УДК 517.98

О ГИПЕРПОДПРОСТРАНСТВАХ, ПОРОЖДЕННЫХ СИНГУЛЯРНЫМИ СИММЕТРИЧНЫМИ ФУНКЦИОНАЛАМИ*

© 2004 А. А. Седаев

Воронежский государственный архитектурно-строительный университет

Рассматриваются пространства Манцинкевича $M(\psi)$, $\liminf\limits_{t\to 0}\dfrac{\psi(2t)}{\psi(t)}=1$, которые допускают достаточно широкое множество сингулярных симметричных функционалов. Пусть K — солидный подконус конуса неотрицательных элементов пространства $M(\psi)$ и $M_1(\psi)$ — его сепарабельная часть. Доказано, что ядра сингулярных симметричных функционалов пересекают множество $K\setminus M_1(\psi)$. Как следствие, установлено, что конус C-измеримых по А. Конну положительных элементов пространства $M(\psi)$ не может быть солидным.

В работах [1, 2, 3] было введено и исследовано понятие симметричного функционала, определенного на симметричном пространстве E измеримых на (I,m) функций [4]. Здесь (I,m) есть интервал $[0,l]$, $l\le\infty$, с обычной мерой Лебега m. Там же были получены условия существования симметричных функционалов и рассмотрены некоторые конструкции, их порождающие.

Оказалось, что среди нормальных (абсолютно непрерывных в смысле теории полуупорядоченных пространств) функционалов, симметричные образуют не более чем одномерное подпространство, порожденное обычным интегралом $f(x)=\int_0^l x(t)dt$. Поэтому интерес для исследования представляют лишь сингулярные (анормальные) симметричные функционалы (коротко ССФ): положительные ненулевые функционалы f, обращающиеся в ноль на фундаменте $L^1\cap L^\infty$ и удовлетворяющие условию симметричности (монотонности относительно полуупорядоченности Харди–Литтлвуда) $f(x)\le f(y)$ для всех $0\le x,y$ таких, что $\int_0^t x^*(s)ds\le\int_0^t y^*(s)ds,\ 0<t\le l.$

Само симметричное пространство E для существования на нем ненулевых сингулярных симметричных функционалов должно удовлетворять некоторым, довольно жестким условиям (см. [1, 2]). Например, ни одно пространство Орлича не допускает существование ненулевых ССФ, а если E есть пространство Марцинкевича $M(\psi)$, порожденное неубывающей вогнутой функцией $\psi(t),\psi(0)=0$, то для существования ненулевых ССФ, сосредоточенных в нуле (то есть обращающихся в ноль на L^∞), необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{t\to 0}\psi(t)=0 \text{ и } \liminf_{t\to 0}\frac{\psi(2t)}{\psi(t)}=1. \qquad (1)$$

Аналогично, при $l=\infty$ для существования ненулевых ССФ, сосредоточенных в бесконечности (то есть обращающихся в ноль на $L^1=L^1(R_+)$), необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{t\to\infty}\psi(t)=\infty \text{ и } \liminf_{t\to\infty}\frac{\psi(2t)}{\psi(t)}=1. \qquad (2)$$

Как показано в [2], множество ССФ оказывается достаточно широким, ибо с его помощью удается восстановить в $E=M(\psi)$ полунорму расстояния от элемента x до симметричного подпространства $M_1(\psi)$, равного замыканию в $M(\psi)$ множества $L^1\cap L^\infty$. При этом от функции ψ требуется, чтобы

$$\lim_{t\to 0,\infty}\frac{\psi(2t)}{\psi(t)}=1. \qquad (3)$$

Другим критерием обилия множества ССФ может служить возможность задеть ядром такого функционала любой «солидный» в терминологии теории полуупорядоченных пространств подконус конуса положительных

* Работа поддержана РФФИ, грант 02-01-00146 и программой «Университеты России», грант УР.04.01.051.

элементов пространства $M(\psi)$. Предположение «солидности» здесь необходимо, так как, например, зануление ССФ f на *одномерном* конусе, порожденном ψ', влечет $f \equiv 0$.

Само ядро любого нетривиального ССФ уже является необычным объектом, ибо оно представляет собой замкнутое симметричное и даже интерполяционное для пары $\{L^1, L^\infty\}$ подпространство исходного пространства E, коразмерность которого равна 1. При этом существование такого подпространства, как и существование нетривиального ССФ, представляется возможным далеко не для любого симметричного пространства E. *В связи с этим возникает задача исследования таких подпространств, выяснения их структуры и возможного расположения внутри исходного объемлющего пространства* E. Доказываемые ниже результаты проливают некоторый свет на эту тему и будут касаться только случая ССФ, сосредоточенных на бесконечности и определенных на $M(\psi)$. Отметим, что аналогичные утверждения могут быть сформулированы и для ССФ, сосредоточенных в нуле, причем метод их доказательства остается прежним.

Наши построения будут основаны на специальной конструкции ССФ, разработанной в [2, 3], и на формулируемой ниже теореме Сачестона [5], касающейся существования банаховых пределов на пространстве $l^\infty = l^\infty(\mathbb{N})$.

Напомним, что положительный функционал L на l^∞ называется банаховым пределом, если он инвариантен относительно сдвига и на сходящихся последовательностях равен их пределу.

Пусть $BL(l^\infty)$ *пространство банаховых пределов на* l^∞ *и пусть* L *один из них. Тогда для любой последовательности* $\mathbf{a} = \{a_k\}_1^\infty$ *из пространства* l^∞ *справедлива оценка*

$$\lim_{n\to\infty} \inf_{1\le j\le\infty} \frac{a_j + a_{j+1} + \ldots + a_{j+n}}{n+1} \le$$
$$\le L(a) \le \lim_{n\to\infty} \sup_{1\le j\le\infty} \frac{a_j + a_{j+1} + \ldots + a_{j+n}}{n+1}. \tag{4}$$

Причем на множестве $BL(l^\infty)$ *обе границы в оценке (4) достигаются.*

Всюду ниже мы будем предполагать, что для функции ψ условие (2) выполнено.

Теорема 1. *Пусть* K *некоторый солидный подконус конуса* $M_+ = M_+(\psi)$ *положительных элементов пространства* $M(\psi)$, $K \not\subset M_1(\psi)$. *Тогда существует такой ненулевой ССФ* f, *ядро которого* $N(f)$ *имеет с* $K \setminus M_1(\psi)$ *непустое пересечение.*

Доказательство. Пусть $x \in K \setminus M_1(\psi)$. Тогда, согласно [2, предложение 2.1], для любого $x \in K$ существует такая последовательность $\{t_k\}_1^\infty \to \infty$, что

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\phi_x(t_k)}{\psi(t_k)} > \alpha > 0, \tag{5}$$

где $\phi_x(t) = \int_0^t x^*(s)ds$. В частности, в силу первой части условия (2) отсюда следует, что $\phi_x(\infty) = \infty$. Так как $\phi_x(t)$ вогнутая неубывающая функция, то для нее (как и для функции $\psi(t)$) выполнено неравенство $\phi(t) \le \phi(2t) \le 2\phi(t), \quad t > 0$. Отсюда, переходя (если нужно) к подпоследовательности и заменяя t_k на $2^{[\log_2 t_k]}$, где $[a]$ есть целая часть a, можно считать, что $t_k = 2^{m_k}$, где m_k строго возрастающая последовательность натуральных чисел.

Наконец, согласно (2) и [2, стр. 61—62] или [4, гл. II, лемма 1.3], существует такая последовательность чисел $s_k \to \infty$, что

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\psi(s_k)}{\psi(2^{-k} s_k)} = 1. \tag{6}$$

Рассуждая аналогично предыдущему, используя (6) и переходя, если нужно, к подпоследовательности, можно считать, что $s_k = 2^{l_k}$, где $\{l_k\}$ строго возрастающая последовательность натуральных чисел. Отсюда имеем

$$\frac{\psi(2^{l_k})}{\psi(2^{l_k - k})} = 1 + o(1). \tag{7}$$

Определим теперь новую возрастающую последовательность целых чисел $\{p_k\}$ так, чтобы ее элементы с четными номерами брались из последовательности $\{l_i\}$, а с нечетными номерами из последовательности $\{m_j\}$, причем члены последовательности можно считать настолько быстро растущими, что выполняется условие

$$\frac{\psi(2^{p_{k-1}})}{\psi(2^{p_k})} = o(1), \ \ k = 1, 2, \ldots. \tag{8}$$

Определим новый элемент $z \in K$ следующим образом. Положим $z^*(t) = x^*(t), \ 0 < t \le 2^{p_1}$,

$z^*(t) = x^*(t)$, $2^{p_{2k}} < t \le 2^{p_{2k+1}}$ и $z^*(t) = x^*(2^{p_{2k}})$, $2^{p_{2k-1}} < t \le 2^{p_{2k}}$, $k = 1,2,3,\ldots$. Тогда сам $z(t)$ выберем так, чтобы z и z^* были равноизмеримы и z удовлетворял неравенству $0 \le z \le x$. Пусть $\phi(t) = \phi_z(t)$.

В результате, для $k = 1,2,3\ldots$ и $2^{p_{2k-1}} \le t \le 2^{p_{2k}}$

$$\begin{aligned}\phi(t) &= \phi(2^{p_{2k-1}}) + (t - 2^{p_{2k-1}})x^*(2^{p_{2k}}) = \\ &= c_k + tx^*(2^{p_{2k}}) < \phi_x(2^{p_{2k-1}}) + tx^*(2^{p_{2k}}),\end{aligned} \tag{9}$$

а для $2^{p_{2k}} \le t \le 2^{p_{2k+1}}$

$$\begin{aligned}\phi(t) &= \phi(2^{p_{2k}}) + \phi_x(t) - \phi_x(2^{p_{2k}}) = \\ &= c_k + 2^{p_{2k}} x^*(2^{p_{2k}}) + \phi_x(t) - \phi(2^{p_{2k}}).\end{aligned} \tag{10}$$

Очевидно $\phi_x(t) \ge tx^*(t)$ для всех $t > 0$. Поэтому для $j = 0,1,2,\ldots k$, используя (9) и оценки (7) (8), имеем

$$\begin{aligned}&\frac{\phi(2^{p_{2k}-j})}{\psi(2^{p_{2k}-j})} < \frac{\phi_x(2^{p_{2k-1}})}{\psi(2^{p_{2k}-j})} + \frac{2^{p_{2k}-j}x^*(2^{p_{2k}})}{\psi(2^{p_{2k}-j})} = \\ &= \frac{\psi(2^{p_{2k}})}{\psi(2^{p_{2k}-j})}\left(\frac{\|x\|\psi(2^{p_{2k-1}})}{\psi(2^{p_{2k}})} + \frac{2^{p_{2k}-j}x^*(2^{p_{2k}})}{\psi(2^{p_{2k}})}\right) = \\ &= (1+o(1))\left(o(1) + 2^{-j}\,\frac{2^{p_{2k}}x^*(2^{p_{2k}})}{\psi(2^{p_{2k}})}\right) \le \\ &\le \frac{2^{-j}\phi_x(2^{p_{2k}})}{\psi(2^{p_{2k}})} + o(1) < \|x\| 2^{-j} + o(1),\end{aligned}$$

где $o(1)$ стремится к нулю при $k \to \infty$ равномерно по j.

Однако по построению $2^{p_{2k+1}} = t_m$ при некотором m. Поэтому, согласно (9), (10), (5) и (8),

$$\begin{aligned}&\frac{\phi(2^{p_{2k+1}})}{\psi(2^{p_{2k+1}})} > \frac{\phi_x(2^{p_{2k+1}}) - \phi_x(2^{p_{2k}})}{\psi(2^{p_{2k+1}})} = \\ &= \frac{\phi_x(2^{p_{2k+1}})}{\psi(2^{p_{2k+1}})} - \frac{\phi_x(2^{p_{2k}})}{\psi(2^{p_{2k+1}})} \ge \\ &\ge \frac{\phi_x(t_m)}{\psi(t_m)} - \frac{\|x\|\psi(2^{p_{2k}})}{\psi(2^{p_{2k+1}})} > \alpha - o(1).\end{aligned}$$

Это означает, что $z \in M(\psi) \setminus M_1(\psi)$.

Положим $g_1(x)(n) = \dfrac{\phi_x(2^n)}{\psi(2^n)}$. В [2, 3] доказано, что если $L \in BL(l^\infty)$ произвольный банахов предел на l^∞, то формула

$$f(x) = L(\{g_1(x)(n)\} \tag{11}$$

определяет ССФ на положительных элементах пространства $M(\psi)$, который затем продолжается на все пространство по линейности.

Рассмотрим

$$\begin{aligned}&\inf_{0<i<\infty} \frac{g_1(z)(i) + g_1(z)(i+1) + \ldots + g_1(z)(i+k)}{k+1} \le \\ &\le \frac{g_1(z)(p_{2k}-k) + g_1(z)(p_{2k}-k+1) + \ldots + g_1(z)(p_{2k})}{k+1} = \\ &= \frac{2^{-k} + o(1) + 2^{-k+1} + o(1) + \ldots + 1 + o(1)}{k+1} < \\ &< 2/(k+1) + o(1) = o(1).\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\lim_{k\to\infty} \inf_{0<i<\infty} \frac{g_1(z)(i) + g_1(z)(i+1) + \ldots + g_1(z)(i+k)}{k+1} = 0$$

и по теореме Сачестона найдется $L \in BL(l^\infty)$ такой, что

$$f(z) = L(\{g_1(z)(n)\}) = 0.$$

Теорема доказана.

Назовем, следуя А. Конну [6], элемент пространства Марцинкевича C-измеримым, если все симметричные сингулярные функционалы принимают на нем постоянное значение. Ясно, что множество C-измеримых неотрицательных элементов пространства есть замкнутый выпуклый, симметричный по составу элементов конус, содержащий как подмножества $M_1(\psi)$ и $\{x = \psi'\}$. Тем не менее, данный конус обладает необычным свойством.

Предложение 1. *Конус C-измеримых элементов не является солидным.*

Доказательство немедленно вытекает из определения C-измеримости и теоремы 1. Действительно, если бы такой конус был солидным, то по доказанной теореме в нем нашелся бы элемент $z \notin M_1(\psi)$, на котором некоторый ССФ обращается в ноль. С другой стороны, так как ССФ воссанавливают полунорму расстояния от элемента $x \in M(\psi)$ до $M_1(\psi)$, то найдется такой ССФ, который принимает на z положительное значение, что противоречит понятию C-измеримости.

Автор благодарен Ф. А. Сукочеву, который привлек его внимание к данному вопросу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Dodds P.G., de Pagter B., Semenov E.M., Sukochev F.A.* Symmetric Functionals and Singular Traces// Positivity. 1998. P. 47—75.

2. *Доддс П.Г., де Пагтер Б., Седаев А.А., Семенов Е.М., Сукочев Ф.А.* Сингулярные симметричные функционалы // Зап. научн. семин. ПОМИ. 2002. 42—71.

3. *Доддс П.Г., де Пагтер Б., Седаев А.А., Семенов Е.М., Сукочев Ф.А.* Сингулярные симметричные функционалы и банаховы пределы с дополнительными свойствами инвариантности // Известия АН РФ. Серия математическая, — 2003, Том 67, № 6, С. 111—136.

4. *Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М.* Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978.

5. *Sucheston L.* Banach limits// Amer. Math. Monthly. 1967. P. 308—311.

6. *Connes A., Moscovici H.* The local index formula in non-commutative geometry // Geom. Funct. Anal. 5 (1995), P. 174—243.