ВЕСТНИК ВГУ, Серия физика, математика, 2004, № 1

УДК 517.956

О СЛАБОЙ РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛИНЕЙНОЙ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

© 2004 В. В. Смагин, М. В. Тужикова

Воронежский государственный университет

Рассматриваются вопросы слабой разрешимости квазилинейной параболической задачи, заданной в вариационной форме. Полученный результат является обобщением соответствующей теоремы Ж.-Л. Лионса о слабой разрешимости подобной линейной задачи.

При изучении начально-краевых задач параболического типа весьма плодотворной является трактовка таких задач в абстрактной вариационной форме (см. [1]). В настоящей работе приводится обобщение теоремы Лионса о слабой разрешимости линейных вариационных параболических задач на квазилинейные параболические уравнения.

Пусть дана тройка сепарабельных гильбертовых пространств $V \subset H \subset V'$, где пространство V' — двойственное к V, а пространство H отождествляется со своим двойственным H'. Оба вложения являются плотными и непрерывными. Для $t \in [0,T]$, где $T < \infty$, на $u, v \in V$ определено семейство полуторалинейных форм $a(t,u,v)$. Предположим, что для всех $u, v \in V$ функция $t \to a(t,u,v)$ измерима на $[0,T]$ и выполнены оценки:

$$\begin{gathered} |\, a(t,u,v) \,| \leq M_1 \, \|u\|_V \, \|v\|_V \,, \\ \operatorname{Re} a(t,u,u) + \lambda \, \|u\|_H^2 \geq \delta \, \|u\|_V^2 \,, \end{gathered} \tag{1}$$

где $\lambda \geq 0$, $\delta > 0$. Форма $a(t,u,v)$ порождает линейный ограниченный оператор $A(t): V \to V'$ такой, что $a(t,u,v) = (A(t)u, v)$ и $\|A(t)\|_{V \to V'} \leq M_1$. Здесь под выражением типа (z,v) понимается значение функционала $z \in V'$ на элементе $v \in V$. Для $z \in H$ выражение (z,v), в силу отождествления $H \equiv H'$, совпадает со скалярным произведением в H.

Предположим также, что на $[0,T] \times H$ задана функция $f(t,u)$ со значениями в V', такая, что $f(t,u) \in L_2(0,T;V')$ при каждом фиксированном $u \in H$ и для $u_1, u_2 \in H$

$$\|f(t,u_1) - f(t,u_2)\|_{V'} \leq M_2 \, \|u_1 - u_2\|_H \,. \tag{2}$$

Заметим, что для функции $t \to u(t) \in H$, измеримой на $[0,T]$, функция $t \to f[t,u(t)] \in V'$ будет измеримой на $[0,T]$. Кроме того, если $u(t) \in L_2(0,T;H)$, то из оценки, следующей из (2),

$$\|f[t,u(t)]\|_{V'} \leq M_2 \, \|u(t)\|_H + \|f(t,\theta)\|_{V'} \,,$$

в которой θ — нуль в H, получаем $f[t,u(t)] \in L_2(0,T;V')$.

Обратим внимание, что в приложениях условие (2) означает возможность нелинейности $f(t,u)$ содержать производные функции $u \in H$ по пространственным переменным.

В пространстве V' рассмотрим задачу Коши:

$$u'(t) + A(t)u(t) = f[t,u(t)], \;\; u(0) = u^0. \tag{3}$$

Производные функций здесь и далее понимаются в обобщенном смысле.

Теорема. *Пусть для задачи (3) выполнены перечисленные выше условия. Дополнительно предположим, что* $u^0 \in H$ *и вложение* $V \subset H$ *компактно. Тогда задача (3) имеет единственное решение* $u(t)$ *такое, что* $u \in L_2(0,T;V) \cap C([0,T],H)$ *и* $u' \in L_2(0,T;V')$. *При этом удовлетворяется начальное условие и почти всюду на* $[0,T]$ *уравнение (3). Кроме того, справедлива оценка*

$$\begin{gathered} \max_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_H^2 + \int_0^T \left(\|u(t)\|_V^2 + \|u'(t)\|_{V'}^2 \right) dt \leq \\ \leq M \{ \|u^0\|_H^2 + \int_0^T \|f(t,\theta)\|_{V'}^2 \, dt \}. \end{gathered} \tag{4}$$

Доказательство единственности решения. Предположим, что задача (3) имеет два решения $u_1(t)$, $u_2(t)$. Обозначим $u_1(t) - u_2(t) = u(t)$. Тогда почти всюду на $[0,T]$ выполнено

$$\begin{gathered} (u'(t), u(t)) + a(t, u(t), u(t)) = \\ = (f[t,u_1(t)] - f[t,u_2(t)], u(t)). \end{gathered} \tag{5}$$

Возьмем от (5) удвоенную вещественную часть и проведем соответствующие оценки, учитывая (1) и (2). Получим

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|_H^2 + 2\delta\|u(t)\|_V^2 \le$$
$$\le 2\lambda\|u(t)\|_H^2 + 2M_2\|u(t)\|_H\|u(t)\|_V. \tag{6}$$

В (6) оценим последнее слагаемое

$$2M_2\|u(t)\|_H\|u(t)\|_V \le M_2^2\delta^{-1}\|u(t)\|_H^2 + \delta\|u(t)\|_V^2.$$

В результате из (6) следует оценка

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|_H^2 + \delta\|u(t)\|_V^2 \le (2\lambda + M_2^2\delta^{-1})\|u(t)\|_H^2. \tag{7}$$

Так как $u(0) = \theta$, то из (7) получим

$$\|u(t)\|_H^2 + \delta\int_0^t \|u(s)\|_V^2\,ds \le c\int_0^t \|u(s)\|_H^2\,ds. \tag{8}$$

Выделим в (8) интегральное неравенство

$$\|u(t)\|_H^2 \le c\int_0^t \|u(s)\|_H^2\,ds,$$

из которого следует, что $\|u(t)\|_H = 0$, то есть $u_1(t) = u_2(t)$.

Итак, решение задачи (3), если оно существует, единственно.

Приближенные решения и их априорные оценки. Пусть $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ — полная линейно независимая система элементов в пространстве V. Определим подпространство $V_m \subset V$ как линейную оболочку элементов $\{\varphi_i\}_{i=1}^{m}$.

Определим на $[0,T]$ функцию $t \to u_m(t) \in V_m$ как решение задачи

$$(u'_m(t),\varphi_i) + a(t,u_m(t),\varphi_i) = (f[t,u_m(t)],\varphi_i), \tag{9}$$

где $i = 1,2,\dots,m$, а элемент $u_m(0) = P_m u^0$, где P_m — ортопроектор в пространстве H на V_m. Задача (9) сводится к задаче Коши для конечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, удовлетворяющих условию Каратеодори. Тогда задача (9) имеет единственное абсолютно непрерывное решение на некотором отрезке $[0,t_m] \subset [0,T]$ (см. [2]). Из последующих априорных оценок будет следовать, что фактически задачи (9) для всех $m \in N$ разрешимы на $[0,T]$.

Пусть $u_m(t)$ — решение задачи (9). Тогда справедливо тождество

$$(u'_m(t),u_m(t)) + a(t,u_m(t),u_m(t)) =$$
$$= (f[t,u_m(t)],u_m(t)),$$

от которого возьмем удвоенную вещественную часть и проинтегрируем от 0 до t. Проводя соответствующие оценки, получим

$$\|u_m(t)\|_H^2 + 2\delta\int_0^t \|u_m(s)\|_V^2\,ds \le \|P_m u^0\|_H^2 +$$
$$2\lambda\int_0^t \|u_m(s)\|_H^2\,ds + 2\int_0^t \|f[s,u_m(s)]\|_{V'}\|u_m(s)\|_V\,ds. \tag{10}$$

Оцениваем в (10) последнее слагаемое.

$$2\int_0^t \|f[s,u_m(s)]\|_{V'}\|u_m(s)\|_V\,ds \le \delta\int_0^t \|u_m(s)\|_V^2\,ds +$$
$$+\delta^{-1}\int_0^t \|f[s,u_m(s)]\|_{V'}^2\,ds \le \delta\int_0^t \|u_m(s)\|_V^2\,ds +$$
$$+2\delta^{-1}M_2^2\int_0^t \|u_m(s)\|_H^2\,ds + 2\delta^{-1}\int_0^t \|f(s,\theta)\|_{V'}^2\,ds.$$

Отсюда и (10) следует оценка

$$\|u_m(t)\|_H^2 + \delta\int_0^t \|u_m(s)\|_V^2\,ds \le$$
$$\le c_1\{\|P_m u^0\|_H^2 + \int_0^T \|f(s,\theta)\|_{V'}^2\,ds\} + c_2\int_0^t \|u_m(s)\|_H^2\,ds. \tag{11}$$

В последнем неравенстве выделим интегральное неравенство для $\|u_m(t)\|_H^2$, из которого получим

$$\|u_m(t)\|_H^2 \le M\{\|P_m u^0\|_H^2 + \int_0^T \|f(s,\theta)\|_{V'}^2\,ds\}. \tag{12}$$

Из (11) и (12) следует первая необходимая далее оценка

$$\|u_m(t)\|_H^2 + \int_0^t \|u_m(s)\|_V^2\,ds \le$$
$$\le M\{\|P_m u^0\|_H^2 + \int_0^T \|f(s,\theta)\|_{V'}^2\,ds\}. \tag{13}$$

Оценка (13) означает, в частности, что задача (9) имеет решение на всем отрезке $[0,T]$.

Для получения необходимой далее оценки функции $u'_m(t) \in V_m$ определим на элементах $u_m \in V_m$ двойственную норму

$$\|u_m\|_{V'_m} = \sup_{v_m \in V_m, v_m \ne \theta} \frac{|(u_m,v_m)|}{\|v_m\|_V}. \tag{14}$$

Заметим, что из (14) следует очевидная оценка $\|u_m\|_{V'_m} \le \|u_m\|_{V'}$. В таком случае, из уравнения (9) следует оценка

$$\|u'_m(t)\|_{V'_m} \le M_1\|u_m(t)\|_V + \|f[t,u_m(t)]\|_{V'} \le$$
$$\le M_1\|u_m(t)\|_V + M_2\|u_m(t)\|_H + \|f(t,\theta)\|_{V'}.$$

Из последней оценки, с учетом (13), получим

$$\int_0^T \|u'_m(t)\|_{V'_m}^2\,dt \le M\Big\{\|P_m u^0\|_H^2 + \int_0^T \|f(s,\theta)\|_{V'}^2\,ds\Big\}. \tag{15}$$

Лемма. *Из условия компактности вложения $V \subset H$ следует существование та-*

кой линейно независимой системы элементов $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$, полной в пространстве V, что $(\exists\alpha>0)(\forall m\in\mathbb{N})(\forall u_m\in V_m)[\|u_m\|_{V'}\le\alpha\|u_m\|_{V'_m}]$.

Доказательство. Заметим (см. [1]), что интерполяционное пространство $[V,V']_{1/2}=H$. Тогда существует линейный оператор Λ — самосопряженный положительно определенный в пространстве V' с областью определения $D(\Lambda)=V$ и область определения корня квадратного $D(\Lambda^{1/2})=H$. Кроме того, для скалярных произведений выполнено:

$$(u,v)_V=(\Lambda u,\Lambda v)_{V'}\ (u,v\in V), \tag{16}$$

$$(u,v)_H=(\Lambda^{1/2}u,\Lambda^{1/2}v)_{V'}\ (u,v\in H). \tag{17}$$

Очевидно, существует ограниченный самосопряженный оператор $\Lambda^{-1}:V'\to V'$. Покажем, что оператор Λ^{-1} вполне непрерывен в V'.

Пусть $G\subset V'$ — ограниченное множество, то есть $\|u\|_{V'}\le c$ для всех $u\in G$. Рассмотрим множество $\Lambda^{-1}[G]\subset V\subset V'$, ограниченное в V'. Покажем, что $\Lambda^{-1}[G]$ ограничено и в V. Для $y\in\Lambda^{-1}[G]$ найдется $u\in G$ такой, что $y=\Lambda^{-1}u$. Учитывая (16), получим $\|y\|_V=\|\Lambda y\|_{V'}=\|u\|_{V'}\le c$. Но тогда множество $\Lambda^{-1}[G]$ относительно компактно в H, а значит и в V'.

Вполне непрерывность оператора $\Lambda^{-1}:V'\to V'$ установлена. Тогда у оператора Λ^{-1} существует линейно независимая система $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ собственных элементов, полная в пространстве V'. Элементы $\varphi_i\in V$ являются собственными элементами и для оператора Λ. Поэтому система элементов $\{\Lambda\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ также полна в V'.

Возьмем $u\in V$ и зададим $\varepsilon>0$. Тогда для элемента $\Lambda u\in V'$ найдутся $m\in N$ и коэффициенты $c_1,c_2,\ldots,c_m$ такие, что

$$\left\|\Lambda u-\sum_{i=1}^{m}c_i\Lambda\varphi_i\right\|_{V'}<\varepsilon.$$

Но тогда из (16) следует, что

$$\left\|u-\sum_{i=1}^{m}c_i\varphi_i\right\|_{V}<\varepsilon.$$

Таким образом, система $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ полна и в пространстве V.

Рассмотрим теперь в пространстве V' уравнение

$$\Lambda u=g, \tag{18}$$

где $g\in V'$. Очевидно, уравнение (18) имеет единственное решение $u^*=\Lambda^{-1}g\in V$. Решаем (18) приближенно методом Бубнова–Галеркина. Элемент $u_m\in V_m$ называется приближенным решением уравнения (18), если

$$(\Lambda u_m-g,\varphi_i)_{V'}=0\ (i=1,2,\ldots,m).$$

Отсюда из (18) следует $(\Lambda u_m,\varphi_i)_{V'}=(\Lambda u^*,\varphi_i)_{V'}$, что с учетом (17) приводит для любого $v_m\in V_m$ к соотношению $(u_m,v_m)_H=(u^*,v_m)_H$. Следовательно, $u_m=P_mu^*$. Известно [3], что для подпространств V_m, выбранных как в нашем случае, $\|\Lambda u_m-g\|_{V'}\to0$ при $m\to\infty$. Но тогда при $m\to\infty$

$$\|\Lambda u_m-g\|_{V'}=\|\Lambda u_m-\Lambda u^*\|_{V'}=$$
$$=\|u_m-u^*\|_V=\|P_mu^*-u^*\|_V\to0.$$

Заметим, что u^* может быть любым элементом из V, для этого достаточно в (18) положить $g=\Lambda u^*$. Из принципа равномерной ограниченности тогда получим, что

$$(\exists\alpha>0)(\forall m\in\mathbb{N})[\|P_m\|_{V\to V}\le\alpha].$$

Для завершения доказательства леммы осталось заметить [4], что для $u_m\in V_m$ выполняется оценка $\|u_m\|_{V'}\le\|P_m\|_{V\to V}\|u_m\|_{V'_m}$.

Возвращаемся к оценке (15) и считаем далее, что $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}\subset V$ есть система собственных элементов оператора Λ. Тогда из (15) следует оценка

$$\int_0^T\|u'_m(t)\|_{V'}^2\,dt\le M\left\{\|P_mu^0\|_H^2+\int_0^T\|f(s,\theta)\|_{V'}^2\,ds\right\}. \tag{19}$$

Определим гильбертово пространство

$$W(0,T)=$$
$$=\{u(t)\mid[u\in L_2(0,T;V)]\wedge[u'\in L_2(0,T;V')]\}$$

с нормой

$$\|u\|_{W(0,T)}=\left\{\int_0^T(\|u(t)\|_V^2+\|u'(t)\|_{V'}^2)dt\right\}^{1/2}.$$

Справедливы [5] непрерывное вложение $W(0,T)\subset C([0,T],H)$ и компактное вложение $W(0,T)\subset L_2(0,T;H)$.

Оценки (13) и (19) означают, что последовательность $\{u_m(t)\}$ ограничена в пространстве $W(0,T)$. Выделим подпоследовательность $\{u_\mu(t)\}$, слабо сходящуюся в $W(0,T)$ к некоторому элементу $z\in W(0,T)$, причем такую, что $\int_0^T\|u_\mu(t)-z(t)\|_H^2\,dt\to0$ при $\mu\to\infty$. Далее, сделав соотвествующий предельный переход, покажем, что $z(t)$ – решение задачи (3).

Обоснование предельного перехода. Пусть $j\in\mathbb{N}$ произвольное фиксированное число и $\mu > j$. Равенство (9), верное и при $m = \mu$, умножим на скалярную функцию $\psi(t) \in C^1[0,T]$, удовлетворяющую условию $\psi(T) = 0$, и результат проинтегрируем от 0 до T. С учетом интегрирования по частям первого слагаемого и того, что $(P_\mu u^0, \varphi_j(0)) = (u^0, \varphi_j(0))$, получим

$$\int_0^T [-(u_\mu(t), \varphi_j'(t)) + a(t, u_\mu(t), \varphi_j(t))]dt = \int_0^T (f[t, u_\mu(t)], \varphi_j(t))dt + (u^0, \varphi_j(0)), \tag{20}$$

где $\varphi_j(t) = \psi(t)\varphi_j$. В левой части равенства (20) имеем дело с ограниченным линейным функционалом по $u_\mu(t)$ в пространстве $W(0,T)$. Заметим также, что

$$\left| \int_0^T (f[t, u_\mu(t)], \varphi_j(t))dt - \int_0^T (f[t, z(t)], \varphi_j(t))dt \right| \le \int_0^T \left\| f[t, u_\mu(t)] - f[t, z(t)] \right\|_{V'} \left\| \varphi_j(t) \right\|_V dt \le M_2 \left(\int_0^T \left\| u_\mu(t) - z(t) \right\|_H^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_0^T \left\| \varphi_j(t) \right\|_V^2 dt \right)^{1/2}.$$

Таким образом, из (20) при $\mu \to \infty$ следует

$$\int_0^T [-(z(t), \varphi_j'(t)) + a(t, z(t), \varphi_j(t))]dt = \int_0^T (f[t, z(t)], \varphi_j(t))dt + (u^0, \varphi_j(0)). \tag{21}$$

Очевидно, равенство (21) верно и для любой функции $\psi(t) \in C_0^\infty(0,T)$. Поэтому (21) означает равенство в смысле обобщенных функций

$$\frac{d}{dt}(z(t), \varphi_j) + a(t, z(t), \varphi_j) = (f[t, z(t)], \varphi_j). \tag{22}$$

Так как в (22) число $j \in \mathbb{N}$ произвольно, а множество всевозможных конечных линейных комбинаций элементов $\{\varphi_j\}$ плотно в V, то из (22) и [5] для почти всех $t \in [0,T]$ получим

$$z'(t) + A(t)z(t) = f[t, z(t)].$$

Проверим выполнение для $z(t)$ начального значения $z(0) = u^0$. Первое слагаемое в (21) интегрируем по частям.

$$-\int_0^T (z(t), \varphi_j)\psi'(t)dt = (z(0), \varphi_j)\psi(0) + \int_0^T \frac{d}{dt}(z(t), \varphi_j)\psi(t)dt.$$

Учитывая (22), получим $(z(0), \varphi_j)\psi(0) = (u^0, \varphi_j)\psi(0)$ для всех $\psi(t) \in C^1[0,T]$ с $\psi(T) = 0$. Следовательно, $(z(0), \varphi_j) = (u^0, \varphi_j)$ для всех $j \in \mathbb{N}$, а значит $z(0) = u^0$.

Осталось заметить, что справедливость оценки (4) следует из оценок (13) и (19) и непрерывности вложения $W(0,T) \subset C([0,T], H)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. — М.: Мир, 1971. — 372 с.

2. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. — М.: Наука, 1985. — 224 с.

3. *Михлин С.Г.* Численная реализация вариационных методов. — М.: Наука, 1966. — 432 с.

4. *Смагин В.В.* Оценки погрешности проекционного метода для параболических уравнений с несимметричными операторами // Труды математ. ф-та. Воронеж. гос. ун-т. — 1997. — № 2. — С. 63—67.

5. *Темам Р.* Уравнения Навье−Стокса. Теория и численный анализ. — М.:Мир, 1981. — 408 с.