ВЕСТНИК ВГУ, Серия физика, математика, 2004, № 1

УДК 517.98

# ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ ТАУБЕРОВА ТИПА, ВОЗНИКАЮЩЕЙ В ТЕОРИИ СИНГУЛЯРНЫХ СИММЕТРИЧНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ*

**© 2004 А. А. Седаев**

*Воронежский государственный архитектурно-строительный университет*

Рассматривается введенное А. Конном понятие C-измеримого элемента. Элемент пространства, допускающего существование сингулярных симметричных функционалов (следов), на котором все такие функционалы из некоторого класса принимают постоянное значение, называется C-измеримым. Для случая пространства Марцинкевича с логарифмической на бесконечности порождающей функцией доказано, что критерием C-измеримости элемента является существование на бесконечности предела функции, задающей норму этого элемента в пространстве Марцинкевича. Для получения этого результата доказана теорема тауберова типа, утверждающая, что для функции вида $\phi(t)/t$ сходимость по Чезаро, почти сходимость и просто сходимость совпадают, если функция $\phi(t)$ не убывает.

Пусть $E = M(\psi)$ пространство Марцинкевича [1], порожденное функцией $\psi(t) = \ln(1+t)$, $t > 0$. Определим для каждого $x$ из $E$ функцию $\phi(t) = \phi_x(t) = \int_0^{e^t} x^*(s)ds$ и рассмотрим последовательность

$$a_n(x) = \frac{1}{\psi(e^n)} \int_0^{e^n} x^*(s)ds = \frac{\phi(n)}{n}, \ n = 1, 2, \dots . \quad (1)$$

Следуя [2, 3], для каждого банахова предела $L$, заданного на $l^\infty(\mathbb{N})$, рассмотрим сингулярный симметричный функционал $f_L(x)$, определенный для неотрицательных $x \in E$ формулой

$$f_L(x) = L(\{a_n(x)\}) \quad (2)$$

и продолженный на все $E$ по линейности (напомним, что согласно [2, 3], критерием возможности такого продолжения является условие $\liminf\limits_{t\to\infty} \frac{\psi(2t)}{\psi(t)} = 1$, которое в нашем случае выполнено). Следуя А. Конну [4], элемент $x$ из $E$ будем называть C-измеримым тогда и только тогда, когда $f_L(x)$ не зависит от выбора банахова предела $L$. Применяя общий критерий Г. Лоренца [5], касающийся независимости $L(\{a_n\})$ от $L$ для произвольной последовательности $\{a_n\} \in l^\infty(N)$, заключаем, что $x$ будет C-измеримым тогда и только тогда, когда последовательности $b_n(p) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} a_{p+i}(x)$ сходятся к некоторому $A$ равномерно по $p \in \mathbb{N}$. Такая последовательность $\{a_n\}$ называется почти сходящейся к $A$ [5]. Учитывая специфичность последовательности (1), А. Конн высказал утверждение, что для C-измеримости $x$ достаточно, чтобы последовательность $\{a_n(x)\}$ была сходящейся по Чезаро

$$b_n(1) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i(x) \to A \text{ при } n \to \infty. \quad (3)$$

Это утверждение было доказано А. Конном в [4], но не для множества всех банаховых пределов $BL(l^\infty)$, а для некоторого собственного его подмножества $CBL(l^\infty)$ тех банаховых пределов, которые порождены чезаровскими средними (см. [4]). Ниже мы подтвердим это утверждение в полной общности и получим значительно более сильный результат.

**Теорема 1.** *Элемент $x \in E$ C-измерим тогда и только тогда, когда последовательность $\{a_n(x)\}$ является сходящейся.*

Данный результат будет вытекать из следующей теоремы тауберова типа

**Теорема 2.** *Пусть последовательность $\phi(n)$ не убывает. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

*1. Последовательность $\frac{\phi(n)}{n}$ сходится к $A$ по Чезаро.*

*2. Последовательность $\frac{\phi(n)}{n}$ почти сходится к $A$.*

* Работа поддержана РФФИ, грант 02-01-00146 и программой «Университеты России», грант УР.04.01.051.

*3. Последовательность* $\frac{\phi(n)}{n}$ *сходится к* $A$.

**Доказательство.** Так как $(3)\Rightarrow(2)\Rightarrow(1)$, то остается доказать, что $(1)\Rightarrow(3)$.

Предположим противное. Пусть условие (3) выполнено, и пусть найдется такая последовательность натуральных чисел $s_n\to\infty$, что $a_{s_n}(x)=\phi(s_n)/s_n=Ap+o(1),\quad n=1,2,\dots$, где $p<1$ и $A$ из (3). Здесь и ниже $o(1)$ означает некоторую (подходящую) последовательность, стремящуюся к нулю. Тогда для каждого фиксированного $i>0$

$$\frac{\phi(s_n-i)}{s_n-i}\le\frac{\phi(s_n)s_n}{s_n(s_n-i)}=Ap\,\frac{s_n}{s_n-i}+o(1).$$

Определим $k=k(n)$ так, чтобы

$$\frac{s_n-k}{s_n}=p+o(1). \tag{4}$$

Тогда, учитывая (3), имеем

$$b_{s_n}(1)=\frac{1}{s_n}\sum_{i=1}^{s_n}a_i(x)=$$
$$=\frac{\sum_{i=1}^{s_n-k}a_i(x)+\sum_{j=0}^{k-1}\phi(s_n-j)/(s_n-j)}{s_n}\le$$
$$\le\frac{(s_n-k)}{s_n}\frac{1}{(s_n-k)}\sum_{i=1}^{s_n-k}a_i(x)+\frac{1}{s_n}\sum_{j=0}^{k-1}\phi(s_n)/(s_n-j)=$$
$$=(p+o(1))(A+o(1))+Ap\sum_{j=0}^{k-1}1/(s_n-j)=$$
$$=Ap+o(1)+Ap(\ln\frac{s_n}{s_n-k}+o(1))=$$
$$=Ap(1+o(1)+\ln\frac{1}{p}+o(1))=$$
$$=Ap(1+1/p-1-\varepsilon(p)+o(1))\not\to A.$$

Здесь мы использовали очевидное равенство $\ln 1/p=1/p-1-\varepsilon(p)$, где $\varepsilon(p)$ больше 0 для любого $p<1$.

Теперь предположим, что существует последовательность $t_n\uparrow\infty$, такая что $a_{t_n}(x)=\phi(t_n)/t_n=Aq+o(1),\ n=1,2,\dots$, где $q>1$. Тогда для любого фиксированного $i>0$

$$\frac{\phi(t_n+i)}{t_n+i}\ge\frac{\phi(t_n)t_n}{t_n(t_n+i)}=Aq\,\frac{t_n}{t_n+i}+o(1).$$

Определим $k=k(n)$ так, чтобы

$$\frac{t_n+k}{t_n}=q+o(1). \tag{5}$$

Учитывая (3), имеем

$$A+o(1)=b_{t_n}(1)=\frac{1}{t_n}\sum_{i=1}^{t_n}a_i(x)=$$
$$=\frac{\sum_{i=1}^{t_n+k}a_i(x)-\sum_{j=1}^{k}\phi(t_n+j)/(t_n+j)}{t_n}\le$$
$$\le\frac{(t_n+k)}{t_n}\frac{1}{(t_n+k)}\sum_{i=1}^{t_n+k}a_i(x)-\frac{1}{t_n}\sum_{j=1}^{k}\phi(t_n)/(t_n+j)=$$
$$=(q+o(1))b_{t_n+k}(1)-Aq(\ln\frac{t_n+k}{t_n}+o(1))=$$
$$=qb_{t_n+k}(1)-Aq\ln q+o(1).$$

Из этого неравенства получаем, что

$$b_{t_n+k}(1)\ge A\frac{(1+q\ln q)}{q}+o(1)=A+\delta(q)+o(1)\not\to A,$$

ибо $f(q)=(1+q\ln q)/q=1+\delta(q)$, $\delta(q)>0$ для всех $q>1$. Данный факт легко следует из $f(1)=1$ и неравенства $f'(q)=(q-1)/q>0$ для $q>1$.

Итак, в обоих случаях мы пришли к противоречию. Следовательно,

$$\liminf a_n(x)=\limsup a_n(x)=\lim b_n(1)=A.$$

Теорема доказана.

Теорема 1 непосредственно следует из теоремы 2, ибо участвующая в ней функция $\phi(t)=\phi_x(t)=\int_0^{e^t}x^*(s)ds$ не убывает.

В заключение отметим, что утверждение теоремы 1 немедленно распространяется на случай пространств Марцинкевича $M(\psi)$ с произвольной функцией $\psi$, удовлетворяющей условию

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{\psi(2t)}{\psi(t)}=1, \tag{6}$$

и на класс $S_\psi(BL)$ сингулярных симметричных функционалов вида $f_L(x)=L(\{a_n(x)\})$, где $L\in BL(l^\infty)$, а $a_n(x)=\frac{1}{n}\int_0^{\psi^{-1}(n)}x^*(s)ds,\ n\in\mathbb{N}$.

Если же дополнительно к (6) для достаточно больших $t$ функция $\ln(t)/\psi(t)$ не убывает, то тот же результат справедлив и для более широкого класса сингулярных симметричных функционалов $S_{\ln}(BL)$, в котором

$a_n(x) = \frac{1}{\psi(e^n)} \int_0^{e^n} x^*(s)ds$. Для доказательства достаточно заметить, что $a_n(x) = \frac{\sigma(n)}{n}$, где функция $\sigma(n) = \frac{\ln(e^n)}{\psi(e^n)} \int_0^{e^n} x^*(s)ds$ не убывает, и, следовательно, к ней применима теорема 2.

Автор благодарен Ф. А. Сукочеву, обратившему его внимание на данную проблему, и Е.М. Семенову за интерес, проявленный к этой работе.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М.* Интерполяция линейных операторов. Москва: «Наука», 1978.

2. *Доддс П.Г., де Пагтер Б., Седаев А.А., Семенов Е.М., Сукочев Ф.А.* Сингулярные симметричные функционалы // Зап. научн. семин. ПОМИ. 2002, С. 42—71.

3. *Доддс П.Г., де Пагтер Б., Седаев А.А., Семенов Е.М., Сукочев Ф.А* Сингулярные симметричные функционалы и банаховы пределы с дополнительными свойствами инвариантности // Известия АН РФ. Серия математическая, — 2003, Том 67, № 6, С. 111—136.

4. *Connes A., Moscovici H.* The local index formula in non-commutative geometry // Geom. Funct. Anal. 5 (1995), P. 174—243.

5. *Lorentz G.G.* A contribution to the theory of divergent sequences // Acta Math. 1948, P. 167—190.