

УДК 539.374+532.542

## ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ КЛАССИЧЕСКИХ ОДНОМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕСТАЦИОНАРНОГО ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ТРУБОПРОВОДАХ

© 2004 П. П. Сумец

*Воронежский государственный университет*

Приводится качественная оценка погрешности одномерных уравнений в частных производных, описывающих двумерное осесимметричное нестационарное течение сжимаемой жидкости в упругосжимаемых трубопроводах переменного сечения. В качестве метода редукции двумерной задачи к одномерной используется осреднение по площади поперечного сечения трубопровода. Оценивается характер дополнительных слагаемых, возникающих за счет изменения площади поперечного сечения трубопровода. Определяется характер расширения трубопровода при различных приближениях.

Распространение волн гидроудара является сложным гидродинамическим процессом. При возникновении больших градиентов давления при нестационарном движении жидкости в результате сжатия жидкости и расширения стенок трубопровода возникает волна изменения давления и скорости жидкости, которая распространяется по системе «трубопровод с жидкостью». Описать нестационарный режим движения жидкости в трубопроводах позволяет одномерная модель нестационарного движения сжимаемой жидкости в упругосжимаемых трубопроводах, которая приведена в [4]. При некоторых допущениях нестационарное течение жидкости в трубе описывается системой уравнений в частных производных [4]

$$-f \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\lambda}{2D} M |w|, \quad -f \frac{\partial p}{\partial t} = c^2 \frac{\partial M}{\partial x}. \quad (1)$$

Здесь  $x$  — ось координат, совпадающая с осью трубопровода;  $M = fw\rho$  — массовый расход жидкости через трубу в сечении;  $f(x)$  — площадь поперечного сечения трубопровода;  $\rho(x, t)$  — плотность жидкости;  $w(x, t)$  — средняя по сечению скорость течения жидкости;  $p(x, t)$  — давление;  $c$  — скорость распространения возмущений в системе: текущая сжимаемая жидкость в трубе с упругими стенками;  $D(x)$  — диаметр трубопровода;  $\lambda(x, w)$  — коэффициент гидравлического сопротивления, который зависит от режима течения жидкости. Система уравнений (1) имеет гипер-

болический тип, то есть допускает решение волнового типа  $g(x, t)F(x + ct)$ , и является квазилинейной вследствие нелинейности правой части. Общая теория решения таких уравнений хорошо развита при решении задач методами характеристик [1].

При построении математической модели (1) распространения волн в трубопроводах использовались следующие основные гипотезы: 1) предположение об одномерности течения, 2) предположение о движении жидкости в трубах с осредненной по сечению скоростью, 3) скорость течения жидкости является дозвуковой; 4) предположение о большой длине трубопровода. Проведем исследования, приводящие к количественной оценке сделанных предположений. Совместное движение жидкости в трубопроводе и стенок трубопровода описываются уравнениями Навье–Стокса [2], неразрывности и движения стенки в цилиндрических координатах, которые связаны друг с другом совместными граничными условиями. Сформулируем совместные уравнения движения в безразмерном виде [3]. Для уравнений Навье–Стокса введем следующие безразмерные переменные (индекс «1» означает безразмерность)

$$\begin{aligned} x &= Lx_1; r = Rr_1; t = \frac{L}{C_0} t_1; v_x = v^* v_{x_1}; \\ v_r &= v^* \frac{R^2}{L^2} v_{r_1}; p = \frac{L\bar{\mu}v^*}{R^2} p_1; \rho = \frac{L\bar{\mu}v^*}{R^2 C_0^2} \rho_1, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $L$  и  $R$  — характерные длина и радиус трубы,  $\bar{\mu}$  — коэффициент вязкости,  $C_0$  — скорость звука в жидкости,  $v_r, v_x$  — радиальная и осевая компоненты скорости,  $v^*$  — характерная осевая скорость,  $t$  — время. В приведенных выражениях для безразмерных величин характерная скорость  $vr^*$  поперечного движения определена через характерную скорость продольного движения  $v^*$  из предположения, что характерное время  $T_R^*$  установления поперечного движения определяется как  $T_R^* = T_L^*(L/R)$ . Тогда  $v_x^* = v^* = L/T_L^*$ ;  $v_r^* = L/T_L^*$  и, следовательно,  $v_r = v^*(R/L)^2$ . Пусть  $u^*$  — характерное радиальное смещение стенки трубы,  $h$  — толщина стенки трубы. Введем следующие безразмерные переменные для уравнений движения материала стенки трубы:

$$\begin{aligned} u_r &= u^* u_{r_1}; u_x = u^* \frac{h}{R} u_{x_1}; x = Lx_1; \\ r &= Rr_1; t = \frac{L}{a} t_1, a = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho_w}}, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $u_r, u_x$  — радиальное и осевое смещение стенки трубы,  $\lambda, \mu$  — параметры Ламе,  $\rho_w$  — плотность материала стенки трубы.

Согласно (2), (3) система дифференциальных уравнений Навье–Стокса, уравнение неразрывности и движения стенки приводится к следующему безразмерному виду:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{aligned} \delta^3 \rho_1 \left( \alpha \frac{\partial v_{r1}}{\partial t_1} + \alpha^2 v_{x_1} \frac{\partial v_{r_1}}{\partial x_1} + \alpha^2 \delta v_{r_1} \frac{\partial v_{r_1}}{\partial r_1} \right) = \\ = -\frac{\partial p_1}{\partial r_1} + \frac{\delta^2}{3} \left( \frac{\delta}{r_1} \frac{\partial^2}{\partial r_1^2} (r_1 v_{r_1}) + \frac{\partial^2 v_{x_1}}{\partial r_1 \partial x_1} \right) + \\ + \delta^3 \left( \frac{\partial^2 v_{r_1}}{\partial r_1^2} + \frac{1}{r_1} \frac{\partial v_{r1}}{\partial r_1} - \frac{v_{r_1}}{r_1^2} + \delta^2 \frac{\partial^2 v_{r_1}}{\partial x_1^2} \right), \end{aligned} \right. \quad (4) \\ \left\{ \begin{aligned} \rho_1 \left( \alpha \frac{\partial v_{x_1}}{\partial t_1} + \alpha^2 v_{x_1} \frac{\partial v_{x_1}}{\partial x_1} + \alpha^2 \delta v_{r_1} \frac{\partial v_{x_1}}{\partial r_1} \right) = \\ = -\frac{\partial p_1}{\partial x_1} + \frac{\delta^2}{3} \left( \frac{\delta}{r_1} \frac{\partial^2}{\partial r_1 \partial x_1} (r_1 v_{r_1}) + \frac{\partial^2 v_{x_1}}{\partial x_1^2} \right) + \\ + \left( \frac{\partial^2 v_{x_1}}{\partial r_1^2} + \frac{1}{r_1} \frac{\partial v_{x_1}}{\partial r_1} + \delta^2 \frac{\partial^2 v_{x_1}}{\partial x_1^2} \right); \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t_1} + \frac{\alpha \delta}{r_1} \frac{\partial}{\partial r_1} (\rho_1 r_1 v_{r_1}) + \alpha \frac{\partial}{\partial x_1} (\rho_1 v_{x_1}) = 0; \quad (5)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \delta \gamma \left( 1 - \frac{b^2}{a^2} \right) \frac{\partial^2 u_{x_1}}{\partial r_1 \partial x_1} + \frac{\partial^2 u_{r_1}}{\partial r_1^2} + \frac{1}{r_1} \frac{\partial u_{r_1}}{\partial r_1} - \\ - \frac{u_{r_1}}{r_1^2} + \delta^2 \frac{b^2}{a^2} \frac{\partial^2 u_{r_1}}{\partial x_1^2} = \delta^2 \frac{\partial^2 u_{r_1}}{\partial t_1^2}, \\ \delta \left( 1 - \frac{b^2}{a^2} \right) \left( \frac{1}{r_1} \frac{\partial u_{r_1}}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 u_{r_1}}{\partial r_1 \partial x_1} \right) + \gamma \delta^2 \frac{\partial^2 u_{x_1}}{\partial x_1^2} + \\ + \gamma \frac{b^2}{a^2} \left( \frac{1}{r_1} \frac{\partial u_{x_1}}{\partial r_1} + \frac{\partial^2 u_{x_1}}{\partial r_1^2} \right) = \gamma \delta^2 \frac{\partial^2 u_{x_1}}{\partial t_1^2}, \end{aligned} \right. \quad (6)$$

где  $\alpha = v^*/C_0$ ,  $\delta = R/L$ , а индекс «1» указывает на безразмерность.

Граничные условия, в которых напряжения выражены через перемещения, в безразмерном виде запишутся так:

$$\begin{aligned} \text{при } r_1 = 1^* + \varepsilon u_{r_1} \Big|_{r=1^*} \\ \left\{ \begin{aligned} \frac{\lambda}{\mu} \left( \gamma \delta \frac{\partial u_{x_1}}{\partial x_1} + \frac{\partial u_{r_1}}{\partial r_1} + \frac{u_{r_1}}{r_1} \right) + 2 \frac{\partial u_{r_1}}{\partial r_1} = \\ = B \left( -p_1 - \frac{2}{3} \left( \frac{\delta^3}{r_1} \frac{\partial}{\partial r_1} (r_1 v_{r_1}) + \delta^2 \frac{\partial v_{x_1}}{\partial x_1} \right) + 2\delta^4 \frac{\partial v_{r_1}}{\partial r_1} \right), \\ \gamma \frac{\partial u_{x_1}}{\partial r_1} + \delta \frac{\partial u_{r_1}}{\partial x_1} = B \delta \left( \frac{\partial v_{x_1}}{\partial r_1} + \delta^3 \frac{\partial v_{r_1}}{\partial x_1} \right); \\ \alpha \delta v_{r_1} = \varepsilon \frac{\partial u_{r_1}}{\partial t_1}, \\ \alpha v_{x_1} = \delta \gamma \varepsilon \frac{\partial u_{x_1}}{\partial t_1}; \end{aligned} \right. \quad (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{при } r_1 = 1^* + \gamma + \varepsilon u_{r_1} \Big|_{r=1^* + \gamma} \\ \left\{ \begin{aligned} \frac{\lambda}{\mu} \left( \gamma \delta \frac{\partial u_{x_1}}{\partial x_1} + \frac{\partial u_{r_1}}{\partial r_1} + \frac{u_{r_1}}{r_1} \right) + 2 \frac{\partial u_{r_1}}{\partial r_1} = 0, \\ \gamma \frac{\partial u_{x_1}}{\partial r_1} + \delta \frac{\partial u_{r_1}}{\partial x_1} = 0. \end{aligned} \right. \quad (8) \end{aligned}$$

Здесь  $B = \frac{\bar{\mu} v^* L}{\mu u^* R}$ ,  $1^* = \frac{R_0(x,t)}{R}$ ,  $\varepsilon = u^*/R$ . Величина  $B$  имеет порядок единицы. Уравнения (4)–(8) содержат набор величин  $\alpha, \delta, \gamma, \varepsilon$ . В рассматриваемой нами задаче значения этих величин малы по сравнению с единицей.

Совместное движение жидкости в трубопроводе и стенок трубопровода описывается уравнениями в частных производных (4)–(8), которые связаны друг с другом толь-

ко совместными граничными условиями. С точки зрения систем уравнений в частных производных, рассматриваемые уравнения с граничными условиями являются существенно нелинейными, поэтому аналитическое решение поставленной задачи построить не представляется возможным. Преследуя цель построения приближенного аналитического решения, воспользуемся свойством малости некоторых параметров, входящих в систему, и применим аппарат теории малого параметра.

Примем во внимание малость лишь  $\alpha, \varepsilon$  и  $\delta$ . Поскольку деформации считаются малыми, то ограничимся в полученных выше уравнениях членами, имеющими порядок малости не выше  $\varepsilon$ . Будем рассматривать движение жидкости с дозвуковой скоростью и ограничимся членами порядка  $\alpha^0, \alpha^1$ .

С учетом того, что для некоторой функции  $F(r)$  имеет место ее разложение в ряд Тейлора

$$F(1^* + \varepsilon(u_r)_{r=1^*}) = F(1^*) + \varepsilon \left( \frac{\partial F}{\partial r} u_r \right)_{r=1^*} + O(\varepsilon^2),$$

и принимая во внимание учет лишь членов порядка малости  $\varepsilon$ , граничные условия для компонент скорости можно записать в виде

$$\begin{cases} \alpha \delta v_{r_1} = \varepsilon \frac{\partial u_{r_1}}{\partial t_1}, & \text{при } r_1 = 1^*. \\ \alpha v_{x_1} = 0, \end{cases} \quad (9)$$

Таким образом, если деформация стенки мала, то можно считать  $V_{r=R+u_r} = V_{r=R}$ . Из уравнения неразрывности (5) следует, что

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t_1} = -\alpha \frac{\partial}{\partial x_1} (\rho_1 v_{x_1}) - \frac{\alpha \delta}{r_1} \frac{\partial}{\partial r_1} (\rho_1 r_1 v_{r_1}),$$

следовательно, в принятых выше предположениях верно равенство

$$\begin{aligned} \alpha \rho_1 \frac{\partial v_{x_1}}{\partial t_1} &= \alpha \frac{\partial}{\partial t_1} (\rho_1 v_{x_1}) + \\ &+ \alpha^2 v_{x_1} \left( \frac{\alpha}{r_1} \frac{\partial}{\partial r_1} (\rho_1 r_1 v_{r_1}) + \frac{\partial}{\partial x_1} (\rho_1 v_{x_1}) \right) = \alpha \frac{\partial}{\partial t_1} (\rho_1 v_{x_1}), \end{aligned}$$

и уравнения движения (4), неразрывности (5) и граничное условие (7) можно записать так:

$$\begin{cases} \delta^3 \alpha \frac{\partial}{\partial t_1} (\rho_1 v_{r_1}) = -\frac{\partial p_1}{\partial r_1} + \frac{\delta^2}{3} \left( \frac{\delta}{r_1} \frac{\partial^2}{\partial r_1^2} (r_1 v_{r_1}) + \frac{\partial^2 v_{x_1}}{\partial r_1 \partial x_1} \right) + \\ + \delta^3 \left( \frac{\partial^2 v_{r_1}}{\partial r_1^2} + \frac{1}{r_1} \frac{\partial v_{r_1}}{\partial r_1} - \frac{v_{r_1}}{r_1^2} + \delta^2 \frac{\partial^2 v_{r_1}}{\partial x_1^2} \right), \\ \alpha \frac{\partial}{\partial t_1} (\rho_1 v_{x_1}) = -\frac{\partial p_1}{\partial x_1} + \frac{\delta^2}{3} \left( \frac{\delta}{r_1} \frac{\partial^2}{\partial r_1 \partial x_1} (r_1 v_{r_1}) + \frac{\partial^2 v_{x_1}}{\partial x_1^2} \right) + \\ + \frac{\partial^2 v_{x_1}}{\partial r_1^2} + \frac{1}{r_1} \frac{\partial v_{x_1}}{\partial r_1} + \delta^2 \frac{\partial^2 v_{x_1}}{\partial x_1^2}; \end{cases} \quad (10)$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t_1} + \frac{\alpha \delta}{r_1} \frac{\partial}{\partial r_1} (\rho_1 r_1 v_{r_1}) + \alpha \frac{\partial}{\partial x_1} (\rho_1 v_{x_1}) = 0; \quad (11)$$

$$\begin{cases} \alpha \delta v_{r_1} = \varepsilon \frac{\partial u_{r_1}}{\partial t_1}, & \text{при } r_1 = 1^* + \varepsilon u_{r_1} \Big|_{r=1^*}. \\ \alpha v_{x_1} = 0, \end{cases} \quad (12)$$

Проведем осреднение уравнения неразрывности по площади поперечного сечения трубопровода, для чего проинтегрируем уравнение неразрывности (11) от 0 до  $r_1 = 1^* + \varepsilon u_{r_1} \Big|_{r=1^*}$ :

$$\begin{aligned} & \int_0^{1^* + \varepsilon u_{r_1} \Big|_{r=1^*}} \frac{\partial \rho_1}{\partial t_1} r_1 dr_1 + \alpha \delta (\rho_1 r_1 v_{r_1})_{r_1=1^* + \varepsilon u_{r_1} \Big|_{r=1^*}} + \\ & + \alpha \int_0^{1^* + \varepsilon u_{r_1} \Big|_{r=1^*}} \frac{\partial}{\partial x_1} (\rho_1 v_{x_1}) r_1 dr_1 = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

По правилу дифференцирования сложной функции

$$F(y, g, q) = \int_g^q f(x, y) dx, \quad g = \varphi(y), \quad q = \psi(y),$$

являющейся интегралом, зависящим от параметра, имеем

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dy} &= \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial g} \frac{dg}{dy} + \frac{\partial F}{\partial q} \frac{dq}{dy} = \\ &= \int_g^q \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx + f(q, y) \frac{dq}{dy} - f(g, y) \frac{dg}{dy}, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy} \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx &= \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx + \\ &+ f(\psi(y), y) \frac{d\psi(y)}{dy} - f(\varphi(y), y) \frac{d\varphi(y)}{dy}. \end{aligned} \quad (14)$$

В нашем случае в качестве параметров в интегралах выступают  $t$  и  $x$ , следовательно, (13) можно записать в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t_1} \int_0^{1^* + \varepsilon u_{r_1}|_{r=1^*}} \rho_1 r_1 dr_1 - \frac{\partial (1^* + \varepsilon u_{r_1}|_{r=1^*})}{\partial t_1} (\rho_1 r_1)_{r_1=1^* + \varepsilon u_{r_1}|_{r=1^*}} + \\ & + \alpha \delta (\rho_1 r_1 v_{r_1})_{r_1=1^* + \varepsilon u_{r_1}|_{r=1^*}} + \alpha \frac{\partial}{\partial x_1} \int_0^{1^* + \varepsilon u_{r_1}|_{r=1^*}} \rho_1 v_{x_1} r_1 dr_1 - \\ & - \alpha \frac{\partial (1^* + \varepsilon u_{r_1}|_{r=1^*})}{\partial x_1} (\rho_1 v_{x_1} r_1)_{r_1=1^* + \varepsilon u_{r_1}|_{r=1^*}} = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Поскольку  $\frac{\partial (1^* + \varepsilon u_{r_1}|_{r=1^*})}{\partial t} = \frac{\partial 1^*}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial u_{r_1}|_{r=1^*}}{\partial t}$ , а из граничных условий следует, что  $\alpha \delta v_{r_1} = \varepsilon \frac{\partial u_{r_1}}{\partial t_1}$ ;  $V_{x_1} = 0$  при  $r_1 = 1^* + \varepsilon u_{r_1}|_{r=1^*}$ , то уравнение неразрывности (15) можно записать так:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t_1} \int_0^{1^* + \varepsilon u_{r_1}|_{r=1^*}} \rho_1 r_1 dr_1 - \frac{\partial 1^*}{\partial t_1} (\rho_1 r_1)_{r_1=1^* + \varepsilon u_{r_1}|_{r=1^*}} + \\ & + \alpha \frac{\partial}{\partial x_1} \int_0^{1^* + \varepsilon u_{r_1}|_{r=1^*}} \rho_1 v_{x_1} r_1 dr_1 = 0, \end{aligned} \tag{16}$$

или в размерном виде:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{R(x,t)} \rho r dr + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{R(x,t)} \rho v_x r dr - \\ & - \frac{\partial R_0(x,t)}{\partial t} (\rho r)_{r=R(x,t)} = 0. \end{aligned} \tag{17}$$

При дальнейшем рассмотрении уравнений движения жидкости и стенки трубы рассмотрим разложение в ряд по малому параметру  $\delta$ . Тогда, с учетом сказанного, для нулевого приближения по параметру  $\delta$  получим следующие уравнения движения стенки трубопровода и граничные условия:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_{r_1}}{\partial r_1^2} + \frac{1}{r_1} \frac{\partial u_{r_1}}{\partial r_1} - \frac{u_{r_1}}{r_1^2} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial r_1} \left( r_1 \frac{\partial u_{x_1}}{\partial r_1} \right) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left( \frac{\lambda}{\mu} \left( \frac{\partial u_{r_1}}{\partial r_1} + \frac{u_{r_1}}{r_1} \right) + 2 \frac{\partial u_{r_1}}{\partial r_1} \right)_{r_1=1^* + \varepsilon u_{r_1}|_{r=1^*}} = \\ = - (B p_1)_{r_1=1^* + \varepsilon u_{r_1}|_{r=1^*}}, \\ \left( \frac{\partial u_{x_1}}{\partial r_1} \right)_{r_1=1^* + \varepsilon u_{r_1}|_{r=1^*}} = 0. \end{cases} \tag{18}$$

Из уравнений движения материала стенки трубопровода (18) и из граничных условий следует гипотеза плоских сечений деформирования стенки трубы. Действительно, из (18) следует, что для радиальных смещений имеем  $u_{r_1} = A(x,t)/r_1 + B(x,t)r_1$ , где  $A(x,t)$  и  $B(x,t)$  определяются из граничных условий. Для продольных перемещений  $u_{x_1}$  материала стенки трубы решение представимо в виде  $u_{x_1} = C_1(x,t) + C_2(x,t) \ln(r)$ . Из граничных условий (18) следует, что  $C_2 = 0$  и изменений с координатой  $r$  продольных перемещений не происходит. Если внешних усилий растяжения или сжатия трубопровода не происходит, то  $C_1 = 0$  и  $u_{x_1} = 0$ . То есть в рассматриваемом приближении в осевом направлении стенка трубы либо покоится, либо перемещается как жесткое целое. Полученные выводы позволяют использовать гипотезу плоских сечений при рассмотрении движения стенки трубопровода.

Рассмотрим теперь уравнение движения жидкости (10). В нулевом приближении по  $\delta$  имеем

$$\begin{cases} \frac{\partial p_1}{\partial r_1} = 0, \\ \alpha \frac{\partial}{\partial t_1} (\rho_1 v_{x_1}) = - \frac{\partial p_1}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 v_{x_1}}{\partial r_1^2} + \frac{1}{r_1} \frac{\partial v_{x_1}}{\partial r_1}; \end{cases} \tag{19}$$

$$(v_{x_1})_{r_1=1^* + \varepsilon u_{r_1}|_{r=1^*}} = 0.$$

Для наглядности приведем уравнение (19) к размерному виду и проинтегрируем получившееся уравнение от 0 до  $R(x,t)$ :

$$\begin{aligned} & \int_0^{R(x,t)} \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_x) r dr = \\ & = - \int_0^{R(x,t)} \frac{\partial p}{\partial x} r dr + \bar{\mu} \left( r \frac{\partial v_x}{\partial r} \right)_{r=R(x,t)}. \end{aligned} \tag{20}$$

С учетом соотношения (14), имея в виду, что  $(v_x)_{r=R(x,t)} = 0$ , из (20) получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{R(x,t)} (\rho v_x) r dr = -\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{R(x,t)} p r dr + \frac{\partial R(x,t)}{\partial x} (p r)_{r=R(x,t)} + \bar{\mu} \left( r \frac{\partial v_x}{\partial r} \right)_{r=R(x,t)}. \quad (21)$$

Проведем осреднение продольного движения жидкости по площади поперечного сечения трубопровода. Пусть  $f = \pi R^2$  — площадь поперечного сечения трубопровода. Введем в рассмотрение величину

$$w(x,t) = \frac{1}{f} \int_f v_x(r,x,t) df,$$

являющуюся средней в сечении  $f$  скоростью движения жидкости. Тогда уравнения неразрывности (17) и движения (21) примут вид

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} M = -f \frac{\partial p}{\partial x} - \tau \chi, \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho f) + \frac{\partial}{\partial x} M - \rho \frac{\partial f_0}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad (22)$$

где  $\tau = -\bar{\mu} \left( \frac{\partial v_x}{\partial r} \right)_{r=R(x,t)}$ .

Здесь  $M = \rho w f$  — массовый расход жидкости через сечение,  $\chi = 2\pi R$  — смоченный периметр, величина  $\tau$  имеет смысл касательного напряжения трения на внутренней поверхности трубопровода и может быть выражена через скоростной напор. Если сечение трубопровода  $R_0(x)$  в невозмущенном состоянии не является функцией времени, то  $\partial f_0 / \partial t = 0$ . Система уравнений (22) представляет собой классическое уравнение движения сжимаемой жидкости в упругосжимаемых трубопроводах переменного сечения [3].

Рассмотрим теперь уравнение движения жидкости (10) с учетом величин порядка  $\delta^1$ . Нетрудно видеть, что уравнение движения жидкости и уравнение неразрывности в первом приближении будут иметь вид (22). Отличие будет иметь место лишь в характере расширения трубопровода. В первом приближении решение для радиальных перемещений имеет вид  $u_r^{(1)} = A(x,t)/r_1 + B(x,t)r_1$ ,

что аналогично решению для радиальных перемещений в нулевом приближении (индекс (1) вверху означает принадлежность решения к первому приближению). Для осевых перемещений стенки трубы общее решение в первом приближении имеет вид  $u_{x_1}^{(1)} = D_1(x,t) + D_2(x,t) \ln(r) + D_3(x,t)r_2$ . В отличие от нулевого приближения, где расширение трубопровода в сечении под действием давления происходит как жесткое тело, в первом приближении имеет место изгиб (см. рис.).

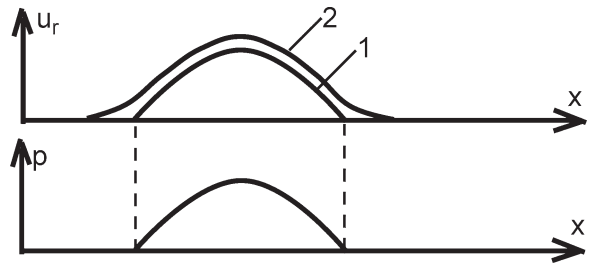


Рис. Общий вид расширения трубопровода под действием давления с учетом: 1) нулевого приближения; 2) первого приближения

Представляет интерес рассмотреть приближение, учитывающее порядок  $\delta^2$ . С учетом второго приближения по параметру  $\delta$  получим следующие уравнения движения жидкости

$$\begin{cases} \frac{\partial p_1}{\partial r_1} = \frac{\delta^2}{3} \left( \frac{\partial^2 v_{x_1}}{\partial r_1 \partial x_1} \right), \\ \alpha \frac{\partial}{\partial t_1} (\rho_1 v_{x_1}) = -\frac{\partial p_1}{\partial x_1} + \frac{\delta^2}{3} \left( \frac{\partial^2 v_{x_1}}{\partial x_1^2} \right) + \frac{\partial^2 v_{x_1}}{\partial r_1^2} + \frac{1}{r_1} \frac{\partial v_{x_1}}{\partial r_1} + \delta^2 \frac{\partial^2 v_{x_1}}{\partial x_1^2}, \end{cases} \quad (23)$$

и граничное условие:

$$(v_{x_1})_{r_1=1^+ + \epsilon u_{r_1}|_{r_1=1^+}} = 0. \quad (24)$$

Будем искать решение для величин  $v_{x_1}$ ,  $p_1$ ,  $\rho_1$  в виде отрезка ряда вида  $v_{x_1} = v_{x_1}^{(0)} + \delta v_{x_1}^{(1)} + \delta^2 v_{x_1}^{(2)}$ , где индекс вверху означает принадлежность величины к соответствующему приближению по параметру  $\delta$ . Тогда уравнения движения (23) можно записать в виде



$$\begin{cases} \frac{\partial p_1}{\partial r_1} = \frac{1}{3} \left( \frac{\partial^2 v_{x_1}^{(0)}}{\partial r_1 \partial x_1} \right), \\ \alpha \frac{\partial}{\partial t_1} (\rho_1 v_{x_1}) = -\frac{\partial p_1}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 v_{x_1}}{\partial r_1^2} + \\ + \frac{1}{r_1} \frac{\partial v_{x_1}}{\partial r_1} + \frac{4}{3} \left( \frac{\partial^2 v_{x_1}^{(0)}}{\partial x_1^2} \right). \end{cases} \quad (25)$$

Проинтегрируем уравнения движения (25) от 0 до  $r_1 = 1^* + \varepsilon u_{r_1}|_{r=1^*}$ . С учетом (14) имеем

$$\begin{cases} 3(p_1)_{r_1=1^*+\varepsilon u_{r_1}|_{r=1^*}} = \left( \frac{\partial v_{x_1}^{(0)}}{\partial x_1} \right)_{r_1=1^*+\varepsilon u_{r_1}|_{r=1^*}}, \\ \alpha \frac{\partial}{\partial t_1} \int_0^{1^*+\varepsilon u_{r_1}|_{r=1^*}} (\rho_1 v_{x_1}) r_1 dr_1 = -\frac{\partial}{\partial x_1} \int_0^{1^*+\varepsilon u_{r_1}|_{r=1^*}} p_1 r_1 dr_1 + \\ + \frac{\partial (1^* + \varepsilon u_{r_1}|_{r=1^*})}{\partial x_1} (p_1 r_1)_{r_1=1^*+\varepsilon u_{r_1}|_{r=1^*}} + \\ + \left( r_1 \frac{\partial v_{x_1}}{\partial r_1} \right)_{r_1=1^*+\varepsilon u_{r_1}|_{r=1^*}} + \frac{4}{3} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \int_0^{1^*+\varepsilon u_{r_1}|_{r=1^*}} v_{x_1}^{(0)} r_1 dr_1 - \\ - \frac{4}{3} \frac{\partial (1^* + \varepsilon u_{r_1}|_{r=1^*})}{\partial x_1} \left( \frac{\partial v_{x_1}^{(0)}}{\partial x_1} r_1 \right)_{r_1=1^*+\varepsilon u_{r_1}|_{r=1^*}}. \end{cases} \quad (26)$$

После подстановки первого уравнения системы (26) во второе уравнение движения жидкости в размерном виде можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{R(x,t)} (\rho v_x) r dr = -\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{R(x,t)} p r dr + \\ + \bar{\mu} \left( r \frac{\partial v_x}{\partial r} \right)_{r=R(x,t)} + \frac{4}{3} \bar{\mu} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^{R(x,t)} v_x^{(0)} r dr - \\ - 3 \frac{\partial R(x,t)}{\partial x} (pr)_{r=R(x,t)}. \end{aligned} \quad (27)$$

Проводя осреднение продольного движения жидкости по площади поперечного сечения трубопровода способом, описанным для нулевого приближения, получаем следующую систему уравнений движения и неразрывности с учетом второго приближения по параметру  $\delta$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} M = -f \frac{\partial p}{\partial x} - \tau \chi - 4p \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{4}{3} \bar{\mu} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (w^{(0)} f), \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho f) + \frac{\partial}{\partial x} M - \rho \frac{\partial f_0}{\partial t} = 0. \end{cases} \quad (28)$$

Сравнение (22) и (28) показывает, что в отличие от нулевого и первого приближения в правой части уравнения движения, учитывающего второе приближение, появились дополнительные члены, которых не было в уравнениях (1). Следовательно, в принятых выше предположениях классические уравнения движения жидкости в трубопроводах переменного сечения имеют погрешность порядка величин  $\alpha^2$  и  $\delta^2$ . Выясним физический смысл появившихся слагаемых. При расширяющемся трубопроводе  $\partial f / \partial x > 0$  и величина  $p \partial f / \partial x$  имеет смысл дополнительного, линейного по  $p$ , сопротивления течению жидкости. Для сужающегося трубопровода при  $\mu = \partial^2 (w^{(0)} f) / \partial x^2 < 0$  добавочный член является дополнительным диссипативным членом за счет неоднородности распределения скорости и может быть определен из нулевого приближения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вerveйко Н.Д. Лучевая теория упруговязкопластических волн и волн гидроудара. — Воронеж: ВГУ, 1997. — 204 с.
2. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. — М.: Госуд. изд-во техн.-теор. лит., 1957. — 784 с.
3. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. — М.: Наука, 1987. — 432 с.
4. Чарный И.А. Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах. — М.: Л.: Госуд. изд-во техн.-теор. лит., 1951. — 223 с.