УДК 517.9

ОБ ИССЛЕДОВАНИИ ВОЗМУЩЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ ОТНОШЕНИЙ МЕТОДОМ ПОДОБНЫХ ОПЕРАТОРОВ*

© 2004 Н. Б. Ускова

Воронежский государственный технический университет

В статье рассматриваются вопросы применения метода подобных операторов для изучения спектральных характеристик возмущенных нормальных линейных отношений. Приводятся модельные примеры, на которых иллюстрируются некоторые практические аспекты применения доказанных теорем. Полученные результаты прилагаются к спектральной теории упорядоченных пар линейных операторов.

В работе обсуждаются вопросы применения метода подобных операторов, обычно используемого для изучения спектральных характеристик возмущенных линейных операторов и являющегося альтернативой резольвентному методу, в теории возмущенных линейных отношений. В первом параграфе приведены основные понятия из теории линейных отношений. Отметим, что за рубежом в последнее время усилился интерес к теории линейных отношений (многозначных линейных операторов), в частности появились монографии [1], [2]. В качестве примера, иллюстрирующего возникновение линейного отношения, приведем следующий подход к определению сходящейся последовательности замкнутых операторов. Последовательность замкнутых линейных операторов $A_n : \mathcal{D}(A_n) \subset H \to H,\ n \geq 1$, называется сходящейся к оператору $A_0 : \mathcal{D}(A_0) \subset H \to H$, если пересечение $K = \bigcap_{n\geq 1} \rho(A_n)$ резольвентных множеств $\rho(A_n)$ операторов $A_n,\ n \geq 1$, непусто и для некоторого $\lambda_0 \in K$ выполнено условие $\lim_{n\to\infty} \|(A_n - \lambda_0 I)^{-1} - (A_0 - \lambda_0 I)^{-1}\| = 0$. Разумеется, здесь нет никаких дополнительных условий на $\mathcal{D}(A_n),\ n \geq 1$ и A_0 может быть не замкнутым линейным оператором, а замкнутым линейным отношением (терминологию см. далее). Во втором параграфе в адаптированной для рассматриваемого случая форме излагаются основные понятия метода подобных операторов, разработанного А. Г. Баскаковым [3, гл. 2], [4] и берущего свое начало с метода Тернера подобных операторов [5, с. 539]. В третьем параграфе метод подобных операторов применяется для исследования возмущенных нормальных линейных отношений. Некоторые практические аспекты применения теорем о подобии рассмотрены в четвертом параграфе. Пример, иллюстрирующий применение доказанных теорем, приведен в пятом параграфе. Наконец, в последнем параграфе полученные результаты прилагаются к спектральной теории упорядоченных пар линейных операторов.

§ 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ИЗ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ОТНОШЕНИЙ

Введем некоторые, используемые далее, определения из теории линейных отношений. Заметим, что мы будем придерживаться терминологии из [6].

Пусть H — гильбертово пространство. Линейным отношением на H называется линейное подпространство $A \subset H \times H$. Если это линейное подпространство замкнуто в $H \times H$, то оно называется замкнутым линейным отношением. Далее рассматриваются только замкнутые линейные отношения и термин «замкнутые» везде будет опускаться.

Подпространство $\mathcal{D}(A) = \{x \in H : \exists y \in H$ такой, что $(x, y) \in A\}$, $\mathcal{D}(A) \subset H$ называется областью определения линейного отношения $A \subset H \times H$. Через $Ax,\ x \in \mathcal{D}(A)$ обозначается множество $\{y \in H,\ (x, y) \in A\}$. Если линейное отношение A является графиком некоторого линейного оператора, то они отождествляются и обозначаются одним и тем же символом.

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 01-04-00141.

Обратное отношение $A^{-1} \subset H \times H$ определяется равенством $A^{-1} = \{(y,x) \subset H \times H : (x,y) \in A\}$.

Резольвентным множеством линейного отношения $A \subset H \times H$ называется множество $\rho(A)$, состоящее из всех таких чисел $\lambda \in \mathbb{C}$, что $(A - \lambda I)^{-1}$ принадлежит банаховой алгебре $\mathrm{End}\, H$ ограниченных линейных операторов, действующих в H. Резольвента линейного отношения A задается формулой $R(\lambda, A) = (A - \lambda I)^{-1} : \rho(A) \to \mathrm{End}\, H$, причем $A0 = \mathrm{Ker}\, R(\lambda_0, A)$, $\mathcal{D}(A) = \mathrm{Im}\, R(\lambda_0, A)$ $\forall \lambda_0 \in \rho(A)$. Спектр $\sigma(A)$ определяется следующим образом: $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$. В теории линейных отношений наряду с понятием спектра обычно используется понятие расширенного спектра. Расширенным спектром линейного отношения $A \subset H \times H$ называется подмножество $\bar{\sigma}(A)$ из расширенной комплексной плоскости $\tilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, которое совпадает с $\sigma(A)$, если $A0 = \{0\}$, резольвента $R(\lambda, A)$ допускает голоморфное расширение в точку бесконечность и $R(\infty, A) = 0$. В противном случае считается $\tilde{\sigma}(A) = \sigma(A) \cup \{\infty\}$. Отметим, что бесконечность принадлежит расширенному спектру линейного отношения, если $\dim A0 \geq 1$. Ниже обычно вместо термина «линейное отношение» будем пользоваться просто термином «отношение».

Далее нам понадобятся понятия суммы и произведения линейных отношений. Суммой двух отношений A и B называется линейное подпространство из $H \times H$ вида $A + B = \{(x,y) \in H \times H : x \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B),\ y \in Ax + Bx\}$. Или $\mathcal{D}(A+B) = \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)$ и под выражением $Ax + Bx$, $x \in \mathcal{D}(A+B)$ понимается алгебраическая сумма двух множеств Ax и Bx. Под произведением линейных отношений $A \subset H \times H$ и $B \subset H \times H$ понимается линейное подпространство из $H \times H$ вида $AB = \{(x,z) \in H \times H : \exists y \in D(A)$, такое что $(x,y) \in B$, $(y,z) \in A$.

Замкнутое линейное подпространство $H_0 \subset H$ называется инвариантным для отношения A с непустым $\rho(A)$, если H_0 инвариантно относительно всех операторов $R(\lambda, A)$, $\lambda \in \rho(A)$. Сужением отношения A на подпространство H_0 называется отношение A_0, резольвентой которого является сужение резольвенты $R(\lambda, A)$ отношения A на H_0.

Пусть пространство H разлагается в прямую сумму инвариантных относительно отношения A подпространств $H = H_0 \oplus H_1$, $A_0 = A \mid H_0$, $A_1 = A \mid H_1$, где $A \mid H_i$ означает сужение отношения A на подпространство H_i, $i = 0,1$, тогда отношение A является прямой суммой отношений $A = A_0 \oplus A_1$, то есть $\forall x \in \mathcal{D}(A)$ $x = x_0 + x_1$, $Ax = A_0x_0 + A_1x_1$, $x_i \in \mathcal{D}(A_i) \subset H_i$, $i = 0,1$ и Ax — алгебраическая сумма множеств A_0x_0 и A_1x_1.

Для линейных отношений справедливы следующие теоремы (см. [6]).

Теорема 1. [6] Если отношение A есть прямая сумма отношений A_0 и A_1, то $\tilde{\sigma}(A) = \tilde{\sigma}(A_0) \cup \tilde{\sigma}(A_1)$, $i = 0,1$.

Теорема 2. [6] Пусть расширенный спектр $\tilde{\sigma}(A)$ линейного отношения A представим в виде $\tilde{\sigma}(A) = \sigma_0 \cup \sigma_1$, где σ_0 — компакт из $\mathbb{C}$, σ_1 — замкнутое множество из $\tilde{\mathbb{C}}$, $\sigma_0 \cap \sigma_1 = \varnothing$. Тогда $A_0 \in \mathrm{End}\, H_0$, $\tilde{\sigma}(A_0) = \sigma_0$, $A_1 0 = A0 = \mathrm{Ker}\, R(\lambda, A) \subset H_1$ $\forall \lambda \in \rho(A)$, $\mathcal{D}(A) = H_0 \oplus \mathcal{D}(A_1)$, $\tilde{\sigma}(A_1) = \sigma_1$.

Теорема 3. [6] $\tilde{\sigma}(A^{-1}) = \{\frac{1}{\lambda} : \lambda \in \tilde{\sigma}(A)\}$.

Пусть теперь отношение $A \subset H \times H$ имеет дискретный спектр и непустое резольвентное множество $\rho(A)$. Назовем отношение A нормальным отношением с дискретным спектром, если для некоторого числа $\lambda_0 \in \rho(A)$ отношение $(A - \lambda_0 I)^{-1}$ есть нормальный оператор с дискретным спектром. Из резольвентного тождества Гильберта вытекает, что в этом случае для всех $\lambda \in \rho(A)$ оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ также будет нормальным оператором.

Заметим, что так как множество линейных замкнутых операторов является подмножеством множества линейных замкнутых отношений, то мы автоматически определили и понятие нормального линейного замкнутого оператора с дискретным спектром.

Непосредственно из определения нормального отношения следует

Лемма 1. Пусть A — нормальное отношение с дискретным спектром. Тогда пространство H есть прямая сумма инвариантных относительно A подпространств $H = H_0 \oplus H_\infty$, где $A_0 = A\,|_{H_0}$: $\mathcal{D}(A_0) \subset H \to H$ нормальный линейный оператор, не обязательно ограниченный, $H_\infty = A0$, $(A\,|_{H_\infty})^{-1} = 0$, $\mathcal{D}(A\,|_{H_\infty}) = 0$, $A\,|_{H_\infty}\, 0 = A0$.

Точку бесконечность из $\tilde{\sigma}(A)$ назовем полупростой точкой спектра, если у обратного отношения A^{-1} точка нуль есть полупростое собственное значение, т. е. $A^{-1}P_1 = 0$, где P_1 — проектор Рисса, построенный по спектральному множеству $\{0\}$ оператора A^{-1}, и простой точкой спектра, если у обратного отношения нуль — простое собственное значение.

Примеры задач, приводимых к изучению линейных отношений, можно найти в [6]. Мы ограничимся рассмотрением только одного примера.

Пример. Пусть $C : \mathcal{D}(C) \subset H \to H$ − нормальный оператор с дискретным спектром $C = \{(x, Cx) \subset H \times H, x \in D(C)\}$ и $\operatorname{Ker} C \neq \{0\}$. Тогда оператор C необратим, но можно построить обратное отношение $A = C^{-1} = \{(Cx, x) \subset H \times H, \ x \in \mathcal{D}(C)\}$. Так как C — нормальный оператор, то $H = \operatorname{Im} C \oplus \operatorname{Ker} C = H_0 \oplus H_\infty$, $H_0 = \operatorname{Im} C$, $H_\infty = \operatorname{Ker} C$. Любой вектор $x \in H$ может быть представлен в виде $x = x_0 + x_\infty$, где $x_0 \in H_0$, $x_\infty \in H_\infty$, $Cx = Cx_0$, и $Cx = 0 \ \ \forall x \in H_\infty$. Поэтому введенное отношение $A \subset H \times H$ имеет неплотную в H область определения $\mathcal{D}(A) = \{x \in H : x \in H_0\}$. Точка бесконечность, как точка спектра отношения A наследует характеристики точки спектра нуль оператора C. Заметим, что если собственные значения $\lambda_i(C)$ не стремятся к нулю при $i \to \infty$, то $A_0 = A|_{H_0} \in \operatorname{End} H_0$, в противном случае $A|_{H_0}$ − неограниченный линейный оператор, точка бесконечность не просто входит в расширенный спектр линейного отношения A, но и не является изолированной точкой спектра.

§ 2. МЕТОД ПОДОБНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Основная идея метода состоит в следующем. Пусть A — линейный оператор, хорошо изученный, считающийся невозмущенным и B — оператор возмущения, который в некотором смысле мал по сравнению с A. При выполнении определенных условий оператор $A - B$ может быть подобен оператору $A - B_0$, где оператор B_0 имеет несложную по отношению к A структуру.

Обычно в методе подобных операторов возмущение B принадлежит пространству операторов, подчиненных оператору A. Но, в силу специфики рассматриваемых проблем, возмущение B в данном случае будет принадлежать $\operatorname{End} H$.

Введем далее понятие допустимой тройки метода подобных операторов.

Пусть $\mathcal{M}$ — линейное многообразие операторов из $\operatorname{End} H$ и J: $M \to M$, $\Gamma : \mathcal{M} \to \operatorname{End} H$ — линейные операторы. Тройку $\mathcal{M}, J, \Gamma$ назовем допустимой тройкой для оператора A, а $\mathcal{M}$ — допустимым пространством возмущений, если

1) $\mathcal{M}$ — банахово пространство со своей нормой, непрерывно вложенное в $\operatorname{End} H$, т. е. $\|X\| = \|X\|_M \geq \mathrm{const}\, \|X\|_{\operatorname{End} H}$, $\forall x \in M$;

2) J и Γ — непрерывные операторы, $J^2 = J$;

3) $(\Gamma X)(\mathcal{D}(A)) \subset \mathcal{D}(A)$ и $A\Gamma X = \Gamma X A + X - JX$, $\forall X \in \mathcal{M}$;

4) $\Gamma X Y, (X)Y \in \mathcal{M} \quad \forall X, Y \in \mathcal{M}$ и $\exists \gamma > 0$, что $\|\Gamma\| < \gamma$, $\max\{\|X \Gamma Y\|, \|(\Gamma X)Y\|\} \leq \gamma \|X\| \|Y\|$, $\forall X, Y \in \mathcal{M}$.

Зафиксируем теперь некоторую допустимую для оператора A тройку $(M, J,)$ и рассмотрим некоторое возмущение $B \in \mathcal{M}$. Будем искать оператор преобразования оператора $A - B$ в оператор $A - JX$ в виде $U = I + \Gamma X$, где X − подлежащий определению оператор из $\mathcal{M}$. Тогда из равенства

$$(A - B)(I + \Gamma X) = (I + \Gamma X)(A - JX)$$

и аксиом допустимой тройки следует (подробности см. в [3, гл. 2]), что операторы $A - B$ и $A - JX$ подобны, если X есть решение нелинейного операторного уравнения

$$X = B\Gamma X - (\Gamma X)JB - \Gamma X J(B\Gamma X) + B. \qquad (1)$$

Теорема 4. [4] Пусть возмущение B таково, что $4\|B\| \cdot \|\Gamma\| \cdot \|J\| < 1$. Тогда оператор $A - B$ подобен оператору $A - JX$, где X есть решение уравнения (1) и оно может быть найдено методом итераций, используя в качестве нулевого приближения нулевой оператор.

В качестве примера допустимой тройки приведем следующий пример. Пусть λ_i — полупростое собственное значение невозмущенного оператора A, т.е. $AQ_i = \lambda_i Q_i$, где $Q_i = P(\{\lambda_i, A\})$ — проектор Рисса, построенный по множеству $\{\lambda_i\}$. Можно показать, что допустимой тройкой для оператора A будет $(\operatorname{End} H, J, \Gamma)$, где операторы J и Γ задаются формулами

$$JX = Q_i X Q_i + (I - Q_i)X(I - Q_i), \ \ X \in \operatorname{End} H$$

$$\Gamma X = Q_i X S - S X Q_i, \ \ X \in \operatorname{End} H$$

и оператор $S \in \operatorname{End} H$ однозначно определяется равенствами

$(\lambda_i I - A)S = S(\lambda_i I - A) = I - Q_i, \ \ Q_i S = SQ_i = 0.$

Указанная допустимая тройка позволяет получать оценки простого изолированного собственного значения и соответствующего собственного вектора возмущенного оператора $A - B$, $B \in \mathrm{End}\, H$ (см., например, [7]). Отметим, что для получения оценок условие $B \in \mathrm{End}\, H$ необязательно, они остаются в силе и в случае $B \in \mathcal{L}_A(H)$, где $\mathcal{L}_A(H)$ — пространство операторов, подчиненных оператору A.

Введем некоторые обозначения и приведем без доказательства соответствующую теорему.

Пусть $X_{11} = Q_i X Q_i$, $X_{12} = Q_i X(I - Q_i)$, $X_{21} = (I - Q_i)XQ_i$, $X_{22} = (I - Q_i)X(I - Q_i)$, $X \in \mathrm{End}\, H$, $b_{ij} = \|B_{ij}\|$, $s = \|S\|$, $b_1 = \|B_{21}e_i\|$, $Ae_i = \lambda_i e_i$, $A^* f_i = \bar{\lambda} f_i$ и λ_i — простое изолированное собственное значение оператора A. Символом $\tilde{b}_{22}$ обозначим норму оператора $X_{21} \mapsto B_{22}SX_{21} : \mathrm{End}_{21} H \to \mathrm{End}_{21} H$, а символом $\tilde{b}_{12}$ — норму оператора $X_{21} \mapsto B_{12}SX_{21} : \mathrm{End}_{21} H \to \mathrm{End}_{21} H$, где $\mathrm{End}_{ij} H = \{X \in \mathrm{End}\, H : X_{ij} = X, \ i = 1, 2\}$.

Теорема 5. Пусть возмущение B такое, что выполнено условие

$$\tilde{b}_{22} + b_{11}s + 2\sqrt{b_1 s \tilde{b}_{12}} < 1, \tag{2}$$

или более грубое условие

$$4\max\{\tilde{b}_{22}, \tilde{b}_{12}, sb_{11}, sb_1\} < 1. \tag{3}$$

Тогда собственное значение $\tilde{\lambda}_i$ возмущенного оператора $A - B$ и соответствующий собственный вектор $\tilde{e}_i$ могут быть найдены по формулам $\tilde{e}_i = e_i + SX_{21}e_i$, $\tilde{\lambda}_i = \lambda_i - (Be_i, f_i) - (B_{12}SX_{21}e_i, f_i)$, где вектор $y = X_{21}e_1$ есть решение нелинейного векторного уравнения

$$y = P_2 BSy - SyB_{11} - (BSy, f_i)Sy + P_2 Be_i$$

и оно может быть найдено методом итераций, начиная с нулевого вектора. В частности, первыми приближениями к $\tilde{\lambda}_i$ и $\tilde{e}_i$ являются $\tilde{\lambda}_i^{(1)} = \lambda_i - (Be_i, f_i) - (B_{12}SB_{21}e_i, f_i)$, $\tilde{e}_i^{(1)} = e_i + SB_{21}e_i$, причем справедливы оценки

$$\|\tilde{e}_i - e_i\| \frac{2sb_1}{1 - \tilde{b}_{22} - b_{11}s} = \alpha s, \ \ \left|\tilde{\lambda}_i - \lambda_i + (Be_i, f_i)\right| \tilde{b}_{12}\alpha,$$

$$\|\tilde{e}_i - \tilde{e}_i^{(1)}\| s \frac{(\tilde{b}_{22}b_1 + b_{11}sb_1 + \tilde{b}_{12}b_1^2 s)}{1 - \tilde{b}_{22} - b_{11}s - 2\tilde{b}_{12}b_1 s} = \beta s,$$

$$\left|\tilde{\lambda}_i - \tilde{\lambda}_i^{(1)}\right| \tilde{b}_{12}\beta.$$

Отметим, что если уравнение (1) разрешимо, то условия (2), (3) выполняются автоматически.

§ 3. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПОДОБНЫХ ОПЕРАТОРОВ К ИССЛЕДОВАНИЮ ВОЗМУЩЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ ОТНОШЕНИЙ

Пусть $A \subset H \times H$ — нормальное отношение с дискретным спектром, расширенный спектр $\tilde{\sigma}(A)$ которого допускает представление

$$\tilde{\sigma}(A) = \bigcup_{i \ge 1} \sigma_i \cup \{\infty\}, \tag{4}$$

причем бесконечность есть полупростая точка спектра. Без ограничения общности можем считать отношение A обратимым. Отметим, что из определения нормального отношения с дискретным спектром и леммы 1 следует, что $\sigma(A_0) = \bigcup_{i \ge 1} \sigma_i$, где $A_0 = A|_{H_0}$, $H = H_0 \oplus H_\infty$, $H_\infty = A0$. По спектральным подмножествам σ_i, $i \ge 1$ оператора A_0 построим проекторы Рисса $P_i = P(\sigma_i, A_0)$, $i \ge 1$, и построим проектор P_∞ по спектральному множеству $\{0\}$ обратного оператора $A^{-1} \in \mathrm{End}\, H$. Каждому оператору $H \in \mathrm{End}\, H$ поставим в соответствие матрицу (X_{ij}), составленную из элементов $X_{ij} = P_i X P_j$, $1 \le i$, $j \le \infty$.

Возмутим теперь отношение A некоторым оператором $\tilde{B} \in \mathrm{End}\, H$ и получим теорему о подобии возмущенного отношения $A - \tilde{B}$ более просто устроенному отношению $A - B_0$, спектральные свойства которого легко изучить, так как они близки к спектральным свойствам отношения A.

Так как A — нормальное отношение, то $H = H_0 \oplus H_\infty$, где $H_\infty = A0$, $H_\infty = \mathrm{Ker}\, R(\lambda_0, A)$, $\lambda_0 \in \rho(A)$ и $H_0 = \mathrm{Im}(\lambda_0, A) = \mathcal{D}(A_0)$, $A_0 : \mathcal{D}(A_0) \subset H \to H$ — нормальный линейный оператор. Непосредственно из определения суммы линейных отношений следует, что $\mathcal{D}(A - \tilde{B}) = \mathcal{D}(A) \cap H = \mathcal{D}(A)$. Пусть Q_0 — проектор на H_0, тогда, в силу определения линейного отношения $A - \tilde{B} = A - B$ на векторах из $\mathcal{D}(A)$, где оператор B определяется следующим образом:

$$Bx = \begin{cases} Q_0 \tilde{B} Q_0 x, & x \in H_0, \\ 0, & x \in H_\infty. \end{cases}$$

Поэтому далее вместо возмущенного отношения $A-\tilde{B}$ мы будем рассматривать отношение $A-B$ и т. к. $B\in \operatorname{End} H_0$, то в качестве пространства допустимых возмущений $\mathcal{M}$ возьмем $\operatorname{End} H_0$.

Займемся построением операторов $J:\mathcal{M}\to\mathcal{M}$ и $\Gamma:\mathcal{M}\to\mathcal{M}$. Определим оператор J формулой

$$JX=\sum_{i\geq 1}P_iXP_i,\quad X\in\mathcal{M},$$

заметим, что так как $X\in\mathcal{M}$, то $P_\infty XP_i = P_jXP_\infty = P_\infty XP_\infty = 0$, $\forall\, i,j$. Оператор Γ сначала определим для элемента X_{ij} матрицы оператора X, очевидно, что $\Gamma X_{ij}=0$ при $\Gamma X_{ij}=0$. В качестве X_{ij} при $X_{ij}\neq 0$ возьмем оператор $Y_{ij}\in\operatorname{End} H$, являющийся решением уравнения

$$AY_{ij}=Y_{ij}A+X_{ij},\ \ i\neq j \tag{5}$$

и $Y_{ii}=0$. Так как $AP_i=A|_{\operatorname{Im}P_i}$, причем $A|_{\operatorname{Im}P_i}=A_0|_{\operatorname{Im}P_i}$, $P_i\neq P_\infty$, то уравнения (5) есть обычные нелинейные операторные уравнения. Уравнения (5) разрешимы, каждое имеет единственное решение Y_{ij}, причем $\|Y_{ij}\|\leq\dfrac{5\|X_{ij}\|}{\operatorname{dist}(\sigma_i,\sigma_j)}$ (подробности см. в [8, 9]).

Известно также ([10, теорема 1.6]), что оператор $Z\in\operatorname{End} H$ может быть представлен формулой

$$Z=\lim_{n\to\infty}\sum_{|p|n}\left(1-\frac{|p|}{n}\right)Z_p,\ \text{ где }\ Z_p=\sum_{i-j=p}Z_{ij},$$

$$\|Z_p\|=\sup_{i-j=p}\|Z_{ij}\|,$$

и для оператора X_p имеем оценку $\|X_p\|\leq 5\sup_{i-j=p}(\operatorname{dist}(\sigma_i,\sigma_j))^{-1}\|X_{ij}\|$. Следовательно, ряд $\sum_p X_p$ сходится в $\operatorname{End} H$ по операторной норме. Таким образом, оператор $\Gamma:\mathcal{M}\to\mathcal{M}$, удовлетворяющий аксиоме 3, построен. Выполнение аксиомы 4 очевидно, при этом в качестве константы γ можно взять величину $\gamma=5\max_p\sup_{i-j=p}(\operatorname{dist}(\sigma_i,\sigma_j))^{-1}$.

Следовательно, доказана

Теорема 6. Пусть выполнено условие

$$20\|B\|\|J\|\gamma<1. \tag{6}$$

Тогда возмущенное отношение $A-\tilde{B}$ подобно отношению $A-\sum_{i\geq 1}P_iXP_i$, где X есть решение нелинейного операторного уравнения (1) и оно может быть найдено методом простых итераций, начиная с нулевого приближения.

Заметим, что условие (6), гарантирующее подобие отношений $A-B$ и $A-JX$ предполагает либо малость возмущения B, либо достаточную отделенность друг от друга спектральных множеств σ_j, что не всегда выполнимо. В случае, когда $\operatorname{dist}(\sigma_i,\sigma_j)\to\infty$ при $i,j\to\infty$ удобно преобразованием подобия линейное отношение $A-B$ переводить к такому отношению $A-B_0$, чтобы матрица оператора $B_0\in\mathcal{M}$ была блочно-диагональной структуры. При этом за счет подходящего объединения спектральных подмножеств условие, гарантирующее разрешимость операторного уравнения и, следовательно, подобие операторов $A-B$ и $A-B_0$ будет выполняться автоматически.

Теорема 7. Пусть $\lim_{i,j\to\infty}\operatorname{dist}(\sigma_i,\sigma_j)\to\infty$. Тогда существует такое натуральное число k, что отношение $A-\tilde{B}$ подобно отношению $A-\sum_{i\geq k+1}P_iXP_i-Q_kXQ_k$, где $Q_k=\sum_{i=1}^{k}P_i$ и $X\in\mathcal{M}$ — решение нелинейного операторного уравнения (1).

Доказательство теоремы 7 аналогично доказательству теоремы 6 и остановимся только на отличных моментах. Оператор $J:\mathcal{M}\to\mathcal{M}$ задается формулой $JX=Q_kXQ_k+\sum_{i\geq k+1}P_iXP_i$ (оператор блочной диагонализации). Оператор Γ строится также, как и в предыдущей теореме, только ΓX_{ij} полагаем равным нулю, если $i\leq k$ и $j\leq k$ и $X_{ii}=0$ $\forall i$. Условие теоремы 4, обеспечивающее разрешимость нелинейного операторного уравнения (1) выполняется автоматически за счет выбора подходящего числа k, отвечающего за размер блока Q_kXQ_k, так как норма оператора Γ пропорциональна величине $\sup_{i\neq j}(\operatorname{dist}(\sigma_i,\sigma_j))^{-1}$, а, по условию теоремы, эту величину можно сделать сколь угодно малой.

Итак, доказаны теоремы 6, 7, утверждающие о возможности преобразованием подобия приведения возмущенного отношения $A-\tilde{B}$ к отношению $A-JX$, где $JX\in\mathcal{M}$ имеет матрицу блочно-диагональной или диагональной формы. Из теорем 6, 7 немедленно следует, что точка бесконечность является устойчивой точкой спектра отношения A и она остается и в спектре возмущенного отношения $A-\tilde{B}$, $\tilde{B}\in \mathrm{End}\, H$. Для нахождения других точек спектра можно рассмотреть допустимую тройку из параграфа 3 и воспользоваться теоремой 5. Отметим, что в рассматриваемом случае в качестве пространства допустимых возмущений берем то же пространство $\mathcal{M}$, что и в теоремах 6, 7, а в разбиении спектра вида (4) оператора A_0 будут присутствовать всего два блока $\sigma_1=\{\lambda_i\}$, $\sigma_2=\sigma(A_0)\setminus\{\lambda_i\}$ Поэтому и в рассматриваемом случае можно сформулировать теорему, идентичную теореме 5 и позволяющую получать оценки на спектр возмущенного линейного отношения.

§ 4. НЕКОТОРЫЕ ПРАКТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРЕМ О ПОДОБИИ

Отметим тот важный факт, что теперь, используя результаты теорем 6, 7 и стандартную технику, разработанную в методе подобных операторов, можно получать различные спектральные характеристики возмущенного отношения $A-\tilde{B}$, а именно: выписывать приближения различного порядка к собственным значениям и собственным векторам оператора $(A-B)|_{H_0}$, применять метод Галеркина и различные его модификации для получения последовательности приближений к собственным значениям и собственным векторам оператора $(A-B)|_{H_0}$ и выписывать оценки скорости сходимости указанных последовательностей, рассматривать вопрос обусловленности задачи нахождения спектральных характеристик, решать обратную задачу спектрального анализа.

В качестве примера рассмотрим применение теоремы 7 для приближенного нахождения точек спектра возмущенного отношения $A-\tilde{B}$. Заметим, что так как точка спектра бесконечность также останется в расширенном спектре возмущенного отношения $A-\widetilde{B}$, то мы рассмотрим только вопрос приближенного нахождения собственных чисел оператора $(A-B)|_{H_0}$ или остальных точек спектра возмущенного отношения $A-\tilde{B}$.

Далее до конца этого параграфа мы будем предполагать, что A — нормальное линейное отношение с дискретным спектром, причем теорема 7 имеет место и отношение $A-\widetilde{B}$ подобно отношению $A-Q_kXQ_k-\sum\limits_{i\geq k}P_iXP_i$, $X\in\mathcal{M}$.

Обычно для приближенного вычисления собственных значений оператора $(A-B)|_{H_0}$ используются проекционные методы, заключающиеся в том, что вместо исходного оператора рассматривается последовательность конечномерных операторов $((A-B)|_{H_0})_n$, собственные значения которых численно находятся (метод Галеркина) [11]. И собственные значения оператора $(A-B)|_{H_0}$ ищутся как предел последовательности соответствующих собственных значений операторов $((A-B)|_{H_0})_n$ при $n\to\infty$. Рассмотрим метод Галеркина с точки зрения метода подобных операторов. Из подобия операторов $(A-B)|_{H_0}$ и $(A-JX)|_{H_0}$ следует равенство их собственных значений, но нам известен не оператор $X\in\mathcal{M}$, а последовательные приближения к нему, причем первым приближением является оператор B. Отметим, что оператор $(A-JB)|_{H_0}=(A-Q_kBQ_k-\sum\limits_{i\geq k+1}P_iBP_i)|_{H_0}$ можно представить как прямую сумму операторов

$$(A-JB)|_{H_0}=$$
$$=(A-Q_kBQ_k)|_{H_k}\oplus(A-\sum_{i\geq k+1}P_iXP_i)|_{H_k}^{(k)}=A_{1k}+A^{(1k)},$$

где $H_k=\mathrm{Ran}\, Q_k$, $H_k+H^{(k)}=H_0$, рассматривая как прямую сумму операторов, первый из которых и есть конечномерный оператор, обычно используемый в проекционных методах. Зная спектр оператора A_{1k}, мы знаем и приближения к спектру исходного оператора $(A-B)|_{H_0}$.

Из приведенных рассуждений естественным образом вытекает, что для ускорения последовательности собственных значений, получаемой в проекционных методах, следует подправить последовательность конечномерных операторов, причем для построения таких операторов используется метод подобных операторов. А именно, будем использовать операторы $(A-JB-J(B\Gamma B))|_{H_0}$, а точнее, операторы $A_{2k}=(A-Q_kBQ_k-Q_kB\Gamma BQ_k)|_{H_k}$ (берется в качестве неизвестного оператора X второе приближение к нему по методу итераций). Аналогично получается еще одна модификация, если использовать третье приближение $X^{(3)}$. Приближение более высокого порядка также можно выписывать и использовать для построения модификаций последовательностей конечномерных операторов, но из-за громоздкости этих приближений их использование в получении оценок скорости сходимости последовательности собственных значений затруднительно.

Приведем некоторые результаты, полученные с помощью описанных выше методов.

Теорема 8. Пусть $\tilde{\lambda}_1$ — простое изолированное собственное значение оператора $(A-B)|_{H_0}$. Тогда существуют последовательности $\{\mu_{1k}\}$, $\{\mu_{2k}\}$, $\{\mu_{3k}\}$ собственных значений операторов A_{1k}, A_{2k}, $(A-Q_kX^{(3)}Q_k)|_{H_k}$ соответственно, такие, что начиная с некоторого n справедливы оценки

$$\left|\tilde{\lambda}_1-\mu_{1k}\right|\le O(\gamma_k),$$

$$\left|\tilde{\lambda}_1-\mu_{2k}\right|\le O(\gamma_k^2),$$

$$\left|\tilde{\lambda}_1-\mu_{3k}\right|\le O(\gamma_k^3),$$

где $\gamma_k=(\operatorname{dist}(\sigma_k,\sigma_{k+1}))^{-1}$.

§ 5. ПРИМЕР

Пусть $A=A_0+A_\infty$ — нормальное линейное отношение и собственные значения $\lambda_j(A_0)$, $j\ge 1$, пронумерованные в порядке неубывания их модулей, допускают асимптотику

$$\left|\lambda_j(A_0)\right|=cj^\alpha+O(j^r),\ j\ge 1,$$

где $c>0$, $\alpha>1$, $\alpha>r$. Известно (см. [12]), что в этом случае для любого $\rho>0$ существует последовательность $\{r_n\}$ положительных чисел, такая что

$$\begin{gathered} bn^{\rho\alpha}\le r_{2n-1}<r_{2n}\le b(n+1)^{\rho\alpha},\ \ n\ge 1,\\ r_{2n}-r_{2n-1}\ge c_1n^{\rho(\alpha-1)}(1+n^{1-\rho(\alpha-r)^{-1}}). \end{gathered} \tag{7}$$

Число собственных значений оператора A_0 из множества $\sigma_n(A_0)=(B(r_{2n-1})\setminus B(r_{2n-2}))\cap\sigma(A_0)$ не превосходит $c_2n^{\rho-1}(1+n^{1-\rho(\alpha-r)})$, $\sigma(A_0)\cap\cap(B(r_{2n})\setminus B(r_{2n-1}))=0$ и $\sigma(A_0)=\bigcup_{i\ge1}\sigma_i(A_0)$. Теперь в качестве множеств σ_i, фигурирующих в теореме 6, можно взять множества $\sigma_i(A_0)$, $i\ge 1$. Из (7) следует, что при таком разбиении спектра условие предположения теоремы 7 имеет место. Следовательно, отношение $A-\tilde{B}$ подобно отношению $A-Q_kXQ_k-\sum_{i\ge k+1}P_iXP_i$, имеющему матрицу блочно-диагонального вида относительно дизъюнктной системы проекторов $P_1,P_2,\dots$. Причем для приближенного нахождения первых k собственных значений оператора $(A-B)|_{H_0}$ в данном случае используются операторы $(A-Q_kBQ_k)|_{\operatorname{Im}Q_k}$ и погрешность есть величина порядка $(n^{\rho(\alpha-1)}(1+n^{1-\rho(\alpha-r)^{-1}}))^{-1}$.

Для рассматриваемого оператора обсудим еще один вопрос. Непосредственно из подобия отношений $A-\tilde{B}$ и $A-JX$ следует также подобие операторов $(A-B)|_{H_0}$ и $(A-JX)|_{H_0}$. Тогда спектральные проекторы $\tilde{P}_n=P(\tilde{\sigma},(A-B)|_{H_0})$ и $P_n=P(\sigma_n,A_0)$ связаны равенством

$$\begin{gathered}\tilde{P}_n=(I+X)P_k(I+X)^{-1}=\\ =P_n(I+X)^{-1}+XP_k(I+X)^{-1},n\ge k\end{gathered}$$

и непосредственный подсчет показывает, что

$$\left\|P_i(\tilde{P}_n-P_n)P_j\right\|\le\operatorname{const}(\operatorname{dist}(\sigma_i,\sigma_k))^{-1},\ \ i\ne n,j\ne n.$$

При этом, если σ_i — одноточечные множества, то собственные векторы $\tilde{e}_i$, $i>k$ оператора $(A-B)|_{H_0}$ и собственные векторы оператора A_0 связаны равенством

$$\tilde{e}_i=e_i+\sum_{i\ne n}\alpha_ne_n,\quad |\alpha_i|\le\frac{\operatorname{const}}{|\lambda_n-\lambda_i|}.$$

§ 6. К СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ УПОРЯДОЧЕННЫХ ПАР ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Пусть есть упорядоченная пара линейных операторов (G,F), где $G:\mathcal{D}(G)\subset H\to H$, $F:\mathcal{D}(F)\subset H\to H$, действующих в пространстве H. Область определения пары (G,F) обозначим через D, при этом

$$\mathcal{D}=\mathcal{D}(F)\cap\mathcal{D}(G).$$

К резольвентному множеству $\rho(G,F)$ упорядоченной пары операторов (G,F) отнесем все числа $\lambda\ne 0$ из $\mathbb{C}$, для которых оператор $G-\lambda F:\mathcal{D}\subset H\to H$ непрерывно обратим, а также точку $\lambda=0$, если G — непрерывно обратимый оператор и $D(F)=H$. Множество $\sigma(G,F)=\mathbb{C}\setminus\rho(G,F)$ называется спектром этой пары. Как и в случае линейных отношений, при рассмотрении пар операторов удобнее пользоваться расширенным спектром пары. Подмножество $\tilde{\sigma}(G,F)$ из $\mathbb{C}$, совпадающее с $\sigma(G,F)$, если $R(\lambda,G,F)=(G-\lambda F)^{-1}$ допускает аналитическое расширение в точку ∞, причем $\lim\limits_{|\lambda|\to\infty} R(\lambda,G,F)=0$ называется расширенным спектром упорядоченной пары (G,F). В противном случае полагают $\tilde{\sigma}(G,F)=\sigma(G,F)\cup\{\infty\}$. Множество $\tilde{\rho}(G,F)=\mathbb{C}\setminus\tilde{\sigma}(G,F)$ называется расширенным резольвентным множеством пары (G,F).

В [6] доказана следующая теорема, связывающая расширенный спектр упорядоченной пары (G,F) линейных операторов с расширенным спектром построенного по этой паре линейного отношения.

Теорема 9. [6] Для упорядоченной пары операторов (G,F) имеют место следующие свойства

1) $\tilde{\sigma}(G,F)=\tilde{\sigma}(F^{-1}G)$;

2) $\tilde{\sigma}(G,F)\setminus\{0,\infty\}=\tilde{\sigma}(GF^{-1})\setminus\{0,\infty\}$.

Отметим, что $F^{-1}G$ и GF^{-1} есть в общем случае линейные отношения с областями определения $D(F^{-1}G)=G^{-1}(\operatorname{Im}F)$, $\mathcal{D}(GF^{-1})=F(\mathcal{D}(G))$.

Пару (G,F) назовем нормальной, если GF^{-1} — нормальное линейное отношение.

Пусть λ_1 — простая изолированная точка спектра нормальной упорядоченной пары (G,F), $\lambda_1\neq 0$, $\lambda_1\neq\infty$ и $\tilde{\lambda}_1$ — соответствующая точка спектра возмущенной пары $(G-G_0F,F)$, $G_0\in\operatorname{End}H$. Введем необходимые обозначения и сформулируем теорему об отклонении спектра упорядоченной пары при возмущении.

Пусть $H_0=\operatorname{Im}F$, $H_\infty=\operatorname{Ker}F$, $A=GF^{-1}$, $A_0=GF^{-1}|_{H_0}$. Отметим, что так как G,F — нормальная пара, то $A_0:\mathcal{D}(A_0)\subset H_0\to H_0$ — нормальный линейный оператор, $A_0\lambda_1=e_1\lambda_1$, $e_1\in H_0$, $A_0^*f_1=\tilde{\lambda}_1 f_1$, $P_1=P(\{\lambda_1\},A_0)$, $P_2=I-P_1$.

Теорема 10. Пусть нормальная упорядоченная пара (G,F) с дискретным спектром возмущается оператором $G_0F:\mathcal{D}(F)\subset H\to H$, $G_0\in\operatorname{End}H$ причем

$$\frac{20\|G_0|_{H_0}\|}{\operatorname{dist}(\{\lambda_1\},\tilde{\sigma}(G,F)\setminus\{\lambda_1\})}<1, \tag{8}$$

тогда для точки спектра $\tilde{\lambda}_1$ пары $(G-G_0F,F)$ имеют место оценки

$$\tilde{\lambda}_1=\lambda_1(G_0|_{H_0}e_1,f_1)+O\Big(\frac{\|P_1G_0|_{H_0}P_2\|^2}{\operatorname{dist}(\{\lambda_1\},\tilde{\sigma}(G,F)\setminus\{\lambda_1\})}\Big),$$

$$\tilde{\lambda}_1=\lambda_1-(G_0|_{H_0}e_1,f_1)-(G_0|_{H_0}P_2SP_2G_0|_{H_0}e_1,f_1)+$$
$$+O\Big(\frac{\|P_1G_0|_{H_0}P_2\|^3}{\operatorname{dist}^2(\{\lambda_1\},\tilde{\sigma}(G,F)\setminus\{\lambda_1\})}\Big).$$

Здесь символом S обозначен такой оператор из $\operatorname{End}H$, что

$$P_1S=SP_1=0,$$
$$S(\lambda_1I-(GF^{-1})|_{H_0})=(\lambda_1I-(GF^{-1})|_{H_0})S=P_2.$$

Доказательство. Из теоремы 9 следует, что

$$\tilde{\sigma}(G-G_0F,F)\setminus\{0,\infty\}=\tilde{\sigma}(GF^{-1}-G_0)\setminus\{0,\infty\}.$$

Рассматриваем в качестве невозмущенного линейного отношения нормальное отношение $A=GF^{-1}$, $B=G_0\in\operatorname{End}H$ применяем теоремы 5, 6 и получаем требуемый результат.

Отметим, что условие (8) теоремы 10 довольно грубое, легко выписать более тонкое условие типа условия теоремы 5 в этом случае, но мы его приводить не будем из-за его громоздкости.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Cross R.* Multivalued linear operators. New York: M. Dekker, 1998.

2. *Favini A., Yagi A.* Degenerate differential equations in Banach spaces. Pure And Applied Mathematics. Series of Monographs and Textbook / 215. New York: M. Dekker, 1998.

3. *Баскаков А.Г.* Гармонический анализ линейных операторов. Учебное пособие. Воронеж: Изд-во Воронежского госуниверситета, 1987.

4. *Ускова Н.Б.* Об оценках спектральных проекторов возмущенных самосопряженных операторов // СМЖ. 2000. Т. 41, № 3. С. 712—721.

5. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Спектральные операторы. М.: Мир, 1974.

6. *Баскаков А.Г., Чернышев К.И.* Спектральный анализ линейных отношений и вырожденные полугруппы операторов // Матем. сборник. 2002. Т. 193, № 11. С. 3—42.

7. *Ускова Н.Б.* О приближениях к собственным значениям и собственным векторам возмущенных линейных операторов // Математические заметки ЯГУ. 2000. Т. 7, вып. 1. С. 72—76.

8. *Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.

9. *Баскаков А.Г., Юргелас В.В.* Индефинитная диссипативность и обратимость линейных дифференциальных операторов // Укр. мат. журн. 1989. Т. 41, № 12. С. 1613—1614.

10. *Баскаков А.Г.* Оценки элементов обратных матриц и спектральный анализ линейных операторов // Изв. РАН. Сер. мат. 1997. Т. 61, № 6. С. 3—26.

11. *Красносельский М.А. и др.* Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука, 1969.

12. *Агранович М.С.* Спектральные свойства задач дифракции // В кн. Войтович Н.Н., Каценленбаум Б.З., Сивов А.Н. Обобщенный метод соб ственных колебаний в теории дифракции. М.: Наука, 1977. С. 289—416.