УДК 571.988.63:532.5-1/-9

ИССЛЕДОВАНИЕ ОБОБЩЕННОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ КЕЛЬВИНА-ФОЙГТА*

© 2004 М. В. Турбин

Воронежский государственный университет

В работе исследуется обобщенная математическая модель движения жидкости Кельвина–Фойгта. Для начально-краевой задачи для этой модели введено новое понятие слабого решения и получена теорема существования и единственности такого решения. Получены теоремы о свойствах слабых решений для различных классов данных.

ВВЕДЕНИЕ

В течение последних полутора столетий основным объектом исследования математиков в области гидродинамики является модель ньютоновской жидкости. Она описывает течение при умеренных скоростях большинства встречающихся на практике вязких несжимаемых жидкостей. Но уже в середине XIX века стали известны такие вязкие несжимаемые жидкости, которые не подчиняются ньютоновскому определяющему уравнению. Впервые модели таких жидкостей были предложены в XIX веке Дж. Максвеллом, В. Кельвином и В. Фойгтом и были развиты в середине XX века в значительной степени благодаря работам Дж. Г. Олдройта. Модели таких жидкостей учитывают предысторию течения и названы впоследствии линейными вязкоупругими жидкостями. В данной работе изучается модель, обобщающая модель движения жидкости Фойгта. Она называется обобщенной математической моделью движения жидкости Кельвина–Фойгта [1], [9].

Рассматривается движение жидкости, заполняющей ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$ с липшицевой границей $\partial\Omega$, на промежутке времени $[0, T]$, $T > 0$.

Предполагается, что жидкость удовлетворяет следующему реологическому соотношению:

$$\sigma(x,t) = 2\mu_2 \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{E}(x,t) + 2\mu_1\mathcal{E}(x,t) + +2\int_0^t h(s,t)\mathcal{E}(x,s)\,ds, \tag{0.1}$$

где μ_1, μ_2 — константы, $\mu_2 > 0$; функция $h \in L_\infty((0,T)\times(0,T))$. Соотношение (0.1) устанавливает связь девиатора тензора напряжений $\sigma = (\sigma_{ij})$ и тензора скоростей деформаций $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_{ij})$

$$\mathcal{E}_{ij} = \mathcal{E}_{ij}(v) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right),$$

определяемого полем скоростей жидкости v. Подставляя σ из (0.1) в уравнение движения жидкости в форме Коши

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v_i\frac{\partial v}{\partial x_i} + \operatorname{grad} p = \operatorname{Div}\sigma + f \tag{0.2}$$

(здесь и далее предполагается суммирование по повторяющимся индексам) и учитывая условие несжимаемости жидкости, получим систему уравнений движения жидкости Кельвина–Фойгта:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \mu_1\Delta v + v_i\frac{\partial v}{\partial x_i} - \mu_2\frac{\partial \Delta v}{\partial t} - -\int_0^t h(s,t)\Delta v(s)ds + \operatorname{grad} p = f, \tag{0.3}$$

$$\operatorname{div} v = 0. \tag{0.4}$$

Для системы (0.3), (0.4) в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n, n = 2, 3$, рассмотрим начально-краевую задачу с начальным условием

$$v\,|_{t=0} = a(x),\ x \in \Omega, \tag{0.5}$$

и граничным условием

$$v\,|_{\partial\Omega\times[0,T]} = 0. \tag{0.6}$$

А. П. Осколковым в [9] было получено следующее уравнение движения жидкости Кельвина–Фойгта:

*Работа поддержана грантами № 01-01-00425 РФФИ и № VZ-010 Министерства образования РФ и CRDF (США).

$$\frac{\partial v}{\partial t}-\mu_1\Delta v+v_i\frac{\partial v}{\partial x_i}-\mu_2\frac{\partial \Delta v}{\partial t}-$$
$$-\int_0^t k(t-\tau)\Delta v(\tau)d\tau+\operatorname{grad}p=f, \qquad (0.7)$$
$$\mu_2>0$$

и изучены сильные обобщенные решения для начально-краевой задачи (0.7), (0.4), (0.5), (0.6). В работе [9] были установлены следующие результаты:

a) Пусть выполнены условия: $\partial\Omega\in C^{2+\alpha}$, $a\in C^{2+\alpha}(\bar\Omega)\cap H(\Omega)$, $f\in L_\infty(0,T;C_\alpha(\bar\Omega))$, $f_t\in L_2(\Omega\times(0,T))$, $0<\alpha<1$, $k\in C^1[0,T]$. Тогда задача (0.7), (0.4), (0.5), (0.6) при любом $T<\infty$ имеет единственное решение (v,p) такое, что $v\in W^1_\infty(0,T;C^{2+\alpha}(\bar\Omega)), \operatorname{grad}p\in L_\infty(0,T;C^\alpha(\bar\Omega))$.

b) Пусть выполнены условия: $\partial\Omega\in C^2$, $a\in W^2_q(\Omega)\cap H(\Omega)$, $f\in L_\infty(0,T;L_q(\Omega)), f_t\in L_2(\Omega\times(0,T))$, $q\geq 2$, $k\in C^1[0,T]$. Тогда задача (0.7), (0.4), (0.5), (0.6) при любом $T<\infty$ имеет единственное решение (v,p) такое, что $v\in W^1_\infty(0,T;W^2_q(\Omega)\cap H(\Omega))$, $\operatorname{grad}p\in L_\infty(0,T;L_q(\Omega))$.

В то же самое время слабые решения для такой задачи не изучались, хотя задача о слабых решениях а именно о единственности слабых решений представляет очень большой интерес. В нашей работе для начально-краевой задачи (0.3), (0.4), (0.5), (0.6) вводится новое понятие слабого решения и для него получена теорема существования и единственности. Важно отметить, что в данной работе теорема доказана при не гладкой, а только липшицевой границе $\partial\Omega$, и при более слабых требованиях на данные задачи, чем в работе А. П. Осколкова [9].

Введем пространства, которые потребуются в дальнейшем.

Обозначим через $\mathfrak{D}(\Omega)^n$ — пространство функций на Ω со значениями в $\mathbb{R}^n$ класса C^∞ с компактным носителем, содержащимся в Ω;

$\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)^n$ — замыкание множества $\mathfrak{D}(\Omega)^n$ по норме пространства $W^1_2(\Omega)^n$;

$X=\{v\in\mathfrak{D}(\Omega)^n,\operatorname{div}v=0\}$ — множество соленоидальных функций;

H — замыкание X по норме пространства $L_2(\Omega)^n$;

V — замыкание X по норме пространства $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)^n$ рассматриваемое со скалярным произведением

$$((v,w))=\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial v}{\partial x_i},\frac{\partial w}{\partial x_i}\right),$$

где $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение $L_2(\Omega)^n$.

Норма, порождаемая этим скалярным произведением в пространстве V, обозначается $\|\cdot\|_V$ и эквивалентна норме, индуцированной из пространства $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)^n$.

Через V^* обозначим пространство сопряженное к пространству V, а через $\langle f,v\rangle$ — действие функционала $f\in V^*$ на элемент $v\in V$.

Введем одно пространство, которое часто будет использоваться в дальнейшем:

$$W_{[0,t_0]}=\{v: v\in C([0,t_0],V),\ v'\in L_1(0,t_0;V)\},$$
$$t_0\in[0,T]$$

с нормой: $\|v\|_{W_{[0,t_0]}}=\|v\|_{C([0,t_0],V)}+\|v'\|_{L_1(0,t_0;V)}$. Вместо обозначения $W_{[0,t_0]}$ будет использоваться обозначение W, если отрезок $[0,t_0]$ понятен из контекста.

Далее рассмотрим постановку задачи о слабых решениях начально-краевой задачи (0.3)—(0.6). Пусть $v(x,t),p(x,t)$ — классическое решение задачи (0.3)—(0.6), то есть $v(x,t),p(x,t)$ достаточно гладкие функции, удовлетворяющие (0.3)—(0.6). Домножим (0.3) скалярно в $L_2(\Omega)^n$ на произвольную функцию $\varphi\in V$.

$$\int_\Omega\frac{\partial v}{\partial t}\cdot\varphi dx+\int_\Omega v_i\frac{\partial v}{\partial x_i}\cdot\varphi dx-\mu_1\int_\Omega\Delta v\cdot\varphi dx-$$
$$-\mu_2\int_\Omega\frac{\partial\Delta v}{\partial t}\cdot\varphi dx-\int_\Omega\int_0^t h(s,t)\Delta v(s)ds\cdot\varphi dx+ \qquad (0.8)$$
$$+\int_\Omega\operatorname{grad}p\cdot\varphi dx=\int_\Omega f\cdot\varphi\,dx.$$

Заметим, что

$$\int_\Omega\operatorname{grad}p\cdot\varphi dx=\int_\Omega\frac{\partial p}{\partial x_i}\cdot\varphi_i dx=-\int_\Omega p\cdot\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_i}dx=$$
$$=-\int_\Omega p\cdot\operatorname{div}\varphi dx=0.$$

Преобразуем слагаемые в (0.8) следующим образом:

$$-\mu_1\int_\Omega\Delta v\cdot\varphi dx=\mu_1\int_\Omega\nabla v:\nabla\varphi dx,$$

где $\nabla v:\nabla\varphi=\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j}\cdot\dfrac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}$,

$$-\mu_2\int_\Omega \frac{\partial \Delta v}{\partial t}\cdot\varphi dx = \mu_2\int_\Omega \nabla\frac{\partial v}{\partial t}:\nabla\varphi dx,$$

$$-\int_\Omega\int_0^t h(s,t)\Delta v(s)ds\cdot\varphi dx = -\int_0^t h(s,t)\int_\Omega \Delta v(s)\varphi dxds =$$

$$= \int_0^t h(s,t)\int_\Omega \nabla v(s):\nabla\varphi dxds = \int_\Omega\int_0^t h(s,t)\nabla v(s)ds:\nabla\varphi dx,$$

$$\int_\Omega v_i\frac{\partial v}{\partial x_i}\cdot\varphi dx = \int_\Omega \frac{\partial v_i}{\partial x_i}v_j\varphi_j dx - \int_\Omega v_iv_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}dx =$$

$$= -\int_\Omega v_iv_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}dx.$$

Таким образом, равенство (0.8) можно переписать в виде:

$$\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial t}\varphi dx + \mu_2\int_\Omega \nabla\frac{\partial v}{\partial t}:\nabla\varphi dx + \mu_1\int_\Omega \nabla v:\nabla\varphi dx -$$

$$-\int_\Omega v_iv_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}dx + \int_\Omega\int_0^t h(s,t)\nabla v(s)ds:\nabla\varphi dx = \int_\Omega f\varphi dx.$$

Предполагается, что $f\in L_1(0,T;V^*)$, $a\in V$.

Определение 0.1. *Слабым решением задачи* (0.5)—(0.6) *называется функция* $v\in W$, *удовлетворяющая для любого* $\varphi\in V$ *и почти всех* $t\in(0,T)$ *равенству*

$$\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial t}\varphi dx + \mu_2\int_\Omega \nabla\frac{\partial v}{\partial t}:\nabla\varphi dx + \mu_1\int_\Omega \nabla v:\nabla\varphi dx -$$

$$-\int_\Omega v_iv_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}dx + \int_\Omega\int_0^t h(s,t)\nabla v(s)ds:\nabla\varphi dx = \langle f,\varphi\rangle \tag{0.9}$$

и начальному условию

$$v(0)=a. \tag{0.10}$$

Основными результатами данной работы являются следующие теоремы:

Теорема 0.1. *При любых* $f\in L_1(0,T;V^*)$, $a\in V$ *существует единственное слабое решение* $v\in W$ *задачи* (0.3)—(0.6).

Теорема 0.2. *Если* $h\in C^k([0,T]\times[0,T])$, $f\in C^k([0,T],V^*)$, где $k=0,1,2,\dots$, *то слабое решение задачи* (0.3)—(0.6) *принадлежит пространству* $C^{k+1}([0,T],V)$.

Доказательство теоремы 0.1 проводится по схеме работы [3]. Поставленная начально-краевая задача заменяется операторным уравнением. Разрешимость операторного уравнения устанавливается методом продолжения решений на основе теории топологической степени и априорных оценок решений.

Работа включает в себя введение и 6 параграфов. В первом параграфе вводятся операторные уравнения, эквивалентные поставленной задаче о слабых решениях. Свойства операторов из этих операторных уравнений исследуются во втором параграфе. В третьем параграфе получена априорная оценка для решений операторного уравнения. В параграфе номер четыре доказана теорема существования слабых решений начально-краевой задачи для обобщенной математической модели движения жидкости Кельвина−Фойгта. Теорема о единственности слабого решения задачи (0.3)—(0.6) доказывается в пятом параграфе. В последнем параграфе получены две важных теоремы о классах слабых решений задачи (0.3)—(0.6) при различных условиях на данные задачи.

1. ОПЕРАТОРНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ЗАДАЧЕ О СЛАБЫХ РЕШЕНИЯХ

В этом параграфе вводятся операторные уравнения, эквивалентные задаче о слабых решениях.

Введем операторы с помощью следующих равенств:

$$A:V\to V^*,\ \langle Av,\varphi\rangle = \int_\Omega \nabla v:\nabla\varphi dx,\ v\in V,\ \varphi\in V.$$

$$B:L_4(\Omega)\to V^*,\ \langle B(v),\varphi\rangle = \int_\Omega v_iv_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}dx,$$

$$v\in L_4(\Omega)^n,\ \varphi\in V.$$

Таким образом, равенство (0.9) можно записать в следующем виде (здесь и далее $v'=\dfrac{\partial v}{\partial t}$):

$$\langle v'(t),\varphi\rangle + \langle\mu_2Av'(t),\varphi\rangle + \langle\mu_1Av(t),\varphi\rangle +$$

$$+\left\langle\int_0^t h(s,t)Av(s)ds,\varphi\right\rangle - \langle B(v)(t),\varphi\rangle = \langle f(t),\varphi\rangle.$$

Поскольку в последнем равенстве функция $\varphi\in V$ произвольна, то оно эквивалентно следующему операторному уравнению:

$$(\mu_2A+I)v' + \mu_1Av + N_1(v) - B(v) = f, \tag{1.1}$$

где $N_1(v)=\int_0^t h(s,t)Av(s)\,ds$.

Итак, слабое решение задачи (0.3), (0.4), (0.5), (0.6) — это решение $v \in W$ операторного уравнения (1.1), удовлетворяющее начальному условию (0.10).

Введем обозначения:

$$C(v)(t) = \int_0^t \mu_1 A v'(s) ds,$$

$$f_2(t) = f(t) - \mu_1 A a - \int_0^t h(s,t) ds A a,$$

$$N_2(v)(t) = \int_0^t h(s,t) \int_0^s A v'(\tau) d\tau ds.$$

Рассмотрим операторное уравнение:

$$(\mu_2 A + I)v' + C(v) + N_2(v) - B(v) = f_2. \quad (1.2)$$

Покажем, что задача (1.1), (0.10) эквивалентна задаче (1.2), (0.10). Пусть v — решение задачи (1.1), (0.10). Для любой функции $\varphi \in V$ имеем:

$$\left\langle C(v)(t), \varphi \right\rangle = \left\langle \int_0^t \mu_1 A v'(s) ds, \varphi \right\rangle = \int_0^t \left\langle \mu_1 A v'(s), \varphi \right\rangle ds =$$

$$= \mu_1 \int_0^t \int_\Omega \nabla v'(s) : \nabla \varphi dx ds = \mu_1 \int_\Omega \int_0^t \nabla v'(s) : \nabla \varphi ds dx =$$

$$= \mu_1 \int_\Omega \int_0^t \frac{\partial}{\partial s} (\nabla v(s) : \nabla \varphi) ds dx = \mu_1 \int_\Omega (\nabla v(s) : \nabla \varphi) \big|_0^t \, dx =$$

$$= \mu_1 \int_\Omega \nabla v(t) : \nabla \varphi dx - \mu_1 \int_\Omega \nabla a : \nabla \varphi dx =$$

$$= \left\langle \mu_1 A v(t), \varphi \right\rangle - \left\langle \mu_1 A a, \varphi \right\rangle$$

или $\left\langle \mu_1 A v, \varphi \right\rangle = \left\langle C(v), \varphi \right\rangle + \left\langle \mu_1 A a, \varphi \right\rangle$. Здесь использовано то, что равенство

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x}.$$

Действительно, в силу определения обобщенной производной для любых $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)^n$, $\chi \in \mathfrak{D}([0,T])$ теоремы Фубини [6, с. 363], имеем

$$\iint_{\Omega \times [0,T]} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}(x,t) \varphi(x) \chi(t) dx dt =$$

$$= \int_0^T \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}(x,t) \varphi(x) dx \chi(t) dt =$$

$$= -\int_0^T \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) dx \chi(t) dt =$$

$$= -\int_\Omega \int_0^T \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \chi(t) dt \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) dx =$$

$$= \int_\Omega \int_0^T u(x,t) \frac{\partial \chi}{\partial t}(t) dt \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) dx =$$

$$= \int_0^T \int_\Omega u(x,t) \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) dx \frac{\partial \chi}{\partial t}(t) dt =$$

$$= -\int_0^T \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \varphi(x) dx \frac{\partial \chi}{\partial t}(t) dt =$$

$$= -\int_\Omega \int_0^T \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \frac{\partial \chi}{\partial t}(t) dt \varphi(x) dx =$$

$$= \int_\Omega \int_0^T \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}(x,t) \chi(t) dt \varphi(x) dx =$$

$$= \iint_{\Omega \times [0,T]} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}(x,t) \chi(t) \varphi(x) dx dt.$$

Что и доказывает равенство смешанных производных в смысле обобщенных функций.

Таким же образом для любой $\varphi \in V$:

$$\left\langle N_2(v)(t), \varphi \right\rangle = \left\langle \int_0^t h(s,t) \int_0^s A v'(\tau) d\tau ds, \varphi \right\rangle =$$

$$= \int_0^t h(s,t) \int_0^s \left\langle A v'(\tau), \varphi \right\rangle d\tau ds =$$

$$= \int_0^t h(s,t) \int_0^s \int_\Omega \nabla v'(\tau) : \nabla \varphi dx d\tau ds =$$

$$= \int_0^t h(s,t) \int_\Omega \int_0^s \nabla v'(\tau) : \nabla \varphi d\tau dx ds =$$

$$= \int_0^t h(s,t) \int_\Omega \int_0^s \frac{\partial}{\partial \tau} (\nabla v(\tau) : \nabla \varphi) d\tau dx ds =$$

$$= \int_0^t h(s,t) \int_\Omega (\nabla v(\tau) : \nabla \varphi) \big|_0^s \, dx ds =$$

$$= \int_0^t h(s,t) \int_\Omega \nabla v(s) : \nabla \varphi dx ds - \int_0^t h(s,t) \int_\Omega \nabla a : \nabla \varphi dx ds =$$

$$= \int_0^t h(s,t) \left\langle A v(s), \varphi \right\rangle ds - \int_0^t h(s,t) \left\langle A a, \varphi \right\rangle ds =$$

$$= \left\langle \int_0^t h(s,t) A v(s) ds, \varphi \right\rangle - \left\langle \int_0^t h(s,t) ds A a, \varphi \right\rangle.$$

Откуда и получаем, что $N_2(v)(t) = N_1(v)(t) - $

$- \int_0^t h(s,t) \, ds A a$.

Следовательно, v — решение задачи (1.2), (0.10). Таким образом, задача (1.1), (0.10) эквивалентна задаче (1.2), (0.10).

В итоге задача о слабом решении начально-краевой задачи (0.3)—(0.6) эквивалентна задаче о существовании решения $v \in W$ операторного уравнения (1.2), причем решение должно удовлетворять начальному условию (0.10).

2. ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ ОПЕРАТОРОВ

В этом разделе исследуются свойства операторов из операторных уравнений (1.1) и (1.2). Будем использовать одну и ту же букву для обозначения операторов, действующих в разных функциональных пространствах. Например, в нижеследующей лемме A — это оператор, действующий из V в V^*, из $L_1(0,t_0;V)$ в $L_1(0,t_0;V^*)$ и из $C([0,T],V)$ в $C([0,T],V^*)$.

2.1. Свойства операторов A, $\mu_2 A+I$, C, N_1 и N_2.

Лемма 1. *Для оператора A имеют место следующие свойства:*

a) Оператор $A: V \to V^*$ — обратим, непрерывен и для него имеет место оценка:

$$\|Au\|_{V^*} \le \|u\|_V . \tag{2.1}$$

b) Для любой функции $u \in L_1(0,T;V)$ функция $Au \in L_1(0,T;V^*)$ и оператор $A: L_1(0,T;V) \to L_1(0,T;V^*)$ — непрерывен, причем имеет место оценка: $\|Au\|_{L_1(0,T;V^*)} \le \|u\|_{L_1(0,T;V)}$.

c) Для любой функции $u \in C^k([0,T],V)$, где $k=0,1,2,\dots$, функция $Au \in C^k([0,T],V^*)$ и оператор $A: C^k([0,T],V) \to C^k([0,T],V^*)$ — непрерывен и для него имеет место оценка: $\|Au\|_{C^k([0,T],V^*)} \le \|u\|_{C^k([0,T],V)}$.

Доказательство: *a)* В силу линейности оператора A для доказательства его непрерывности достаточно доказать его ограниченность. По определению оператора A для $v,\varphi \in V$ имеем

$$|\langle Au,\varphi\rangle| = \left|\int_\Omega \nabla u : \nabla\varphi dx\right| = |((u,\varphi))| \le \|u\|_V \|\varphi\|_V$$

и, следовательно: $\|Au\|_{V^*} \le \|u\|_V$. Таким образом, оператор $A: V \to V^*$ ограничен и непрерывен. Более того в силу Теоремы 1.2.2 и Замечания 1.2.2 [11, с. 28, 31) отображение A является изоморфизмом V на V^*.

b) Пусть $u \in L_1(0,T;V)$. Для почти всех $t \in (0,T)$ имеем оценку

$$\|Au(t)\|_{V^*} \le \|u(t)\|_V .$$

Так как $\|u(t)\|_V \in L_1(0,T)$, то $\|Au(t)\|_{V^*} \in L_1(0,T)$ и, следовательно, $Au \in L_1(0,T;V^*)$.

Интегрируя полученную оценку по t от 0 до T, получим требуемую оценку сверху:

$$\|Au\|_{L_1(0,T;V^*)} \le \|u\|_{L_1(0,T;V)} .$$

Поскольку, A — линеен и ограничен, то он непрерывен как оператор из $L_1(0,T;V)$ в $L_1(0,T;V^*)$.

c) Пусть $u \in C^k([0,T],V)$, тогда $Au(t) \in C^k([0,T],V^*)$ как суперпозиция k раз непрерывно-дифференцируемого отображения и линейного оператора:

$$[0,T] \xrightarrow{u} uV \xrightarrow{A} V^*.$$

Отсюда, используя оценку (2.1), имеем:

$$\|Au\|_{C^k([0,T],V^*)} = \sum_{j=0}^{k} \max_{t\in[0,T]} \left\|\frac{d^j}{dt^j}(Au)(t)\right\|_{V^*} = \sum_{j=0}^{k} \max_{t\in[0,T]} \left\|A\frac{d^j}{dt^j}u(t)\right\|_{V^*} \le \sum_{j=0}^{k} \max_{t\in[0,T]} \left\|\frac{d^j}{dt^j}u(t)\right\|_{V} = \|u\|_{C^k([0,T],V)} .$$

Так как оператор A линеен и ограничен, то он непрерывен как оператор из $C^k([0,T],V)$ в $C^k([0,T],V^*)$. □

Лемма 2.2. *Для оператора $\mu_2 A+I$ имеют место следующие свойства:*

a) Оператор $\mu_2 A+I: V \to V^*$ — обратим, непрерывен, для него имеют место оценки:

$$\mu_2 \|u\|_V \le \|(\mu_2 A+I)u\|_{V^*} \le l_1 \|u\|_V , \tag{2.2}$$

где l_1 — константа, зависящая от μ_2.

b) Для любой функции $u \in L_p(0,T;V)$, $1 \le p < \infty$ функция $(\mu_2 A+I)u \in L_p(0,T;V^*)$ и оператор $(\mu_2 A+I): L_p(0,T;V) \to L_p(0,T;V^*)$ — непрерывен, обратим и для него имеет место оценка:

$$\mu_2 \|u\|_{L_p(0,T;V)} \le \|(\mu_2 A+I)u\|_{L_p(0,T;V^*)} \le l_1 \|u\|_{L_p(0,T;V)} . \tag{2.3}$$

c) Для любой функции $u \in C^k([0,T],V)$, где $k=0,1,2,\dots$, функция $(\mu_2 A+I)u \in C^k([0,T],V^*)$ и оператор $(\mu_2 A+I): C^k([0,T],V) \to C^k([0,T],V^*)$ — обратим.

Доказательство: *a)* В силу Леммы 2.1 *(a)* оператор $A: V \mapsto V^*$ непрерывен; поскольку вложение $V \subset V^*$ непрерывно, то I непрерывен как оператор из V в V^*. Таким образом, $\mu_2 A+I$ непрерывен из V в V^* как сумма двух непрерывных операторов.

Покажем, что $\mu_2 A+I$ обратим как оператор из V в V^*. Для этого достаточно доказать, что оператор $\mu_2 A+I$ сильно монотонный (по терминологии [2]). Пусть $u, v \in V$, тогда получим, что

$$\begin{aligned} &\langle (\mu_2 A+I)u-(\mu_2 A+I)v, u-v\rangle = \\ &=\mu_2((u-v,u-v))+(u-v,u-v)= \\ &=\mu_2\|u-v\|_V^2+\|u-v\|_H^2 \ge \mu_2\|u-v\|_V^2 \end{aligned} \tag{2.4}$$

и, следовательно, $\mu_2 A+I$ — сильно монотонный оператор с постоянной монотонности $\mu_2>0$. В силу теоремы 2.2 и следствия 2.3 из [2, с. 96—97) оператор $\mu_2 A+I$ обратим и обратный оператор $(\mu_2 A+I)^{-1}$ удовлетворяет условию Липшица.

Пусть $u\in V$, тогда из (2.4) при $v=0$ имеем

$$\langle (\mu_2 A+I)u, u\rangle \ge \mu_2\|u\|_V^2 .$$

С другой стороны: $\langle (\mu_2 A+I)u, u\rangle \le \le \|(\mu_2 A+I)u\|_{V^*}\|u\|_V$. Таким образом, имеем: $\mu_2\|u\|_V^2 \le \|(\mu_2 A+I)u\|_{V^*}\|u\|_V$. Отсюда и получается требуемая оценка снизу.

Найдем оценку сверху на $\mu_2 A+I$, используя оценку (2.1):

$$\begin{aligned} \|(\mu_2 A+I)u\|_{V^*} &\overset{\text{def}}{=} \sup_{\varphi\in V\setminus\{0\}} \frac{|\langle (\mu_2 A+I)u,\varphi\rangle|}{\|\varphi\|_V} \le \\ &\le \sup_{\varphi\in V\setminus\{0\}} \frac{\mu_2\|u\|_V\|\varphi\|_V+\|u\|_H\|\varphi\|_H}{\|\varphi\|_V} \le \\ &\le \sup_{\varphi\in V\setminus\{0\}} \frac{\mu_2\|u\|_V\|\varphi\|_V+C_1^2\|u\|_V\|\varphi\|_V}{\|\varphi\|_V} = l_1\|u\|_V , \end{aligned}$$

где $l_1=\mu_2+C_1^2$; использовалось неравенство Пуанкаре

$$\|u\|_H \le C_1\|u\|_V$$

с некоторой константой C_1. Таким образом, получена требуемая оценка сверху.

b) Пусть $u\in L_p(0,T;V)$. Возведем правую часть оценки (2.2) в p-тую степень и проинтегрируем от 0 до T. Получим:

$$\int_0^T \|(\mu_2 A+I)u\|_{V^*}^p\,dt \le l_1^p\int_0^T\|u\|_V^p\,dt.$$

Так как $u\in L_p(0,T;V)$, то правая часть неравенства конечна и, следовательно, левая часть неравенства конечна. Отсюда следует, что $(\mu_2 A+I)u\in L_p(0,T;V^*)$ и что

$$\|(\mu_2 A+I)u\|_{L_p(0,T;V^*)} \le l_1\|u\|_{L_p(0,T;V)} .$$

Поскольку оператор $\mu_2 A+I$ — линейный и ограниченный, то получаем, что он непрерывен как оператор из $L_p(0,T;V)$ в $L_p(0,T;V^*)$. Покажем теперь его обратимость. Сначала докажем, что множество значений оператора $\mu_2 A+I$ совпадает со всем $L_p(0,T;V^*)$. Для этого надо показать, что для любого $w\in L_p(0,T;V^*)$ уравнение $(\mu_2 A+I)u=w$ имеет решение $u\in L_p(0,T;V)$. В силу того, что оператор $\mu_2 A+I: V\to V^*$ обратим, мы имеем, что при почти всех $t\in(0,T)$ уравнение $(\mu_2 A+I)u=w$ имеет решение $u(t)=(\mu_2 A+I)^{-1}w(t)$. Осталось показать, что определенная таким образом функция $u\in L_p(0,T;V)$. В силу оценки (2.2), мы имеем:

$$\mu_2\|u(t)\|_V \le \|(\mu_2 A+I)u(t)\|_{V^*} = \|w(t)\|_{V^*} .$$

Поскольку $w\in L_p(0,T;V^*)$, то из последнего неравенства следует, что $u\in L_p(0,T;V)$. Возводя это неравенство в p-тую степень и интегрируя его по отрезку $[0,T]$, получим оценку снизу (2.3). А из этого неравенства следует, что $\ker(\mu_2 A+I)=\{0\}$. В итоге получили, что $\mu_2 A+I$ обратим как оператор из $L_p(0,T;V)$ в $L_p(0,T;V^*)$.

c) Пусть $u\in C^k([0,T],V)$, тогда $(\mu_2 A+I)u\in \in C^k([0,T],V^*)$ как сумма двух непрерывно-дифференцируемых отображений. В силу доказательства предыдущего пункта этой леммы $\ker(\mu_2 A+I)=\{0\}$.

Теперь для доказательства обратимости оператора $(\mu_2 A+I): C^k([0,T],V)\to C^k([0,T],V^*)$ достаточно доказать, что его множество значений совпадает со всем $C^k([0,T],V^*)$. Для этого достаточно доказать, что уравнение $(\mu_2 A+I)u=w$ при любом $w\in C^k([0,T],V^*)$ имеет решение $u\in C^k([0,T],V)$. Поскольку оператор $\mu_2 A+I: V\to V^*$ обратим, мы имеем, что при каждом фиксированном $t\in[0,T]$ уравнение $(\mu_2 A+I)u=w$ имеет решение $u(t)=(\mu_2 A+I)^{-1}w(t)$. Определенная таким образом функция $u\in C^k([0,T],V)$ как суперпозиция k раз непрерывно-дифференцируемого отображения и линейного оператора:

$$[0,T]\xrightarrow{w} V \xrightarrow{(\mu_2 A+I)^{-1}} V^*. \qquad \square$$

Лемма 2.3 *Для любой функции* $v\in W$ *функция* $C(v)\in L_1(0,T;V^*)$ *и оператор* $C: W\to L_1(0,T;V^*)$ *— непрерывен и для него имеет место оценка:*

$$\|C(v)\|_{L_1(0,t_1;V^*)} \le |\mu_1|\, t_1 \, \|v'\|_{L_1(0,t_1;V)} \qquad (2.5)$$

для любого $t_1 \in [0,T]$.

Доказательство. Пусть $v \in W, t_1 \in [0,T]$ и t_1 — фиксировано. При $t \in [0,t_1]$ из оценки (2.1) получим

$$\|C(v)(t)\|_{V^*} = \left\|\int_0^t \mu_1 A v'(s) ds\right\|_{V^*} \le |\mu_1| \int_0^t \|Av'(s)\|_{V^*}\, ds \le$$

$$\le |\mu_1| \int_0^t \|v'(s)\|_V\, ds \le |\mu_1| \int_0^{t_1} \|v'(s)\|_V\, ds = |\mu_1|\, \|v'\|_{L_1(0,t_1;V)}.$$

Отсюда следует, что $C(v) \in L_1(0,T;V^*)$.

Интегрируя полученное неравенство по t от 0 до t_1, приходим к оценке (2.5).

Непрерывность оператора следует из его линейности и ограниченности. □

Лемма 2.3. *a) Для любого $v \in W$ функция $N_1(v) \in L_p(0,T;V^*)$ для каждого $p, 1 \le p < \infty$ и оператор $N_1 : W \to L_p(0,T;V^*)$ — непрерывен и для него имеет место оценка:*

$$\|N_1(v)\|_{L_p(0,T;V^*)} \le \frac{T^{(p+1)/p}}{\sqrt[p]{p+1}} \|h\|_{L_\infty((0,T)\times(0,T))} \|v\|_{C([0,T],V)}. \qquad (2.6)$$

b) Если $h(s,t) \in C^k([0,T]\times[0,T])$, где $k = 0,1,2,...$ то для любого $v \in C^k([0,T],V)$ функция $N_1(v) \in C^k([0,T],V^*)$.

Доказательство: a) Пусть $v \in W$. Покажем, что $N_1(v) \in L_p(0,T;V^*)$ для любого $p, 1 \le p < \infty$. Действительно, используя оценку (2.1) и неравенство Гёльдера, получим

$$\|N_1(v)\|^p_{L_p(0,T;V^*)} = \int_0^T \left\|\int_0^t h(s,t) Av(s) ds\right\|^p_{V^*} dt \le$$

$$\le \int_0^T \left(\int_0^t |h(s,t)|\, \|Av(s)\|_{V^*}\, ds \right)^p dt \le$$

$$\le \|h\|^p_{L_\infty((0,T)\times(0,T))} \int_0^T \left(\int_0^t \|v(s)\|_V\, ds \right)^p dt \le$$

$$\le \|h\|^p_{L_\infty((0,T)\times(0,T))} \int_0^T \left(\int_0^t 1 ds \right)^{p-1} \left(\int_0^t \|v(s)\|^p_V\, ds \right) dt \le$$

$$\le \|h\|^p_{L_\infty((0,T)\times(0,T))} \|v\|^p_{C([0,T],V)} \int_0^T t^{p-1} \int_0^t ds dt =$$

$$= \frac{T^{p+1}}{p+1} \|h\|^p_{L_\infty((0,T)\times(0,T))} \|v\|^p_{C([0,T],V)}.$$

Так как правая часть конечна, то и левая часть неравенства конечна. Таким образом, доказано, что $N_1(v) \in L_p(0,T;V^*)$ и удовлетворяет оценке (2.6). Непрерывность оператора (в силу ограниченности) вытекает из его линейности.

b) Пусть $v \in C^k([0,T],V)$. Тогда, в силу леммы 2.1*(c)*, мы имеем, что $Av \in C^k([0,T],V^*)$. Следовательно, $N_1(v) = \int_0^t h(s,t) Av(s)\, ds \in C^k([0,T],V^*)$, так как $h(s,t) \in C^k([0,T]\times[0,T])$. □

Лемма 2.5 *Для любой функции $v \in W$ функция $N_2(v) \in L_1(0,T;V^*)$ и оператор $N_2 : W \to L_1(0,T;V^*)$ — непрерывен и для него имеет место оценка:*

$$\|N_2(v)\|_{L_1(0,t_1;V^*)} \le t_1^2\, \|h\|_{L_\infty((0,T)\times(0,T))} \|v'\|_{L_1(0,t_1;V)} \qquad (2.7)$$

для любого $t_1 \in [0,T]$.

Доказательство. Пусть $v \in W, t_1 \in [0,T], t_1$ — фиксировано. При $t \in [0,t_1]$ из оценки (2.1) получим

$$\|N_2(v)(t)\|_{V^*} = \left\|\int_0^t h(s,t) \int_0^s Au'(\tau) d\tau ds\right\|_{V^*} \le$$

$$\le \int_0^t |h(s,t)| \int_0^s \|Av'(\tau)\|_{V^*}\, d\tau ds \le$$

$$\le \|h\|_{L_\infty((0,T)\times(0,T))} \int_0^{t_1}\int_0^s \|v'(\tau)\|_V\, d\tau ds \le$$

$$\le t_1 \|h\|_{L_\infty((0,T)\times(0,T))} \|v'\|_{L_1(0,t_1;V)}.$$

Отсюда следует, что $N_2(v) \in L_1(0,T;V^*)$. Интегрируя полученную оценку по t от 0 до t_1, получим требуемую оценку (2.7). Непрерывность оператора N_2 вытекает из его линейности и ограниченности. □

Лемма 2.6. *Для операторов $\mu_2 A + I, C$ и N_2 имеет место следующее неравенство:*

$$\|C(v) + N_2(v)\|_{L_1(0,t_1;V^*)} \le$$

$$\le \left(\frac{|\mu_1|\, t_1}{\mu_2} + \frac{\|h\|_{L_\infty((0,T)\times(0,T))}\, t_1^2}{\mu_2} \right) \|(\mu_2 A + I) v'\|_{L_1(0,t_1;V^*)} \qquad (2.8)$$

для любых $t_1 \in [0,T], v \in W$.

Доказательство: Пусть $t_1 \in [0,T]$ и t_1 — фиксировано.

Из оценок (2.3), (2.4), (2.5), воспользовавшись неравенством

$$\|C(v) + N_2(v)\|_{L_1(0,t_1;V^*)} \le$$

$$\le \|C(v)\|_{L_1(0,t_1;V^*)} + \|N_2(v)\|_{L_1(0,t_1;V^*)},$$

получаем требуемую оценку. □

2.2. Свойства оператора B

Лемма 1. *Для отображения B имеют место следующие свойства:*

a) Отображение $B : L_4(\Omega)^n \to V^*$ — непрерывно, для него имеет место оценка:

$$\|B(v)\|_{V^*} \le C_0 \|v\|^2_{L_4(\Omega)^n} \tag{2..9}$$

с некоторой константой C_0.

b) Для любой функции $v \in L_2(0,T;L_4(\Omega)^n)$ функция $B(v) \in L_1(0,T;V^*)$ и отображение $B : L_2(0,T;L_4(\Omega)^n) \to L_1(0,T;V^*)$ — непрерывно.

c) Для любой функции $v \in W$ функция $B(v) \in L_1(0,T;V^*)$ и отображение $B : W \to$ $\to L_1(0,T;V^*)$ — вполне непрерывно и для него имеет место оценка:

$$\|B(v)\|_{L_1(0,T;V^*)} \le C_3 \|v\|^2_{C([0,T],V)} \tag{2.10}$$

с некоторой константой C_3.

d) Для любой функции $u \in C^k([0,T],V)$, где $k = 0,1,2,\ldots$, функция $B(u) \in C^k([0,T],V^*)$.

Доказательство: *a)* Для любых $v \in L_4(\Omega)^n$, $\varphi \in V$ имеем

$$\left|\langle B(v),\varphi\rangle\right| \le C_0 \max_{i,j} \|v_i v_j\|_{L_2(\Omega)} \|\varphi\|_V \le$$
$$\le C_0 \|v\|^2_{L_4(\Omega)^n} \|\varphi\|_V ,$$

откуда и следует, что

$$\|B(v)\|_{V^*} \le C_0 \|v\|^2_{L_4(\Omega)^n} \tag{2.11}$$

с некоторой константой C_0.

Покажем непрерывность отображения $B : V \to V^*$, $v \mapsto B(v)$. Для произвольных $v^m, v^0 \in L_4(\Omega)^n$ имеем:

$$\left|\langle B(v^m),\varphi\rangle - \langle B(v^0),\varphi\rangle\right| =$$
$$= \left|\int_\Omega v_i^m v_j^m \frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx - \int_\Omega v_i^0 v_j^0 \frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx\right| \le$$
$$\le \sum_{i,j=1}^n \left\|v_i^m v_j^m - v_i^0 v_j^0\right\|_{L_2(\Omega)} \left\|\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\right\|_{L_2(\Omega)} \le$$
$$\le \sum_{i,j=1}^n \left\|v_i^m v_j^m - v_i^0 v_j^0\right\|_{L_2(\Omega)} \|\varphi\|_V \le$$
$$\le \|\varphi\|_V \sum_{i,j=1}^n \left\|v_i^m v_j^m - v_i^0 v_j^0\right\|_{L_2(\Omega)} .$$

Отсюда следует, что

$$\left\|B(v^m) - B(v^0)\right\|_{V^*} \le \sum_{i,j=1}^n \left\|v_i^m v_j^m - v_i^0 v_j^0\right\|_{L_2(\Omega)} .$$

Преобразуем правую часть неравенства следующим образом:

$$\sum_{i,j=1}^n \left\|v_i^m v_j^m - v_i^0 v_j^0\right\|_{L_2(\Omega)} =$$
$$= \sum_{i,j=1}^n \left\|v_i^m v_j^m - v_i^m v_j^0 + v_i^m v_j^0 - v_i^0 v_j^0\right\|_{L_2(\Omega)} \le$$
$$\le \sum_{i,j=1}^n \left\|v_i^m v_j^m - v_i^m v_j^0\right\|_{L_2(\Omega)} + \sum_{i,j=1}^n \left\|v_i^m v_j^0 - v_i^0 v_j^0\right\|_{L_2(\Omega)} =$$
$$= \sum_{i,j=1}^n \left\|v_i^m (v_j^m - v_j^0)\right\|_{L_2(\Omega)} + \sum_{i,j=1}^n \left\|v_j^0 (v_i^m - v_i^0)\right\|_{L_2(\Omega)} \le$$
$$\le \sum_{i,j=1}^n \left\|v_i^m\right\|_{L_4(\Omega)} \left\|v_j^m - v_j^0\right\|_{L_4(\Omega)} +$$
$$+ \sum_{i,j=1}^n \left\|v_j^0\right\|_{L_4(\Omega)} \left\|v_i^m - v_i^0\right\|_{L_4(\Omega)} \le$$
$$\le C_4 \|v^m\|_{L_4(\Omega)^n} \|v^m - v^0\|_{L_4(\Omega)^n} +$$
$$+ C_4 \|v^0\|_{L_4(\Omega)^n} \|v^m - v^0\|_{L_4(\Omega)^n} =$$
$$= C_4 \left(\|v^m\|_{L_4(\Omega)^n} + \|v^0\|_{L_4(\Omega)^n}\right) \|v^m - v^0\|_{L_4(\Omega)^n} .$$

Таким образом получили, что

$$\begin{aligned} &\left\|B(v^m) - B(v^0)\right\|_{V^*} \le \\ &\le C_4 \left(\|v^m\|_{L_4(\Omega)^n} + \|v^0\|_{L_4(\Omega)^n}\right) \|v^m - v^0\|_{L_4(\Omega)^n} . \end{aligned} \tag{2.12}$$

Пусть последовательность $\{v^m\} \subset L_4(\Omega)^n$ сходится к некоторой предельной функции $v^0 \in L_4(\Omega)^n$. Тогда непрерывность отображения $B : L_4(\Omega)^n \to V^*$ следует из неравенства (2.12).

b) Для $v \in L_2(0,T;L_4(\Omega)^n)$ мы имеем, что $B(v) \in L_1(0,T;V^*)$. Это следует из оценки (2.11). Покажем непрерывность отображения $B : L_2(0,T;L_4(\Omega)^n) \to L_1(0,T;V^*)$.

Пусть последовательность $\{v^m\} \subset$ $\subset L_2(0,T;L_4(\Omega)^n)$ сходится к некоторому пределу $v^0 \in L_2(0,T;L_4(\Omega)^n)$. Проинтегрируем неравенство (2.12) от 0 до T. Получим:

$$\int_0^T \left\|B(v^m(t)) - B(v^0(t))\right\|_{V^*} dt \le$$
$$\le C_4 \int_0^T \left(\|v^m\|_{L_4(\Omega)^n} + \|v^0\|_{L_4(\Omega)^n}\right) \|v^m - v^0\|_{L_4(\Omega)^n}\, dt \le$$
$$\le C_4 \left(\int_0^T \left\|v^m(t)\right\|^2_{L_4(\Omega)^n} dt\right)^{\frac12} \cdot \left(\int_0^T \left\|v^m(t) - v^0(t)\right\|^2_{L_4(\Omega)^n} dt\right)^{\frac12} +$$
$$+ C_4 \left(\int_0^T \left\|v^0(t)\right\|^2_{L_4(\Omega)^n} dt\right)^{\frac12} \cdot \left(\int_0^T \left\|v^m(t) - v^0(t)\right\|^2_{L_4(\Omega)^n} dt\right)^{\frac12}.$$

Или, что то же самое:

$$\left\|B(v^m)-B(v^0)\right\|_{L_1(0,T;V^*)}\le$$
$$\le C_4\left(\|v^m\|_{L_2(0,T;L_4(\Omega)^n)}+\|v^0\|_{L_2(0,T;L_4(\Omega)^n)}\right)\times$$
$$\times\|v^m-v^0\|_{L_2(0,T;L_4(\Omega)^n)}.$$

Так как правая часть неравенства стремится к нулю при $m\to+\infty$, то стремится к нулю и левая часть. А это значит, что отображение $B: L_2(0,T;L_4(\Omega)^n)\to L_1(0,T;V^*)$ — непрерывно.

c) Воспользуемся замечанием 2.1 к теореме 2.2 из [11] (с. 216—223). Оно имеет следующую формулировку:

Замечание 2.1. *Пусть X_0, X — банаховы пространства, а X_1 — гильбертово пространство. Предполагается, что они удовлетворяют следующему условию:*

$$X_0\subset X\subset X_1,$$

где вложения непрерывны, X_0 — рефлексивно, вложение $X_0\to X$ компактно. Пусть, далее, $T>0$ — фиксированное конечное число и q — конечное число, $q>1$.

Тогда пространство $Y=\{v: v\in L_q(0,T;X_0);\ X_0); v'\in L_1(0,T;X_1)\}$ с нормой $\|v\|_Y=\|v\|_{L_q(0,T;X_0)}+\|v'\|_{L_1(0,T;X_1)}$ непрерывно вложено в $L_q(0,T;X)$ и это вложение компактно.

В нашем случае

$$X_0=V,\ X=L_4(\Omega)^n,\ X_1=L_2(\Omega)^n,\ \alpha=2,$$
$$Y=\{v: v\in L_2(0,T;V);\ v'\in L_1(0,T;L_2(\Omega)^n)\}.$$

Так как в силу теоремы вложения Соболева мы имеем компактное вложение $V\subset L_4(\Omega)^n$ при $n\le 3$, то выполнены все условия замечания 2.1 и из него вытекает компактность вложения Y в $L_2(0,T;L_4(\Omega)^n)$.

Из того, что $C([0,T],V)\subset L_2(0,T;V)$ и $L_1(0,T;V)\subset L_1(0,T;L_2(\Omega)^n)$ и эти вложения непрерывны, следует, что $W\subset Y$, причем вложение непрерывно. Далее, из пункта *(b)* мы имеем, что отображение $B: L_2(0,T;L_4(\Omega)^n)\to L_1(0,T;V^*)$ — непрерывно.

Таким образом имеем

$$W\subset Y\subset L_2(0,T;L_4(\Omega)^n)\xrightarrow{B}L_1(0,T;V^*),$$

где первое вложение непрерывно, второе вложение — вполне непрерывно, а отображение B — непрерывно. Таким образом получили, что для любой функции $v\in W$ функция $B(v)\in L_1(0,T;V^*)$ и отображение $B: W\to L_1(0,T;V^*)$ — вполне непрерывно.

Пусть $v\in W$. Тогда из неравенства (2.9) следует, что

$$\left\|B(v)(t)\right\|_{V^*}\le C_3\left\|v(t)\right\|^2_{L_4(\Omega)^n}$$

при почти всех $t\in(0,T)$.

В силу теоремы вложения Соболева, мы имеем непрерывное вложение $V\subset L_4(\Omega)^n$ при $n\le 3$ и, следовательно: $\left\|v(t)\right\|_{L_4(\Omega)^n}\le C_2\left\|v(t)\right\|_V$. В последней оценке константа C_2 зависит от области Ω. Отсюда

$$\left\|B(v)(t)\right\|_{V^*}\le C_0C_2^2\left\|v(t)\right\|_V^2.$$

Проинтегрировав последнее неравенство по t от 0 до T, получим требуемое неравенство (2.10)

$$\int_0^T\left\|B(v)(t)\right\|_{V^*}dt\le C_0C_2^2\int_0^T\left\|v(t)\right\|_V^2dt\le$$
$$\le C_0C_2^2\left(\max_{t\in[0,T]}\left\|v(t)\right\|_V\right)^2\int_0^T dt=C_0C_2^2T\,\|v\|^2_{C([0,T],V)}$$

с константой $C_3=C_0C_2^2T$.

d) Заметим, что

$$B(u)=b(u,u),$$

где $b(u,v)$ — билинейная, непрерывная форма, $b: V\times V\to V^*$. Она определяется следующим образом:

для каждого $v\in V$ форма

$$\varphi\mapsto\int_\Omega u_iv_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}dx,\varphi\in V$$

линейна и непрерывна на V [11, с. 133). Отсюда следует, что существует элемент из V^*, который мы обозначим через $b(u,v)$, такой, что

$$\left\langle b(u,v),\varphi\right\rangle=\int_\Omega u_iv_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}dx\quad\forall\varphi\in V.$$

Тогда имеем, что

$$b: C([0,T],V)\times C([0,T],V)\to C([0,T],V^*).$$

Действительно, если $u,v\in C([0,T],V)$, то $b(u,v)\in C([0,T],V^*)$ как суперпозиция непрерывных отображений:

$$[0,T]\xrightarrow{u,v}V\times V\xrightarrow{b}V^*.$$

Докажем теперь само утверждение этого пункта. Пусть $u\in C^k([0,T],V)$.

Если $k=0$, то $B(u)=b(u,u)\in C([0,T],V^*)$.

Если $k=1$, то имеем, что

$$(B(u)(t))' = (b(u(t), u(t)))' =$$

$$= b(u'(t), u(t)) + b(u(t), u'(t)).$$

В силу вышесказанного, $b(u', u), b(u, u') \in C([0,T], V^*)$. Следовательно, $(B(u))' \in C([0,T], V^*)$ и $B(u) \in C^1([0,T], V^*)$.

Аналогичным образом для любого $k=0,1,2,...$ доказывается, что $B(u) \in C^k([0,T], V^*)$. $\square$

2.3. Операторные уравнения, эквивалентные задачам (1.1), (0.10) и (1.2), (0.10)

Введем некоторые определения, которые потребуются нам в этом разделе. Пусть E — банахово пространство, 2^E — множество всех ограниченных подмножеств E.

Определение 2.1. *Мерой некомпактности в банаховом пространстве E называется функция $\psi : 2^E \to \mathbb{R}$, принимающая неотрицательные значения и удовлетворяющая условиям:*

a) $\psi(\overline{co}(M)) = \psi(M)$, где $\overline{co}(M)$ — замыкание выпуклой оболочки множества $M \in 2^E$.

b) $\forall (M_1, M_2 \in 2^E)[M_1 \subseteq M_2 \Rightarrow \psi(M_1) \le \psi(M_2)]$

В этом разделе мы будем использовать меру некомпактности Куратовского в пространстве $L_1(0,T;V^*) \times V$.

Определение 2.2. *Мерой некомпактности Куратовского множества $M \in 2^E$ называется число $\gamma(M)$, равное инфимуму тех $d > 0$, для которых множество M может быть представлено как объединение конечного числа подмножеств M_i с диаметром не больше, чем d.*

Следующее определение было введено в [5].

Определение 2.3. *Отображение g называется уплотняющим относительно оператора L по мере некомпактности γ на $L_1(0,T;V^*) \times V$ если*

$$\gamma(g(M)) < \gamma(L(M))$$

для каждого $M \subset W$ такого, что множества $g(M)$ и $L(M)$ ограничены и $\gamma(g(M)) \ne 0$.

Введем следующие обозначения:

$$L : W \to L_1(0,T;V^*) \times V,\ L(v) = ((\mu_2 A + I)v', v|_{t=0});$$

$$g_2 : W \to L_1(0,T;V^*) \times V,\ g_2(v) = (C(v), 0);$$

$$g_1 : W \to L_1(0,T;V^*) \times V,\ g_1(v) = (\mu_1 A v, 0);$$

$$S_1 : W \to L_1(0,T;V^*) \times V,\ S_1(v) = (N_1(v), 0);$$

$$S_2 : W \to L_1(0,T;V^*) \times V,\ S_2(v) = (N_2(v), 0);$$

$$K : W \to L_1(0,T;V^*) \times V,\ K(v) = (B(v), 0).$$

Тогда задача (1.1), (0.10) эквивалентна следующему операторному уравнению:

$$L(v) + g_1(v) + S_1(v) - K(v) = (f, a), \quad (2.13)$$

а эквивалентная ей задача (1.2), (0.10) равносильна операторному уравнению:

$$L(v) + g_2(v) + S_2(v) - K(v) = (f_2, a). \quad (2.14)$$

Лемма 2.8. *Для операторов L, g_2 и S_2 имеют место следующие свойства:*

a) Оператор $L : W \to L_1(0,T;V^*) \times V$ обратим.

b) Существует $t_1 \in [0,T]$ такое что для любых $t \le t_1$ оператор $(g_2 + S_2) : W_{[0,t]} \to L_1(0,t;V^*) \times V$ является уплотняющим относительно оператора $L : W_{[0,t]} \to L_1(0,t;V^*) \times V$.

Доказательство: *a)* Для того, чтобы доказать что оператор L обратим, достаточно показать, что задача

$$(\mu_2 A + I)v' = f, \quad (2.15)$$

$$v|_{t=0} = a \quad (2.16)$$

имеет единственное решение $v \in W$ для любых $f \in L_1(0,T;V^*), a \in V$. Покажем это.

Поскольку оператор $(\mu_2 A + I)$ обратим как оператор из $L_1(0,T;V)$ в $L_1(0,T;V^*)$, то применяя $(\mu_2 A + I)^{-1}$ к уравнению (2.15), получим, что

$$v' = (\mu_2 A + I)^{-1}(f) \text{ и } v' \in L_1(0,T;V).$$

Поскольку

$$v(t) = \int_0^t (\mu_2 A + I)^{-1}(f)(s)\, ds + a$$

получаем, что $v \in C([0,T], V)$.

Следовательно, $v \in W$. Покажем, что решение единственно. Действительно, если существует второе решение $u \in W\ u \ne v$ задачи (2.15), (2.16), то разность $(v - u)$ является решением следующей задачи:

$$(\mu_2 A + I)(v' - u') = 0,$$

$$(v - u)|_{t=0} = 0.$$

Из ранее полученной формулы для решения этой задачи следует, что $u - v = 0$. Таким образом, получили противоречие с нашим предположением о том, что $u \ne v$. Следовательно, оператор L обратим.

b) Покажем уплотняемость оператора $g_2 + S_2$ относительно оператора L. Для любого множества $M \in W$ такого, что $\gamma(M) \ne 0$, из неравенства (2.8) имеем:

$$\gamma((g_2+S_2)(M))\leq$$
$$\leq\left(\frac{|\mu_1|\,t_1}{\mu_2}+\frac{\|h\|_{L_\infty((0,T)\times(0,T))}\;t_1^2}{\mu_2}\right)\gamma(L(M)).$$

Выбирая теперь t_1 таким образом, чтобы

$$\left(\frac{|\mu_1|\,t_1}{\mu_2}+\frac{\|h\|_{L_\infty((0,T)\times(0,T))}\;t_1^2}{\mu_2}\right)<1,$$

получим требуемое утверждение. □

3. АПРИОРНАЯ ОЦЕНКА

В этом пункте устанавливается априорная оценка решений операторного уравнения (2.13), а следовательно, и уравнения (2.14), поскольку множества их решений совпадают.

Введем вспомогательное семейство операторных уравнений:

$$L(v)+\eta g_1(v)+\eta S_1(v)-\eta K(v)=(f,a), \qquad (3.1)$$

где $\eta\in[0,1]$.

Установим априорную оценку для решений этого семейства. Пусть $v\in W$ — решение уравнения (3.1) для некоторого $\eta\in[0,1]$. Применим первую компоненту (3.1) для $t\in[0,T]$ к значению $v(t)$. Получим:

$$\langle(\mu_2A+I)v'(t),v(t)\rangle+\eta\,\langle\mu_1Av(t),v(t)\rangle+$$
$$+\eta\left\langle\int_0^t h(s,t)Av(s)ds,v(t)\right\rangle-\eta\,\langle B(v)(t),v(t)\rangle=$$
$$=\langle f(t),v(t)\rangle.$$

По определению оператора B имеем, что

$$\langle B(v)(t),v(t)\rangle=\int_\Omega v_i(t)v_j(t)\frac{\partial v_j(t)}{\partial x_i}dx=$$
$$=\frac{1}{2}\int_\Omega v_i(t)\frac{\partial v_j^2(t)}{\partial x_i}dx=-\frac{1}{2}\int_\Omega\frac{\partial v_i(t)}{\partial x_i}v_j^2(t)dx=$$
$$=-\frac{1}{2}\int_\Omega \operatorname{div}v(t)v_j^2(t)dx=0$$

в силу соленоидальности функций из W.

Таким образом получим, что

$$\langle(\mu_2A+I)v'(t),v(t)\rangle+\eta\,\langle\mu_1Av(t),v(t)\rangle+$$
$$+\eta\left\langle\int_0^t h(s,t)Av(s)ds,v(t)\right\rangle=\langle f(t),v(t)\rangle.$$

Проинтегрируем это равенство по t от 0 до t.

$$\int_0^t\langle(\mu_2A+I)v'(s),v(s)\rangle ds+\int_0^t\eta\,\langle\mu_1Av(s),v(s)\rangle ds+$$
$$+\int_0^t\eta\left\langle\int_0^s h(\tau,s)Av(\tau)d\tau,v(s)\right\rangle ds=\int_0^t\langle f(s,x),v(s)\rangle ds. \qquad (3.2)$$

Используя определение оператора μ_2A+I и формулу интегрирования по частям получим:

$$\int_0^t\langle\mu_2Av'(s),v(s)\rangle ds=\int_0^t\int_\Omega\mu_2\nabla v'(s):\nabla v(s)dxds=$$
$$=\frac{\mu_2}{2}\int_0^t\frac{d}{ds}\left(\int_\Omega\nabla v(s):\nabla v(s)dx\right)ds=$$
$$=\frac{\mu_2}{2}\int_0^t\frac{d}{ds}(\|v(s)\|_V^2)ds=\frac{\mu_2}{2}\|v(t)\|_V^2-\frac{\mu_2}{2}\|a\|_V^2.$$

Далее получим, что

$$\int_0^t\langle Iv'(s),v(s)\rangle ds=\int_0^t\int_\Omega v'(s)\cdot v(s)dxds=$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^t\frac{d}{ds}(\int_\Omega v(s)\cdot v(s)dx)ds=$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^t\frac{d}{ds}(\|v(s)\|_H^2)ds=\frac{1}{2}\|v(t)\|_H^2-\frac{1}{2}\|a\|_H^2.$$

Тогда (3.2) можно переписать в виде

$$\mu_2 2\|v(t)\|_V^2+\frac{1}{2}\|v(t)\|_H^2=\frac{\mu_2}{2}\|a\|_V^2+\frac{1}{2}\|a\|_H^2-$$
$$-\eta\int_0^t\langle\mu_1Av(s),v(s)\rangle ds-\int_0^t\eta\left\langle\int_0^s h(\tau,s)Av(\tau)d\tau,v(s)\right\rangle ds+$$
$$+\int_0^t\langle f(s,x),v(s)\rangle ds.$$

Отсюда

$$\frac{\mu_2}{2}\|v(t)\|_V^2+\frac{1}{2}\|v(t)\|_H^2\leq\eta\left|\int_0^t\langle\mu_1Av(s),v(s)\rangle ds\right|+$$
$$+\frac{\mu_2}{2}\|a\|_V^2+\frac{1}{2}\|a\|_H^2+\left|\int_0^t\eta\left\langle\int_0^s h(\tau,s)Av(\tau)d\tau,v(s)\right\rangle ds\right|+$$
$$+\left|\int_0^t\langle f(x,s),v(s)\rangle ds\right|.$$

Отсюда

$$\frac{\mu_2}{2}\|v(t)\|_V^2\leq\eta\left|\int_0^t\langle\mu_1Av(s),v(s)\rangle ds\right|+$$
$$+\left|\int_0^t\eta\left\langle\int_0^s h(\tau,s)Av(\tau)d\tau,v(s)\right\rangle ds\right|+$$
$$+\left|\int_0^t\langle f(x,s),v(s)\rangle ds\right|+\frac{\mu_2}{2}\|a\|_V^2+\frac{1}{2}\|a\|_H^2. \qquad (3.3)$$

Оценим слагаемые в правой части неравенства, считая $t \in [0, t_2]$, где $t_2 \in [0, T]$. Для первого слагаемого имеем

$$\left|\eta\int_0^t \langle \mu_1 Av(s), v(s)\rangle\, ds\right| = \eta\left|\int_0^t \mu_1 \int_\Omega \nabla v(s) : \nabla v(s) dx ds\right| =$$

$$= \eta\left|\int_0^t \mu_1 \|v(s)\|_V^2\, ds\right| \le |\mu_1| \max_{0\le s\le t} \|v(s)\|_V^2 \int_0^t ds \le$$

$$\le |\mu_1|\, t_2 \max_{0\le s\le t_2} \|v(s)\|_V^2 = |\mu_1|\, t_2\, \|v\|_{C([0,t_2],V)}^2 .$$

Переходим к следующему слагаемому:

$$\left|\int_0^t \eta \left\langle \int_0^s h(\tau,s) Av(\tau) d\tau, v(s)\right\rangle ds\right| \le$$

$$\le \int_0^t \eta \left\| \int_0^s h(\tau,s) Av(\tau) d\tau \right\|_{V^*} \|v(s)\|_V\, ds \le$$

$$\le \max_{0\le s\le t} \|v(s)\|_V \int_0^t \left\| \int_0^s h(\tau,s) Av(\tau) d\tau \right\|_{V^*} ds \le$$

Воспользовавшись оценкой (2.6), получим

$$\le \frac{t^2}{2} \|h\|_{L_\infty((0,t)\times(0,t))} \|v\|_{C([0,t],V)}^2 \le$$

$$\le \frac{t_2^2}{2} \|h\|_{L_\infty((0,T)\times(0,T))} \|v\|_{C([0,t_2],V)}^2 .$$

Переходим к предпоследнему слагаемому:

$$\left|\int_0^t \langle f(x,s), v(s)\rangle\, ds\right| \le \int_0^t \|f(x,s)\|_{V^*} \|v(s)\|_V\, ds \le$$

$$\le \max_{0\le s\le t} \|v(s)\|_V \int_0^t \|f(x,s)\|_{V^*}\, ds \le$$

$$\le \|v\|_{C([0,t_2],V)} \|f\|_{L_1(0,t_2;V^*)} \le \frac{\varepsilon \|v\|_{C([0,t_2],V)}^2}{2} + \frac{\|f\|_{L_1(0,t_2;V^*)}^2}{2\varepsilon} \le$$

$$\le \frac{\varepsilon \|v\|_{C([0,t_2],V)}^2}{2} + \frac{\|f\|_{L_1(0,T;V^*)}^2}{2\varepsilon} .$$

Здесь использовано неравенство $ab \le \dfrac{\varepsilon a^2}{2} + \dfrac{b^2}{2\varepsilon}$ для произвольного $\varepsilon > 0$.

Преобразуем последнее слагаемое в (3.3), воспользовавшись тем, что $\|v\|_H \le C_1 \|v\|_V$ с некоторой константой C_1. Здесь, как и ранее, $l_1 = \mu_2 + C_1^2$:

$$\frac{1}{2}\mu_2 \|a\|_V^2 + \frac{1}{2}\|a\|_H^2 \le \frac{1}{2} l_1 \|a\|_V^2 .$$

В итоге неравенство (3.3) можно переписать в виде:

$$\frac{\mu_2}{2}\|v(t)\|_V^2 \le$$

$$\le \left(|\mu_1|\, t_2 + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{t_2^2}{2}\|h\|_{L_\infty((0,T)\times(0,T))}\right)\|v\|_{C([0,t_2],V)}^2 +$$

$$+ \frac{\|f\|_{L_1(0,T;V^*)}^2}{2\varepsilon} + \frac{l_1}{2}\|a\|_V^2 .$$

Выберем t_2 таким образом, чтобы $|\mu_1|\, t_2 + \dfrac{t_2^2}{2}\|h\|_{L_\infty((0,T)\times(0,T))} < \dfrac{\mu_2}{8}$, и ε так, чтобы $\dfrac{\varepsilon}{2} < \dfrac{\mu_2}{8}$. Заметим, что правая часть неравенства от t не зависит. Вычислим максимум по $t \in [0, t_2]$ от левой части неравенства. Перенесем члены, содержащие $\|v\|_{C([0,t_2],V)}^2$, в левую часть. Получим

$$\|v\|_{C([0,t_2],V)}^2 \le C_5 \|f\|_{L_1(0,T;V^*)}^2 + C_6 \|a\|_V^2 \qquad (3.4)$$

с константами

$$C_4 = \frac{\mu_2}{2} - \left(|\mu_1|\, t_2 + \frac{t_2^2}{2}\|h\|_{L_\infty((0,T)\times(0,T))} + \frac{\varepsilon}{2}\right),$$

$$C_5 = \frac{1}{2\varepsilon C_4}, \quad C_6 = \frac{l_1}{2C_4}.$$

Для получения оценки $\|v'\|_{L_1(0,t_2;V)}$ заметим, что, если $v \in W$ удовлетворяет уравнению (3.1), то справедливо равенство:

$$(\mu_2 A + I)v' + \eta\mu_1 Av + \eta N_1(v) - \eta B(v) = f.$$

Выразим из равенства $(\mu_2 A + I)v'$ и применим к обеим частям полученного равенства $(\mu_2 A + I)^{-1}$. Тогда

$$v' = (\mu_2 A + I)^{-1}\left(-\eta\mu_1 Av - \eta N_1(v) + \eta B(v) + f\right).$$

Следовательно,

$$\|v'\|_{L_1(0,t_2;V)} \le \left\|(\mu_2 A + I)^{-1}\right\| (\eta\,|\mu_1|\,\|Av\|_{L_1(0,t_2;V^*)} +$$

$$+ \eta\,\|N_1(v)\|_{L_1(0,t_2;V^*)} + \eta\,\|B(v)\|_{L_1(0,t_2;V^*)} + \|f\|_{L_1(0,T;V^*)}).$$

Воспользовавшись для норм $\|Av\|_{L_1(0,t_2;V^*)}$, $\|N_1(v)\|_{L_1(0,t_2;V^*)}$, $\|B(v)\|_{L_1(0,t_2;V^*)}$ оценками (2.3), (2.6) и (2.10) соответственно и оценкой (3.4) для $\|v\|_{C([0,t_2],V)}$, получим следующую оценку:

$$\|v'\|_{L_1(0,t_2;V)} \le C_7 \qquad (3.5)$$

с константой C_7, зависящей от $\|(\mu_2 A+I)^{-1}\|$, $\|f\|_{L_1(0,T;V^*)}$, $\|a\|_V$. Из оценок (3.4) и (3.5) получаем, что для решения уравнения (3.1) имеет место оценка:

$$\|v\|_{C([0,t_2],V)}+\|v'\|_{L_1(0,t_2;V)}\le C_8 \qquad (3.6)$$

с константой C_8, зависящей от $\|(\mu_2 A+I)^{-1}\|$, $\|f\|_{L_1(0,T;V^*)}$, $\|a\|_V$.

Таким образом, доказана следующая теорема:

Теорема 3.1. *Существует* $t_2\in[0,T]$ *такое, что если* $v\in W_{[0,t_2]}$ *— решение уравнения (3.1) для некоторого* $\eta\in[0,1]$, *то имеет место априорная оценка* (3.6).

4. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ СТЕПЕНИ. ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ.

В этом разделе с помощью теории степени будет доказана теорема существования для слабых решений задачи (0.3)—(0.6).

Введем некоторые понятия из теории степени.

Пусть E,F — банаховы пространства и D — ограниченное подмножество в E. Рассмотрим множество отображений следующего вида

$$L+g:\bar D\subset E\to F,$$

где L — обратимый, а g — непрерывный и уплотняющий относительно оператора L по мере некомпактности ψ пространства F. Предполагается, что $L(x)+g(x)\ne 0$ при $x\in\partial D$ (невырожденность оператора $L+g$ на границе ∂D).

Для таких отображений в [5] определена степень $\deg(L+g,\bar D,0)$. Перечислим некоторые свойства этой степени:

1. Если $\deg(L+g,\bar D,y_0)=\deg(L+g-y_0,\bar D,0)\ne 0$, то тогда уравнение $L(x)+g(x)=y_0$ имеет решение в D.

2. Если $L(x)+\lambda g(x)\ne y_0$ для всех $x\in\partial D$ и $\lambda\in[0,1]$, тогда

$$\deg(L+g,\bar D,y_0)=\deg(L,\bar D,y_0).$$

3. Если уравнение $L(x)=y_0$ имеет решение в D, тогда

$$\deg(L,\bar D,y_0)=1$$

Теорема 4.1. *Для любых* $f\in L_1(0,T;V^*)$, $a\in V$ *уравнение (2.14) имеет по меньшей мере одно решение* $v\in W$.

Доказательство: Обозначим $t_0=\min(t_1,t_2)$. Отметим, что t_1,t_2 и, следовательно, t_0 зависят только от $|\mu_1|,\mu_2$ и $\|h\|_{L_\infty((0,T)\times(0,T))}$ и не зависят ни от правой части, ни от начального условия.

На первом шаге доказательства рассмотрим (2.14) на $W_{[0,t_0]}$ и докажем существование решения $v\in W_{[0,t_0]}$ этого уравнения.

Обозначим $R=C_8+1$. Из оценки (3.6) следует, что все решения семейства уравнений (3.1) на отрезке $[0,t_0]$ лежат в шаре $B_R\subset W_{[0,t_0]}$ с центром в нуле. Поэтому ни одно из уравнений этого семейства не имеет решений на границе шара B_R. И, следовательно, в силу эквивалентности (2.13) и (2.14), ни одно из уравнений семейства

$$L(v)+\eta g_2(v)+\eta S_2(v)-\eta K(v)= \\ =(f-\eta\mu_1 Aa-\eta\int_0^t h(s,t)dsAa,a) \qquad (4.1)$$

также не имеет решений на границе шара B_R.

Оператор L — обратим, оператор g_2+S_2 — уплотняющий относительно оператора L, оператор K — вполне непрерывный. Следовательно, оператор g_2+S_2-K также будет уплотняющим относительно оператора L. Таким образом, для каждого $\eta\in[0,1]$ для оператора $L+\eta(g_2+S_2-K)$ определена степень: $\deg(L+\eta(g_2+S_2-K),B_R,\ (f-\eta\mu_1 Aa-$ $-\eta\int_0^t h(s,t)dsAa,a))$. По свойству 1 степени,

$$\deg(L+\eta(g_2+S_2-K),B_R,(f-\eta\mu_1Aa-\eta\int_0^t h(s,t)dsAa,a))=$$

$$=\deg(L+\eta(g_2+S_2-K+\mu_1Aa+\int_0^t h(s,t)dsAa),B_R,(f,a))=$$

по свойству 2 степени

$$=\deg(L,B_R,(f,a)).$$

Поскольку оператор L — обратим, то уравнение $Lv=(f,a)$ имеет решение в шаре B_R. И по свойству 3 степени получаем, что

$$\deg(L,B_R,(f,a))=1.$$

Таким образом,

$$\deg(L+g_2+S_2-K,B_R,(f-\eta\mu_1Aa-\eta\int_0^t h(s,t)dsAa,a))=1.$$

Таким образом, по свойству 1 степени получаем, что существует $v\in W_{[0,t_0]}$ — решение уравнения (2.14).

На втором шаге доказательства покажем, что существует решение $v \in W_{[0,2t_0]}$ уравнения (2.14).

По первому шагу уравнение (2.14) имеет решение на отрезке $[0,t_0]$. Перепишем первую компоненту (2.14) в виде

$$\begin{gathered}(\mu_2 A + I)v' + \int_0^t \mu_1 A v'(s)ds + \\ + \int_0^t h(s,t)\int_0^s A u'(\tau)d\tau ds - B(v) = \\ = f - \mu_1 A a - \int_0^t h(s,t)ds A a,\end{gathered} \tag{4.2}$$

Подставим выражения для $C(v), F_2$ и N_2 в первую компоненту (2.14) и перепишем последнее равенство в следующем виде:

$$\begin{gathered}(\mu_2 A + I)v' + \int_0^{t_0} \mu_1 A v'(s)ds + \int_{t_0}^t \mu_1 A v'(s)ds + \\ + \int_0^{t_0} h(s,t)\int_0^s A u'(\tau)d\tau ds + \int_{t_0}^t h(s,t)\int_0^s A u'(\tau)d\tau ds - B(v) = \\ = f - \mu_1 A a - \int_0^t h(s,t)ds A a.\end{gathered}$$

Произведем в последнем равенстве замену координат: $\tau = t - t_0$. Получим

$$\begin{gathered}(\mu_2 A + I)v' + \int_0^{t_0} \mu_1 A v'(s)ds + \int_{t_0}^{\tau+t_0} \mu_1 A v'(s)ds + \\ + \int_0^{t_0} h(s,\tau+t_0)\int_0^s A u'(\tau_1)d\tau_1 ds + \\ + \int_{t_0}^{\tau+t_0} h(s,\tau+t_0)\int_0^s A u'(\tau_1)d\tau_1 ds - B(v) = \\ = f - \mu_1 A a - \int_0^{\tau+t_0} h(s,\tau+t_0)ds A a.\end{gathered}$$

Сделаем в нижеследующих интегралах замену $s_1 = s - t_0$:

$$\begin{gathered}\int_{t_0}^{\tau+t_0} \mu_1 A v'(s)ds = \int_0^{\tau} \mu_1 A v'(s_1)ds_1, \\ \int_{t_0}^{\tau+t_0} h(s,\tau+t_0)\int_0^s A u'(\tau)d\tau ds = \\ = \int_0^{\tau} h(s_1+t_0,\tau+t_0)\int_0^{s_1+t_0} A u'(\tau_1)d\tau_1 d(s_1+t_0).\end{gathered}$$

По первому шагу слагаемые

$$\begin{gathered}\int_0^{t_0} \mu_1 A v'(s)ds, \\ \int_0^{t_0} h(s,\tau+t_0)\int_0^s A u'(\tau_1)d\tau_1 ds\end{gathered}$$

нам известны и мы их просто перенесем в правую часть. Таким образом, уравнение (4.2) можно переписать в виде:

$$\begin{gathered}(\mu_2 A + I)v' + \int_0^{\tau} \mu_1 A v'(s)ds + \\ + \int_0^{\tau} h(s_1+t_0,\tau+t_0)\int_0^{s_1+t_0} A u'(\tau_1)d\tau_1 d(s_1+t_0) - B(v) = \\ = f - \mu_1 A a - \int_0^{\tau+t_0} h(s,\tau+t_0)ds A a - \\ - \int_0^{t_0} \mu_1 A v'(s)ds - \int_0^{t_0} h(s,\tau+t_0)\int_0^s A u'(\tau)d\tau ds.\end{gathered}$$

Здесь для удобства переобозначены некоторые переменные интегрирования.

В итоге получим задачу того же вида, что и задача, которая решалась на первом шаге (в правой части уравнения добавились слагаемые, но они по первому шагу нам известны) на отрезке $[0,T_1]$ (здесь $T_1 = T - t_0$) с начальным условием $v(0) = a_1$. По первому шагу доказательства, у нее существует хотя бы одно решение $v \in W_{[0,t_0]}$. Напомним, что t_0 зависит только от $\mu_2, |\mu_1|$ и $\|h\|_{L_\infty((0,T)\times(0,T))}$ и не зависит ни от правой части, ни от начального условия. Таким образом, мы получили решение (2.14) на отрезке $[0,2t_0]$. Так как решение на отрезке $[0,t_0]$ продолжается до непрерывного решения на отрезке $[t_0,2t_0]$, то $v \in C([0,2t_0],V)$. Так как $v' \in L_1(0,t_0;V)$ и $v' \in L_1(t_0,2t_0;V)$, то $v' \in L_1(0,2t_0;V)$. Следовательно, $v \in W_{[0,2t_0]}$.

Повторяем процедуру продолжения решения. Поскольку каждый раз мы продолжаем решение на отрезок фиксированной длины t_0 и отрезок $[0,T]$ — конечен, то за конечное число шагов мы построим решение уравнения (2.14) на отрезке $[0,T]$. То, что функция $v \in W$, вытекает из построения. □

Тогда имеет решение и операторное уравнение (1.1), причем это решение удовлетворяет начальному условию (0.10). Отсюда имеем, что существует хотя бы одно слабое решение задачи (0.3)—(0.6).

5. ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ

Теорема 5.1. Слабое решение задачи (0.5)—(0.8) единственно.

Доказательство: На первом шаге доказательства покажем единственность слабого решения задачи (0.5)—(0.8) на отрезке $[0,t_0]$, где $t_0=\min(t_1,t_2)$. Отметим, что t_1,t_2 и, следовательно, t_0 зависят только от $\mu_2,|\mu_1|$ и $\|h\|_{L_\infty((0,T)\times(0,T))}$ и не зависят ни от правой части, ни от начального условия.

Предположим противное. Пусть u и v ($u\neq v$) — два слабых решения задачи (0.3)—(0.6). Тогда и u, и v удовлетворяют равенству (0.9) на отрезке $[0,t_0]$ и начальному условию (0.10). Вычтем из равенства (0.9) для u равенство (0.9) для v. Обозначим через $w=u-v$. Тогда для w получим следующее равенство:

$$\int_\Omega \frac{\partial w}{\partial t}\varphi dx+\mu_2\int_\Omega \nabla\frac{\partial w}{\partial t}:\nabla\varphi dx+\mu_1\int_\Omega\nabla w:\nabla\varphi dx+$$
$$+\int_\Omega\int_0^t h(s,t)\nabla w(s)ds:\nabla\varphi dx-\int_\Omega(u_iu_j-v_iv_j)\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}dx=0$$

для любых $\varphi\in V$ и почти всех $t\in[0,t_0]$. Поскольку это равенство выполнено для всех $\varphi\in V$, то оно выполнено и для $\varphi=w(\cdot,t)$ при почти всех $t\in(0,t_0)$. Таким образом, при почти всех $t\in(0,t_0)$ получим:

$$\int_\Omega \frac{\partial w}{\partial t}\cdot wdx+\mu_2\int_\Omega\nabla\frac{\partial w}{\partial t}:\nabla wdx+$$
$$+\mu_1\int_\Omega\nabla w:\nabla wdx+\int_\Omega\int_0^t h(s,t)\nabla w(s)ds:\nabla w(t)dx-$$
$$-\int_\Omega(u_iu_j-v_iv_j)\frac{\partial w_j}{\partial x_i}dx=0. \tag{5.1}$$

В силу того, что

$$\int_\Omega(u_iu_j-v_iv_j)\frac{\partial w_j}{\partial x_i}dx=\int_\Omega(u_iu_j-u_iv_j)\frac{\partial w_j}{\partial x_i}dx+$$
$$+\int_\Omega(u_iv_j-v_iv_j)\frac{\partial w_j}{\partial x_i}dx=\int_\Omega u_iw_j\frac{\partial w_j}{\partial x_i}dx+$$
$$+\int_\Omega v_jw_i\frac{\partial w_j}{\partial x_i}dx=\frac12\int_\Omega u_i\frac{\partial(w_jw_j)}{\partial x_i}dx+$$
$$+\int_\Omega v_jw_i\frac{\partial w_j}{\partial x_i}dx=\frac12\int_\Omega \operatorname{div} uw_jw_jdx+$$
$$+\int_\Omega v_jw_i\frac{\partial w_j}{\partial x_i}dx=\int_\Omega v_jw_i\frac{\partial w_j}{\partial x_i}dx,$$

равенство (5.1) можно переписать в виде:

$$\frac12\int_\Omega\frac{\partial}{\partial t}(w^2)dx+\frac{\mu_2}{2}\int_\Omega\frac{\partial}{\partial t}(\nabla w:\nabla w)dx+$$
$$+\mu_1\int_\Omega\nabla w:\nabla wdx+\int_\Omega\int_0^t h(s,t)\nabla w(s)ds:\nabla w(t)dx-$$
$$-\int_\Omega v_jw_i\frac{\partial w_j}{\partial x_i}dx=0$$

для почти всех $t\in(0,t_0)$. Проинтегрируем это равенство по отрезку $[0,t]$ ($t\in[0,t_0]$) и перенесем три последних члена в правую часть:

$$\frac12\int_\Omega w^2(t)dx+\frac{\mu_2}{2}\int_\Omega\nabla w(t):\nabla w(t)dx=$$
$$=\int_0^t\int_\Omega v_jw_i\frac{\partial w_j}{\partial x_i}dxds-\int_0^t\int_\Omega\int_0^s h(\tau,s)\nabla w(\tau)d\tau:\nabla w(s)dxds-$$
$$-\mu_1\int_0^t\int_\Omega\nabla w(s):\nabla w(s)dxds.$$

Здесь использовано то, что $w(x,0)=$ $=u(x,0)-v(x,0)=0$ и, следовательно, $\nabla w(x,0)=$ $=\nabla u(x,0)-\nabla v(x,0)=a(x)-a(x)=0$. Перепишем это равенство в виде:

$$\frac12\|w(t)\|_H^2+\frac{\mu_2}{2}\|w(t)\|_V^2=$$
$$=\int_0^t\int_\Omega v_j(x,s)w_i(x,s)\frac{\partial w_j}{\partial x_i}(x,s)dxds-$$
$$-\int_0^t\int_\Omega\int_0^s h(\tau,s)\nabla w(\tau)d\tau:\nabla w(s)dxds-\mu_1\int_0^t\|w(s)\|_V^2\,ds. \tag{5.2}$$

Оценим правую часть (5.2) по модулю. С помощью неравенства Гёльдера, непрерывного вложения V в $L_4(\Omega)^n$ и априорной оценки для функции v нелинейный член можно оценить следующим образом:

$$\left|\int_0^t\int_\Omega v_j(x,s)w_i(x,s)\frac{\partial w_j}{\partial x_i}(x,s)dxds\right|\le$$
$$\le\int_0^t\left|\int_\Omega v_j(x,s)w_i(x,s)\frac{\partial w_j}{\partial x_i}(x,s)\,dx\right|ds\le$$
$$\le\int_0^t\|v_j(s)w_i(s)\|_{L_2(\Omega)}\left\|\frac{\partial w_j}{\partial x_i}(s)\right\|_{L_2(\Omega)}ds\le$$
$$\le\int_0^t\|v_j(s)\|_{L_4(\Omega)}\|w_i(s)\|_{L_4(\Omega)}\left\|\frac{\partial w_j}{\partial x_i}(s)\right\|_{L_2(\Omega)}ds\le$$
$$\le C\int_0^t\|v_j(s)\|_V\|w_i(s)\|_{L_4(\Omega)}\left\|\frac{\partial w_j}{\partial x_i}(s)\right\|_{L_2(\Omega)}ds\le$$

$$\le Cn^2 \int_0^t \|v(s)\|_V \, \|w(s)\|_{L_4(\Omega)^n} \left\|\frac{\partial w}{\partial x}(s)\right\|_{L_2(\Omega)^{n^2}} ds \le$$

$$\le n^2 C C_2 C_8 \int_0^t \left\|\frac{\partial w}{\partial x}(s)\right\|^2_{L_2(\Omega)^{n^2}} ds = C_9 \int_0^t \|w(s)\|_V^2 \, ds.$$

Здесь C_8 — константа из априорной оценки (3.6).

Второе слагаемое из правой части (5.2) при помощи неравенств Гёльдера и Шварца оценим так:

$$\left| \int_0^t \int_\Omega \int_0^s h(\tau, s) \nabla w(\tau) \, d\tau : \nabla w(s) \, dx \, ds \right| =$$

$$= \left| \int_0^t \int_\Omega \nabla \left(\int_0^s h(\tau, s) w(\tau) \, d\tau \right) : \nabla w(s) \, dx \, ds \right| \le$$

$$\le \int_0^t \left| \int_\Omega \nabla \left(\int_0^s h(\tau, s) w(\tau) \, d\tau \right) : \nabla w(s) \, dx \right| ds \le$$

$$\le \int_0^t \left\| \int_0^s h(\tau, s) w(\tau) \, d\tau \right\|_V \|w(s)\|_V \, ds \le$$

$$\le \int_0^t \int_0^s \|h(\tau, s) w(\tau)\|_V \, d\tau \, \|w(s)\|_V \, ds \le$$

$$\le \|h\|_{L_\infty((0,T)\times(0,T))} \int_0^t \int_0^s \|w(\tau)\|_V \, d\tau \, \|w(s)\|_V \, ds =$$

$$= \|h\|_{L_\infty((0,T)\times(0,T))} \int_0^t \int_0^s \|w(\tau)\|_V \, d\tau \, \frac{\partial}{\partial s} \left(\int_0^s \|w(\tau)\|_V \, d\tau \right) ds =$$

$$= \frac{\|h\|_{L_\infty((0,T)\times(0,T))}}{2} \left(\int_0^s \|w(\tau)\|_V \, d\tau \right)^2 \Bigg|_0^t =$$

$$= \|h\|_{L_\infty((0,T)\times(0,T))} \, 2 \left(\int_0^t \|w(\tau)\|_V \, d\tau \right)^2 \le$$

$$\le \frac{\|h\|_{L_\infty((0,T)\times(0,T))}}{2} \left(\left(\int_0^t 1 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \|w(\tau)\|_V^2 \, d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2 =$$

$$= \frac{t \, \|h\|_{L_\infty((0,T)\times(0,T))}}{2} \int_0^t \|w(\tau)\|_V^2 \, d\tau \le$$

$$\le \frac{T \, \|h\|_{L_\infty((0,T)\times(0,T))}}{2} \int_0^t \|w(s)\|_V^2 \, ds.$$

Поскольку в левой части (5.2) каждое слагаемое неотрицательно, то ее можно оценить снизу:

$$\frac{\mu_2}{2} \|w(t)\|_V^2 \le \frac{1}{2} \|w(t)\|_H^2 + \frac{\mu_2}{2} \|w(t)\|_V^2 .$$

Из оценок на левую и правую часть равенства (5.2) мы получаем следующее неравенство:

$$\frac{\mu_2}{2} \|w(t)\|_V^2 \le$$

$$\le \left(C_9 + |\mu_1| + \frac{T \, \|h\|_{L_\infty((0,T)\times(0,T))}}{2} \right) \int_0^t \|w(s)\|_V^2 \, ds,$$

которое имеет место при всех $t \in [0, t_0]$. Воспользовавшись неравенством Гронуолла-Беллмана [2, с. 191—192], получим, что $\|w(t)\|_V \equiv 0$, а следовательно, $u \equiv v$. Получили противоречие.

На втором шаге доказательства покажем единственность слабого решения задачи (0.3)—(0.6) на отрезке $[0, 2t_0]$.

Пусть v — единственное слабое решение задачи (0.3)—(0.6) на отрезке $[0, t_0]$. На втором шаге доказательства существования решения (теорема 4.1) задачу о поиске слабых решений (0.3)—(0.6) на отрезке $[t_0, T]$ привели к задаче того же типа, что и задача, которая решалась на первом шаге (в правой части уравнения добавились слагаемые, но они нам известны по первому шагу) на отрезке $[0, T_1]$ (здесь $T_1 = T - t_0$) с начальным условием $v(0) = a_1$.

По первому шагу доказательства, она имеет единственное решение на отрезке $[0, t_0]$. Таким образом, мы получили единственное слабое решение задачи (0.3)—(0.6) на отрезке $[0, 2t_0]$.

Повторяем процедуру, описанную на втором шаге. Поскольку каждый раз отрезок, на котором доказывается единственность, увеличивается по отношению к предыдущему на t_0, то за конечное число шагов мы докажем единственность слабого решения задачи (0.3)—(0.6) на отрезке $[0, T]$. □

6. О КЛАССАХ СЛАБЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ (0.5)—(0.8) В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ДАННЫХ ЗАДАЧИ

Теорема 6.1 *Если* $f \in L_p(0, T; V^*)$, *где* $1 \le p < \infty$, *то слабое решение задачи (0.3)—(0.6) принадлежит пространству* $W_p = \{v : v \in C([0,T], V),\ v' \in L_p(0, T; V)\}$.

Доказательство: Пусть $v \in W$ — слабое решение задачи (0.3)—(0.6). Тогда для него имеет место равенство:

$$(\mu_2 A + I) v' + \mu_1 A v + N_1(v) - B(v) = f.$$

Или, что то же самое,

$$(\mu_2 A + I)v' = -\mu_1 A v - N_1(v) + B(v) + f. \quad (6.1)$$

В силу леммы 2.7*(d)*, имеем, что $B(v) \in C([0,T], V^*)$; в силу леммы 2.1*(c)* имеем, что $\mu_1 A v \in C([0,T], V^*)$; в силу леммы 2.4*(a)*, получаем, что $N_1(v) \in L_p(0,T;V^*)$. Поскольку $f \in L_p(0,T;V^*)$, получаем, что правая часть равенства (6.1) лежит в $L_p(0,T;V^*)$. Применяя $(\mu_2 A + I)^{-1}$ к (6.1), получим:

$$v' = (\mu_2 A + I)^{-1} \left(-\mu_1 A v - N_1(v) + B(v) + f\right).$$

Таким образом получили, что $v' \in L_p(0,T;V)$. Следовательно, $v \in W_p$. □

Теорема 6.2. *Если* $h \in C^k([0,T]\times[0,T])$, $f \in C^k([0,T], V^*)$, *где* $k = 0,1,2,\ldots$, *то слабое решение задачи (0.3)—(0.6) принадлежит пространству* $C^{k+1}([0,T], V)$.

Доказательство: Пусть $v \in W$ — слабое решение задачи (0.3)—(0.6). Тогда для него имеет место равенство:

$$(\mu_2 A + I)v' + \mu_1 A v + N_1(v) - B(v) = f.$$

Его можно переписать в следующем виде

$$(\mu_2 A + I)v' = -\mu_1 A v - N_1(v) + B(v) + f. \quad (6.2)$$

Доказывать будем индукцией по k.

$$k = 0.$$

По лемме 2.7*(d)* мы имеем, что $B(v) \in C([0,T], V^*)$; в силу леммы 2.1*(c)*, получим, что $\mu_1 A v \in C([0,T], V^*)$; воспользовавшись леммой 2.4*(b)*, получаем, что $N_1(v) \in C([0,T], V^*)$. Так как $f \in C([0,T], V^*)$, получим, что правая часть равенства (6.2) лежит в $C([0,T], V^*)$. Применяя теперь к (6.2) оператор $(\mu_2 A + I)^{-1}$, получим:

$$v' = (\mu_2 A + I)^{-1} \left(-\mu_1 A v - N_1(v) + B(v) + f\right). \quad (6.3)$$

Из последнего равенства, в силу леммы 2.2*(c)*, следует, что $v' \in C([0,T], V)$. Таким образом получили, что $v \in C^1([0,T], V)$. То есть при $k = 0$ утверждение верно.

Пусть утверждение верно при $k = m - 1$. Докажем его при $k = m$.

Так как в силу предположения $v \in C^m([0,T], V)$, то по лемме 2.7*(d)* мы получим, что $B(v) \in C^m([0,T], V^*)$; в силу леммы 2.1*(c)*, имеем, что $\mu_1 A v \in C^m([0,T], V^*)$; из леммы 2.4*(b)* следует, что $N_1(v) \in C^m([0,T], V^*)$. Так как $f \in C^m([0,T], V^*)$, получим, что правая часть равенства (6.2) лежит в $C^m([0,T], V^*)$. Применяя теперь к (6.2) оператор $(\mu_2 A + I)^{-1}$, получим равенство (6.3), у которого правая часть лежит в $C^m([0,T], V)$. Следовательно, $v' \in C^m([0,T], V)$. Таким образом получили, что $v \in C^{m+1}([0,T], V)$.

Таким образом, методом математической индукции требуемое утверждение доказано. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Виноградов Г.В., Малкин А.Я.* Реология полимеров. — М.: Химия, 1977.

2. *Гаевский Х., Грёгер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1978.

3. *Dmitrienko V.T., Zvyagin V.G.* Topological Degree Method in the Equations of the Navier-Stokes Type // Abstract and Applied Analysis, 1997. — V. 1, 2. — P. 1—45.

4. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. — М.: 1980.

5. *Звягин В.Г., Дмитриенко В.Т.* Гомотопическая классификация одного класса непрерывных отображений // Матем. заметки, 1982. — Т. 31. — № 5. — С. 801—812.

6. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1989.

7. *Ладыженская О.А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. — М.: Наука, 1970.

8. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1987.

9. *Осколков А.П.* К теории нестационарных течений жидкостей Кельвина−Фойгта. // Записки научных семинаров ЛОМИ, 1982. — Т. 115., С. 191—202.

10. *Осколков А.П.* О единственности и разрешимости в целом краевых задач для уравнений движения водных растворов полимеров // Записки научных семинаров ЛОМИ, 1973. — Т. 38. Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. 7. — С. 98—136.

11. *Темам Р.* Уравнения Навье−Стокса. Теория и численный анализ. — М.: Мир, 1987.