шапиро А.П. Дискретные модели динамики численности популяций и оптимизация промысла. М.: Наука. 1979.
3. Шапиро А.П. Об устойчивости популяции каннибалов // Матем. моделирование популяционных экологических процессов. Владивосток, 1987. С. 106—112.
4. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П. Критическая динамика одномерных отображений // Изв. вузов. ПНД, 1993. Т. 1, № 1, 2.
5. Кузнецов С.П. Динамика двух однонаправлено-связанных систем Фейгенбаума у порога гиперхаоса. Ренормгрупповой анализ // Изв. вузов. Радиофизика. 1990. Т. 33. № 7.
6. Кузнецов С.П. Универсальность и подобие в поведении связанных систем Фейгенбаума // Изв. вузов. Радиофизика. 1985. Т. 28. № 6.
7. Кузнецов С.П. Хаос: сценарий Фейгенбаума и его обобщения // Империя матем. 2000. № 1.
8. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Сатаев И.Р. Воздействие фрактального сигнала на систему Фейгенбаума и бифуркация в уравнении ренормгруппы // Изв. вузов. Радиофизика. 1990. Т. 34. № 6.
9. Волкова Н.В., Родин В.А. О совместном существовании двух популяций хищников // Промышленная информатика. Межвуз. сборник трудов ВГПУ. 2002.
10. Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М. Особенности дифференцируемых отображений. Классификация критических точек каустик и волновых фронтов. М.: Наука. 1982. 304 с.
11. Бреккер Т., Ландер Л. Дифференцируемые ростки и катастрофы. М.: Мир, 1984. Т. 1. 350 с., Т. 2. 285 с.