УДК 517.927

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПРИБЛИЖЕННОГО ПОСТРОЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ p-го ПОРЯДКА

© 2004 М. М. Портнов

Воронежский государственный университет

В работе рассматривается предложенная А. И. Перовым схема построения периодических решений применительно к обыкновенным дифференциальным уравнениям p-го порядка, разрешенным относительно старшей производной. Приведена схема метода, сформулированы и доказаны теоремы о сходимости метода.

Важное место в теории нелинейных колебаний занимают периодические решения нелинейных систем, различные способы их получения и разнообразные методы их приближенного нахождения (см., например, [1, 2, 9, 11, 12]). В данной работе предлагается рассмотреть предложенный А. И. Перовым [6] метод построения периодических решений систем нелинейных дифференциальных уравнений. Схему метода и теоремы о применимости и сходимости метода в случае скалярного дифференциального уравнения первого порядка можно найти в [7, 8]. В данной работе приводится схема построения последовательности периодических приближений, формулируются условия применимости и сходимости метода в случае применения его к скалярным уравнениям p-го порядка.

Пусть задано натуральное p. Рассмотрим скалярное дифференциальное уравнение p-го порядка, разрешенное относительно старшей производной,

$$x^{(p)} = f(t, x, x', \dots, x^{(p-1)}), \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}$, функция $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ непрерывна по совокупности переменных и периодична по переменной t с периодом $\omega > 0$:

$$f(t+\omega, x, x', \dots, x^{(p-1)}) = f(t+\omega, x, x', \dots, x^{(p-1)}). \tag{2}$$

Уравнение указанного вида будем называть ω*-периодическим уравнением.* Нас интересуют *периодические решения* уравнения (1), то есть решения $x(t)$ этой системы, являющиеся периодическими функциями переменной t с указанным выше периодом

$$x(t+\omega) = x(t). \tag{3}$$

1. ОБЩАЯ СХЕМА МЕТОДА

Рассмотрим простейшее уравнение вида (1), то есть уравнение

$$x^{(p)} = f(t), \tag{4}$$

с ω-периодической правой частью. Хорошо известны (см., например, [5]) условия существования и способ построения ω-периодических решений уравнений вида (4).

Лемма 1. *Уравнение (4) с ω-периодической правой частью имеет ω-периодические решения в том и только в том случае, если* ***интегральное среднее*** *функции $f(t)$ равно нулю:*

$$\frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} f(s)ds = 0. \tag{5}$$

Лемма 2. *Если уравнение (4) имеет периодические решения, то каждое из них имеет вид*

$$x(t) = x_{[0]}(t) + const, \tag{6}$$

где $x_{[0]}(t)$ — периодическое решение с нулевым средним

$$x_{[0]}(t) = \int_0^{\omega} G_p(t-s)f(s)ds. \tag{7}$$

Функция G_p — обобщенная функция Грина периодической задачи (4).

Функция Грина периодической задачи может быть определена соотношением

$$G_p(t) = \frac{1}{\omega}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(i\chi k)^p}e^{ikt}, \tag{8}$$

или в упрощенной форме

$$G_p(t) = (-1)^{\frac{p}{2}} \frac{2}{\omega\chi^p} \sum_{k=1}^{\infty} \cos(\chi k t) \text{ при четных } p, \quad (9)$$

$$G_p(t) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \frac{2}{\omega\chi^p} \sum_{k=1}^{\infty} \sin(\chi k t) \text{ при нечетных } p, \quad (10)$$

где $\chi = 2\pi/\omega$.

Из приведенных положений следует, что периодические решения уравнения (1), если они существуют, принадлежат множеству

$$\mathbf{P} = \left\{ x(t) \in \mathbf{D} \left| \int_0^{\omega} f(s, x(s), x'(s), \ldots, x^{(p-1)}(s))ds = 0 \right. \right\}, \quad (11)$$

где $\mathbf{D}$ — некоторое функциональное пространство. С целью нахождения периодического решения уравнения (1) предлагается проводить построение последовательности периодических приближений таким образом, чтобы все приближения принадлежали множеству $\mathbf{P}$.

Будем искать нулевое приближение в виде

$$x_0(t) = u_0(t) + c_0, \quad (12)$$

где $u_0(t)$ — *основа нулевого приближения*, в качестве которой возьмем произвольную ω-периодическую функцию (можно взять константу). Постоянную c_0 попытаемся выбрать таким образом, чтобы $x_0(t)$ принадлежало $\mathbf{P}$, то есть попытаемся найти c_0 как корень числового уравнения

$$\int_0^{\omega} f(s, u_0(s) + c_0, u_0'(s), \ldots, u_0^{(p-1)})ds = 0. \quad (13)$$

Естественно, что данное уравнение разрешимо далеко не всегда. Предположим, однако, что данное уравнение разрешимо и мы определили c_0. Тогда построим x_0 по формуле (12). Очевидно, что по построению $x_0 \in \mathbf{P}$ и является периодической функцией.

Теперь предположим, что построено i-тое приближение $x_i(t) \in \mathbf{P}$, являющееся ω-периодической функцией. Будем искать следующее приближение в виде

$$x_{i+1}(t) = u_{i+1}(t) + c_{i+1}. \quad (14)$$

Функцию $u_{i+1}(t)$ будем искать как периодическое решение уравнения

$$u^{(p)}(t) = f(t, x_i(t), x_i'(t), x''(t), \ldots, x_i^{(p-1)}(t)). \quad (15)$$

Так как $x_i \in \mathbf{P}$, то указанное элементарное уравнение имеет ω-периодические решения, определяемые с точностью до константы. Для упрощения дальнейшего рассмотрения определим $u_{i+1}(t)$ как периодическое решение с нулевым средним

$$u_{i+1}(t) = \int_0^{\omega} G(t-s) f(s, x_i(s), \ldots, x_i^{(p-1)}(t))ds \quad (16)$$

(однако отметим, что такое определение основы приближения существенно лишь для обоснования метода, при построении же решения $u_{i+1}(t)$ можно выбирать из периодических решений уравнения (15) произвольным образом). Далее попытаемся определить постоянную c_{i+1} таким образом, чтобы $x_{i+1}(t)$ принадлежало $\mathbf{P}$, то есть попытаемся найти c_{i+1} из уравнения

$$\int_0^{\omega} f(s, u_{i+1}(s) + c_{i+1}, u_{i+1}'(s), \ldots, u_{i+1}^{(p-1)})ds = 0. \quad (17)$$

Предположим, что данное уравнение разрешимо и мы определили c_0. Тогда построим x_{i+1} по формуле (14). Очевидно, что по построению $x_{i+1} \in \mathbf{P}$ и является ω-периодической функцией.

Очевидно, что если для какого-либо уравнения (1) удастся с помощью данных построений получить сходящуюся последовательность периодических функций $x_i(t)$, то ее предел будет являться периодическим решением уравнения (1).

2. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ МЕТОДА

Первоначально предлагается рассмотреть уравнение (1) на всей области определения, то есть на цилиндре $[0,\omega]\times\mathbb{R}$. Построения будем проводить в пространстве p-раз непрерывно дифференцируемых функций $\mathbf{C}^p[0,\omega]$ с нормой $\|x(\cdot)\|_0 = \max_{t\in[0,\omega]} x(t)$ и в пространстве p-раз дифференцируемых функций, интегрируемых с квадратом вместе со своими производными до p-го порядка включительно $\mathbf{L}_2^p[0,\omega]$ с нормой

$$\|x(\cdot)\|_{1/2} = \left(\int_0^{\omega} x^2(s)ds \right)^{1/2}.$$

Теорема 1. Глобальная теорема о сходимости метода. *Пусть задано уравнение(1) с непрерывной, ω-периодической функцией f. Пусть, кроме того, функция f удовлетворяет* ***условию Липшица снизу*** *по второй переменной, то есть существует такое $l > 0$, что для всех t, x, y, z_1, $z_2, \ldots, z_{p-1} \in R$ выполнено*

$$l|x-y| \le \left|f(t,x,z_1,\ldots,z_{p-1}) - f(t,y,z_1,\ldots,z_{p-1})\right|. \quad (18)$$

Тогда для указанного уравнения по формулам (12)—(17) по непрерывной ω-периодической функции $u_0(t)$ (основе нулевого приближения) может быть единственным образом построена последовательность ω-периодических функций $x_i(t)$. Если же при этом функция f удовлетворяет условию Липшица по совокупности пространственных переменных, то есть существуют такие положительные постоянные $L_0, L_1, \ldots, L_{p-1}$, что для любых $t, x_0, x_1, \ldots, x_{p-1}, y_1, y_2, \ldots, y_{p-1} \in \mathbb{R}$ выполнено

$$\left|f(t,x_0,x_1,\ldots,x_{p-1}) - f(t,y_0,y_1,\ldots,y_{p-1})\right| \le \le \sum_{k=0}^{p-1} L_k |x_k - y_k|, \quad (19)$$

и константы $l, L_0, \ldots, L_{p-1}$ таковы, что

$$\beta = L_0 \sqrt{\chi^{-2p} + \frac{1}{l^2}\left(\sum_{i=0}^{p-1} L_i \chi^{i-p}\right)^2} + \sum_{i=1}^{p-1} L_i^{i-p} < 1, \quad (20)$$

то последовательность периодических приближений $x_i(t)$ равномерно сходится к периодическому решению $x_*(t)$ уравнения (1). При этом справедливы оценки для функций последовательности и их первых $p-1$ производных

$$\begin{pmatrix} \|x_n - x_*\|_{1/2} \\ \|(x_n - x_*)'\|_{1/2} \\ \cdots \\ \left\|(x_n - x_*)^{(p-1)}\right\|_{1/2} \end{pmatrix} \le \mathbf{Q}^n (\mathbf{E} - \mathbf{Q})^{-1} \begin{pmatrix} \|(x_1 - x_0)\|_{1/2} \\ \|(x_1 - x_0)'\|_{1/2} \\ \cdots \\ \left\|(x_1 - x_0)^{(p-1)}\right\|_{1/2} \end{pmatrix}, \quad (21)$$

$$\begin{pmatrix} \|x_n - x^*\|_0 \\ \|(x_n - x^*)'\|_0 \\ \cdots \\ \left\|(x_n - x^*)^{(p-1)}\right\|_0 \end{pmatrix} \le \mathbf{G}\mathbf{Q}^{n-1} (\mathbf{E} - \mathbf{Q})^{-1} \begin{pmatrix} \|x_1 - x_0\|_0 \\ \|(x_1 - x_0)'\|_0 \\ \cdots \\ \left\|(x_1 - x_0)^{(p-1)}\right\|_0 \end{pmatrix}. \quad (22)$$

В приведенных оценках $\mathbf{Q}$ — постоянная $p \times p$-матрица

$$\mathbf{Q} = \mathbf{D}\mathbf{L}, \quad (23)$$

$$M = col(\chi^{-p}\chi^{1-p}\ldots\chi^{-1}), = \frac{2\pi}{\omega}, \quad (24)$$

$$L = (L_0 L_1 \ldots L_{p-1}), \quad (25)$$

$$D = col\left(\sqrt{^{-2p} + 1/l^2(\mathbf{LM})^2}\,\chi^{1-p}\ldots\chi^{-1}\right), \quad (26)$$

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \omega^p \sqrt{(-1)^{p+1} B_{2p}/(2p)!} + LM/l \\ \omega^{p-1}\sqrt{(-1)^p B_{2p-2}/(2p-2)!} \\ \cdots \\ \omega\sqrt{(-1)^2 B_2/(2)!} \end{pmatrix} \mathbf{L}, \quad (27)$$

B_j — *числа Бернулли*,

$\mathbf{E}$ — *единичная $p \times p$-матрица.*

Доказательство. Докажем первую часть утверждения. Отметим, что условие (18) фактически является условием строгой монотонности по второй переменной для функции f и для достаточно гладкой функции условие (18) может быть заменено неравенством

$$0 < l \le \left|\frac{\partial f(t,x,x',x'',\ldots,x^{(p-1)})}{\partial x}\right|. \quad (28)$$

Предположим, что задана ω-периодическая функция $u(t) \in \mathbf{C}^{(p)}[0,\omega]$. Определим отображение $F_u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ как

$$F_u(c) = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega f((s, u(s)+c, u'(s), \ldots, u^{(p-1)})ds. \quad (29)$$

Покажем теперь, что решение уравнения вида $F_u = 0$ существует и единственно. Для этого заменим в неравенстве (18) x на $u(t)+c$, y на $u(t)+d$, $c \ne d$ $z_i = u^{(i)}(t)$. Получим

$$0 < l|c-d| \le$$

$$\le \left|f(t,u(t)+c,u'(t),\ldots) - f(t,u(t)+d,u'(t),\ldots)\right|.$$

Проинтегрировав обе части неравенства, разделив их на ω и пользуясь тем, что интеграл от модуля непрерывной знакопостоянной функции равен модулю интеграла данной функции, получим

$$l|c-d| \le \left|F_u(c) - F_u(d)\right|. \quad (30)$$

Полученное соотношение означает, что отображение F_u является строго монотонным отображением из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$, а следовательно, уравнение $F_u(c) = 0$ имеет корень, причем единственный (см. [3, 4]). Следовательно, на каждом шаге метода уравнения вида (17) разрешимы, причем единственным образом. Следовательно, задав основу нулевого приближения $u_0(t)$, можно построить последовательность периодических функций, причем единственным образом.

Теперь рассмотрим разность двух последовательных приближений $x_i(t)$ и $x_{i+1}(t)$. Справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \|x_i - x_{i+1}\|_0 &= \|u_i + c_i - u_{i+1} - c_{i+1}\|_0 \le \\ &\le \|u_i - u_{i+1}\|_0 + |c_i - c_{i+1}|, \end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned} \|x_i - x_{i+1}\|_{1/2}^2 &= \|u_i + c_i - u_{i+1} - c_{i+1}\|_{1/2}^2 = \\ &= \|u_i - u_{i+1}\|_{1/2}^2 + \omega(c_i - c_{i+1})^2. \end{aligned} \tag{32}$$

Соотношение (32) получено как следствие из ортогональности в $\mathbf{L}_2^p[0,\omega]$ функции $u_i - u_{i+1}$ с нулевым средним и константы $c_i - c_{i+1}$.

Оценим разность $u_i - u_{i+1}$. Для этого воспользуемся неравенствами для функций с нулевым средним, связывающими норму функции и норму ее производной. В $\mathbf{C}^p[0,\omega]$ это неравенство Бора–Фавара

$$\|f(\cdot)\|_0 \le \chi^{-j} K_j \left\|f^{(j)}(\cdot)\right\|_0. \tag{33}$$

Здесь K_j — *константы Фавара*, которые можно определить как

$$K_j = \frac{4}{\pi}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^{i(j+1)}}{(2i+1)^{j+1}}.$$

В пространстве $\mathbf{L}_2^p[0,\omega]$ справедливо неравенство Виртингера

$$\|f(\cdot)\|_{1/2} \le \chi^{-j} \left\|f^{(j)}(\cdot)\right\|_{1/2}. \tag{34}$$

Оба указанных неравенства можно найти в [10]. Характерно, что уточнить данные неравенства нельзя. Отметим также, что

$$\begin{aligned} 1 = K_0 < K_2 < K_4 < \ldots < \frac{4}{\pi} < \ldots < \\ < K_5 < K_3 < K_1 = \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \tag{35}$$

Применяя данные неравенства к разности $u_i - u_{i+1}$, учитывая равенство

$$(u_i - u_{i+1})^{(p)} = f(t, x_{i-1}, x'_{i-1}, \ldots) - f(t, x_i, x'_i, \ldots)$$

и используя условие Липшица (19), нетрудно получить оценки

$$\|u_i - u_{i+1}\|_0 \le \chi^{-p} K_p \sum_{k=0}^{p-1} L_k \left\|(x_i - x_{i-1})^{(k)}\right\|_0, \tag{36}$$

$$\|u_i - u_{i+1}\|_0 \le \chi^{-p} \sum_{k=0}^{p-1} L_k \left\|(x_i - x_{i-1})^{(k)}\right\|_{1/2}. \tag{37}$$

Аналогичные оценки нетрудно получить и для производных указанной разности

$$\left\|(u_i - u_{i+1})^{(j)}\right\|_0 \le \chi^{j-p} K_{p-j} \sum_{k=0}^{p-1} L_k \left\|(x_i - x_{i-1})^{(k)}\right\|_0, \tag{38}$$

$$\left\|(u_i - u_{i+1})^{(j)}\right\|_{1/2} \le \chi^{j-p} \sum_{k=0}^{p-1} L_k \left\|(x_i - x_{i-1})^{(k)}\right\|_{1/2} \tag{39}$$

при целых $j = 0, 1, 2, \ldots, p-1$. Тогда справедливы оценки

$$\begin{aligned} &\sum_{j=0}^{p-1} L_j \left\|(u_i - u_{i+1})^{(j)}\right\|_0 \le \\ &\le \sum_{j=0}^{p-1} L_j \chi^{j-p} K_{p-j} \sum_{k=0}^{p-1} L_k \left\|(x_i - x_{i-1})^{(k)}\right\|_0, \end{aligned} \tag{40}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{j=0}^{p-1} L_j \left\|(u_i - u_{i+1})^{(j)}\right\|_{1/2} \le \\ &\le \sum_{j=0}^{p-1} L_j \chi^{j-p} \sum_{k=0}^{p-1} L_k \left\|(x_i - x_{i-1})^{(k)}\right\|_{1/2}. \end{aligned} \tag{41}$$

Теперь получим оценку для разности $c_i - c_{i+1}$. Для этого рассмотрим равенство

$$\begin{aligned} &\int_0^{\omega} f(s, u_{i+1} + c_{i+1}, u_{i+1}, \ldots)ds = \\ &= \int_0^{\omega} f(s, u_i + c_i, u_{i+1}, \ldots)ds = 0. \end{aligned}$$

Добавив к обеим частям равенства одинаковое слагаемое, получим

$$\begin{aligned} &\left|\int_0^{\omega} (f(s, u_{i+1} + c_{i+1}, u_{i+1}, \ldots) - f(s, u_{i+1} + c_i, u_{i+1}, \ldots))ds\right| = \\ &= \left|\int_0^{\omega} (f(s, u_i + c_i, u_{i+1}, \ldots) - f(s, u_{i+1} + c_i, u_{i+1}, \ldots))ds\right|. \end{aligned} \tag{42}$$

Теперь оценим левую часть неравенства (40), используя знакопостоянство подынтегральной функции и неравенство (18).

$$\begin{aligned} &\left|\int_0^{\omega} (f(s, u_{i+1} + c_{i+1}, u_{i+1}, \ldots) - f(s, u_{i+1} + c_i, u_{i+1}, \ldots))ds\right| = \\ &= \int_0^{\omega} \left|f(s, u_{i+1} + c_{i+1}, u_{i+1}, \ldots) - f(s, u_{i+1} + c_i, u_{i+1}, \ldots)\right| ds \ge \\ &\ge \int_0^{\omega} l\left|c_{i+1} - c_i\right| ds = l\omega\left|c_{i+1} - c_i\right|. \end{aligned}$$

Теперь оценим правую часть (40), используя неравенство (18):

$$\left|\int_0^{\omega}\left(f(s,u_i+c_i,u_{i+1},\ldots)-f(s,u_{i+1}+c_i,u_{i+1},\ldots)\right)ds\right|\le$$

$$\le\int_0^{\omega}\left|f(s,u_i+c_i,u_{i+1},\ldots)-f(s,u_{i+1}+c_i,u_{i+1},\ldots)\right|ds\le$$

$$\le\int_0^{\omega}\sum_{k=0}^{p-1}L_k\left|(u_i-u_{i+1})^{(k)}\right|ds\le\omega\sum_{k=0}^{p-1}L_k\left\|(u_i-u_{i+1})^{(k)}\right\|_0.$$

То есть получена оценка

$$\left|c_i-c_{i+1}\right|\le\frac{1}{l}\sum_{k=0}^{p-1}L_k\left\|(u_i-u_{i+1})^{(k)}\right\|_0. \qquad (42)$$

Действуя аналогично, несложно получить оценку

$$\omega(c_i-c_{i+1})^2\le\frac{1}{l^2}\left(\sum_{k=0}^{p-1}L_k\left\|(u_i-u_{i+1})^{(k)}\right\|_{1/2}\right)^2. \qquad (43)$$

Теперь возможно из (31) получить в $\mathbf{C}^p[0,\omega]$

$$\sum_{j=0}^{p-1}L_j\left\|(x_i-x_{i+1})^j\right\|_0\le$$

$$\le\left(L_0\left({}^{-p}K_p+\frac{1}{l}\sum_{j=0}^{p-1}L_j\chi^{j-p}K_{p-j}\right)+\right. \qquad (44)$$

$$\left.+\sum_{j=1}^{p-1}L_j\chi^{j-p}K_{p-j}\right)\times\sum_{k=0}^{p-1}L_k\left\|(x_i-x_{i-1})^{(k)}\right\|_0.$$

Аналогично можно из (32) получить оценку в пространстве $\mathbf{L}_2^p[0,\omega]$

$$\sum_{j=0}^{p-1}L_j\left\|(x_i-x_{i+1})^{(j)}\right\|_{1/2}\le$$

$$\le\left(L_0\sqrt{\chi^{-2p}+\frac{1}{l^2}\left(\sum_{j=0}^{p-1}L_j\chi^{j-p}\right)^2}+\sum_{j=1}^{p-1}L_j\chi^{j-p}\right)\times \qquad (45)$$

$$\times\sum_{k=0}^{p-1}L_k\left\|(x_i-x_{i-1})^{(k)}\right\|_{1/2}.$$

Таким образом, имеются константы

$$\alpha=\left(L_0\left(\chi^{-p}K_p+\frac{1}{l}\sum_{j=0}^{p-1}L_j\chi^{j-p}K_{p-j}\right)+\sum_{j=1}^{p-1}L_j\chi^{j-p}K_{p-j}\right)$$

и

$$\beta=\left(L_0\sqrt{\chi^{-2p}+\frac{1}{l^2}\left(\sum_{j=0}^{p-1}L_j\chi^{j-p}\right)^2}+\sum_{j=1}^{p-1}L_j\chi^{j-p}\right).$$

Нетрудно показать, учитывая (35), что $\alpha\ge\beta$. Таким образом, лучшей из полученных оценок является (45), из которой следует сходимость последовательности при $\beta<1$.

Записав вектор, состоящий из норм x_i-x_{i+1} и используя изложенные результаты для получения *покомпонентного неравенства*, имеем:

$$\begin{pmatrix}\left\|(x_i-x_{i+1})\right\|_{1/2}\\ \left\|(x_i-x_{i+1})'\right\|_{1/2}\\ \cdots\\ \left\|(x_i-x_{i+1})^{(p-1)}\right\|_{1/2}\end{pmatrix}\le\mathbf{Q}\begin{pmatrix}\left\|(x_{i-1}-x_i)\right\|_{1/2}\\ \left\|(x_{i-1}-x_i)'\right\|_{1/2}\\ \cdots\\ \left\|(x_{i-1}-x_i)^{(p-1)}\right\|_{1/2}\end{pmatrix}.$$

Из этого неравенства следует, что *спектральный радиус* матрицы $\mathbf{Q}$ меньше единицы, то есть $\operatorname{spr}\mathbf{Q}<1$. Тогда из этого неравенства, используя формулу Неймана, нетрудно получить оценку

$$\begin{pmatrix}\left\|(x_n-x_m)\right\|_{1/2}\\ \left\|(x_n-x_m)'\right\|_{1/2}\\ \cdots\\ \left\|(x_n-x_m)^{(p-1)}\right\|_{1/2}\end{pmatrix}\le(\mathbf{Q}^n-\mathbf{Q}^m)(\mathbf{E}-\mathbf{Q})^{-1}\begin{pmatrix}\left\|(x_1-x_0)\right\|_{1/2}\\ \left\|(x_1-x_0)'\right\|_{1/2}\\ \cdots\\ \left\|(x_1-x_0)^{(p-1)}\right\|_{1/2}\end{pmatrix}. \qquad (46)$$

Переходя в неравенстве (46) к пределу при $m\to\infty$, получим оценку (21).

В пространстве непрерывных функций $\mathbf{C}^p[0,\omega]$ нетрудно получить оценки вида

$$\left\|u_i-u_{i+1}(t)\right\|\le\left\|G_{p-j}(\cdot)\right\|_{1/2}\sum_{j=0}^{p-1}L_j\left\|x_{i-1}-x_i\right\|_{1/2},$$

из которых, учитывая что

$$\left\|G_p(\cdot)\right\|_{1/2}^2=\frac{2}{\omega\chi^{2p}}\sum_{k=1}^{\infty}k^{-2p}=\frac{2}{\omega\chi^{2p}}\zeta(2p)=$$

$$=\frac{(-1)^{p+1}\omega^{2p-1}}{(2p)!}B_{2p},$$

где $\zeta(n)$ — зета-функция Римана, B_j — числа Бернулли, и выполнено соотношение (43), следует

$$\begin{pmatrix}\left\|(x_n-x_m)\right\|_0\\ \left\|(x_n-x_m)'\right\|_0\\ \cdots\\ \left\|(x_n-x_m)^{(p-1)}\right\|_0\end{pmatrix}\le\frac{1}{\sqrt{\omega}}\mathbf{G}\begin{pmatrix}\left\|(x_{n-1}-x_{m-1})\right\|_{1/2}\\ \left\|(x_{n-1}-x_{m-1})'\right\|_{1/2}\\ \cdots\\ \left\|(x_{n-1}-x_{m-1})^{(p-1)}\right\|_{1/2}\end{pmatrix},$$

откуда, используя соотношение (46), получим утверждение о равномерной сходимости в $\mathbf{C}^p[0,\omega]$ и оценку (22).

Естественно, что полученные нами оценки (21, 22) довольно неудобны в использовании, так как содержат в явном виде два первых приближения — x_0, x_1. Сохраняются эти функции по причине произвольности выбора функции $u_0(t)$, что делает более корректную оценку неудобной в использовании. Однако нетрудно получить следующее следствие из Теоремы 1, дающее достаточно удобную при практическом использовании метода оценку.

Следствие 1. *Пусть выполнены условия Леммы 1. Тогда, взяв в качестве нулевого приближения метода константу* $x_0(t) = x_0$, *являющуюся корнем уравнения*

$$\int_0^\omega f(s, x_0, 0, 0, \ldots, 0)ds = 0, \tag{47}$$

по формулам (14)—(17) можно построить равномерно сходящуюся к периодическому решению $x_*(t)$ уравнения (1) последовательность функций. При этом будут справедливы оценки:

$$\begin{pmatrix} \|(x_n - x_*)\|_{1/2} \\ \|(x_n - x_*)'\|_{1/2} \\ \ldots \\ \|(x_n - x_*)^{(p-1)}\|_{1/2} \end{pmatrix} \le \mathbf{Q}^n(\mathbf{E}-\mathbf{Q})^{-1}\mathbf{R}_1 \|f(\cdot, x_0, 0, \ldots, 0)\|_{1/2}, \tag{48}$$

$$\begin{pmatrix} \|x_n - x^*\|_0 \\ \|(x_n - x^*)'\|_0 \\ \ldots \\ \|(x_n - x^*)^{(p-1)}\|_0 \end{pmatrix} \le \mathbf{G}\mathbf{Q}^{n-1}(\mathbf{E}-\mathbf{Q})^{-1}\mathbf{R}_2 \|f(\cdot, x_0, 0, \ldots, 0)\|_0, \tag{49}$$

где

$$\mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{\chi^{-2p} + (\mathbf{LM}/l)^2} \\ \chi^{1-p} \\ \ldots \\ \chi^{-1} \end{pmatrix}, \tag{50}$$

$$\mathbf{R}_1 = \left(\mathbf{E} + \begin{pmatrix} 1/l \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{LML} \right) \begin{pmatrix} \chi^{-p}K_p \\ \chi^{1-p}K_{p-1} \\ \ldots \\ \chi^{-1}K_1 \end{pmatrix}, \tag{51}$$

K_j — коэффициент Фавара.

Доказательство достаточно просто и основывается на неравенствах Виртингера (33) и Бора−Фавара (34).

Безусловно, накладываемое нами на правую часть уравнения (1) ограничение (18) является весьма жестким, особенно если требовать его выполнения на всем пространстве. Однако, опираясь на полученное следствие, говорящее об области расположения приближений в пространстве, можно сформулировать локальную теорему о сходимости.

Теорема 2. Локальная теорема о сходимости метода. *Пусть задано уравнение(1) с непрерывной ω-периодической функцией f. Пусть нам известен корень x_0 уравнения (30) и существуют такие константы d_0, d_1, $d_2, \ldots, d_{p-1} > 0$, l, L_1, L_2, $\ldots$, L_{p-1}, что в области*

$$\begin{gathered}[x_0 - d_0, x_0 + d_0] \times [-d_1, d_1] \times \\ \times [-d_2, d_2] \times \ldots \times [-d_{p-1}, d_{p-1}]\end{gathered} \tag{52}$$

выполнено:

1. Функция f удовлетворяет условию Липшица снизу по второй переменной, т.е. при всех $t \in R$ выполнено

$$\begin{gathered} l|x-y| \le \\ \le |f(t, x, z_1, \ldots, z_{p-1}) - f(t, y, z_1, \ldots, z_{p-1})|. \end{gathered} \tag{53}$$

2. Функция f удовлетворяет в указанной области условию Липшица по совокупности пространственных переменных, то есть для любых $t \in R$ выполнено

$$\begin{gathered} |f(t, x_0, x_1, \ldots, x_{p-1}) - f(t, y_0, y_1, \ldots, y_{p-1})| \le \\ \le \sum_{k=0}^{p-1} L_k |x_k - y_k|. \end{gathered} \tag{54}$$

3. Величина β строго меньше единицы (20).

4. Выполнены неравенства

$$\begin{pmatrix} |x_0 - d_0| \\ d_1 \\ \ldots \\ d_n \end{pmatrix} \le \mathbf{G}\mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{E}-\mathbf{Q})^{-1} R_2 \left\| f(\cdot, x_0, 0, \ldots, 0) \right\|_0 . \tag{55}$$

Тогда, взяв в качестве нулевого приближения метода константу $x_0(t) = x_0$, по формулам (14)—(17) можно построить равномерно сходящуюся к периодическому решению $x_*(t)$ уравнения (1) последовательность функций. При этом будут справедливы оценки (48), (49)

Доказательство данной теоремы также проводится достаточно просто и основывается на рассмотрении соотношения

$$\begin{pmatrix} \|x_n - x_m\|_0 \\ \|(x_n - x_m)'\|_0 \\ \ldots \\ \|(x_n - x_m)^{(p-1)}\|_0 \end{pmatrix} \le$$
$$\le \mathbf{G}(\mathbf{Q}^{n-1} - \mathbf{Q}^{m-1})(\mathbf{E}-\mathbf{Q})^{-1} \mathbf{R_2} \left\| f(\cdot, x_0, 0, \ldots, 0) \right\|_0 ,$$

с помощью которого можно оценить область, в которой лежат как функции $x_0(t), \ldots,$ $x_n(t), \ldots,$ так и их производные до порядка $p-1$ включительно, и искусственном изменении функции $f(t, x, x', \ldots, x^{(p-1)})$ вне области (52) таким образом, чтобы для новой функции были выполнены условия Теоремы 1. Так как полученные приближения лежат в области (52), то они будут сходиться к решению исходной задачи.

Следует отметить, что Теоремы 1,2 могут рассматриваться не как теоремы о сходимости метода, но как теоремы о существовании и единственности периодического решения уравнения (1).

Изложенный в данной работе метод обладает тем достоинством, что может быть достаточно легко реализован с помощью ЭВМ. Это возможно сделать, представляя периодические приближения в виде отрезков ряда Фурье. В некоторых частных случаях возможно полностью отказаться от условия (18), накладываемого на правую часть уравнения (1). Приведенная нами схема метода может быть модифицирована для поиска периодических решений систем неавтономных уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. / Э. Камке — М.: Наука, 1976. — 576 с.

2. *Коддингтон Э.А.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. / Э. А. Коддингтон, Н. Левинсон — М.: ИЛ, 1958. — 476 с.

3. *Ортега Дж.* Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. / Дж. Ортега, В. Рейнболдт — М.: Мир, 1975. — 560 с.

4. *Перов А.И.* Периодические колебания. Учебное пособие. / А. И. Перов — Воронеж, ВГУ, 1973. — 50 с.

5. *Перов А.И.* Периодическая функция Грина и многочлены Бернулли. / А. И. Перов // Известия РАЕН, сер. МММИУ, Т. 4, 2000, № 1—2. — С. 199—213.

6. *Перов А.И.* Об одном методе приближенного отыскания периодических решений систем нелинейных дифференциальных уравнений./ А. И. Перов //Вестник факультета прикладной математики и механики. Вып. 4. — Воронеж: ВГУ, 2003. — С. 89—97.

7. *Портнов М.М.* Об одном методе отыскания периодических решений./ М.М. Портнов // Современные методы теории функций и смежные проблемы. Тезисы докладов. — Воронеж, 2003. — С. 188—189.

8. *Портнов М.М.* Об одном методе построения приближенных периодических решений./ М.М. Портнов // Вестник факультета прикладной математики и механики. Вып. 4. — Воронеж: ВГУ, 2003. — С. 108—124.

9. *Розенвассер Е.Н.* Колебания нелинейных систем./ Е. Н. Розенвассер — М.: Наука, 1969. — 576 с.

10. *Харди Г.Г.* Неравенства./Г. Г. Харди, Д. Е. Литтльвуд, Г. Полиа — М.: ГИИЛ, — 1948. — 456 с.

11. *Хейл Дж.* Колебания в нелинейных системах. / Дж. Хейл — М.:Мир, 1966. — 234 с.

12. *Чезари Л.* Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. / Л. Чезари — М.: ГИИЛ, 1964. — 480 с.