УДК 517.927

О НЕОСЦИЛЛЯЦИИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ИЗ ЗАДАЧИ О СТИЛЬТЬЕСОВСКОЙ СТРУНЕ*

© 2004 Ю. В. Покорный, С. А. Шабров, М. Б. Зверева, А. С. Ищенко

Воронежский государственный университет

В работе исследуется вопрос о неосцилляции на [0,1] уравнения $-pu'(x)+\int\limits_0^x udQ = const$, где $p(x)$, $Q(x)$ — функции ограниченной вариации, $u(x)$ — абсолютно непрерывная функция, производная которой u' имеет ограниченную вариацию; интеграл понимается по Стильтьесу. Получен аналог теоремы о неосцилляции для уравнения Якоби.

1. Рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение

$$-pu'(x)+\int\limits_0^x u(s)dQ(s) = F(x)+const, \qquad (1)$$

где $p(x)$, $Q(x)$ и $F(x)$ — функции ограниченной вариации на [0,1], причем мы будем предполагать, что p, Q и F непрерывны в точках $x=0$ и $x=1$, а $p(x)>0$ при $x\in[0,1]$. Решение $u(x)$ уравнения (1) мы рассматриваем в классе E абсолютно непрерывных на [0,1] функций, производные которых имеют ограниченную вариацию на [0,1]. Интеграл в (1) понимается по Стильтьесу.

Подобное уравнение в форме

$$-u'_+(x) = u'_-(0) - \lambda\int\limits_0^{x+0} u(s)dM(s)$$

служило М. Г. Крейну [2] и его ученикам для описания амплитудной функции, соответствующей малым свободным колебаниям струны с частотой $\omega=\sqrt{\lambda}$. Здесь функция $M(x)$ определяет распределение масс вдоль струны, т.е. $M(x)$ — суммарная масса струны слева от точки x.

Для стильтьесовской струны функция $p(x)$ из уравнения (1) характеризует локальное натяжение, $Q(x)$ определяется упругой реакцией на $[0,x]$ внешней среды, а $F(x)$ — там же приложенная внешняя нагрузка.

2. Приведем сначала вариационную мотивацию уравнения (1). Для нас струна — невесомая упругая нить, натянутая вдоль отрезка [0,1]. Предположим, что концы струны жестко закреплены. Будем рассматривать поперечные деформации в одной плоскости. Через $u(x)$ обозначим отклонение точки x от положения равновесия под влиянием внешней силы, общую величину которой левее точки x обозначим через $F(x)$. На элемент $[x,x+\Delta x]$ струны тогда действует сила $dF(x)=F(x+\Delta x)-F(x)$, совершая работу udF при смещении элемента $[x,x+\Delta x]$ на $u(x)$. Общая энергия, затрачиваемая силой F на придание струне формы $u(x)$, определяется как $\int\limits_0^1 udF$. Пусть $Q(x)$ определяет распределение упругой реакции внешней среды. Тогда общая энергия, затрачиваемая внешней силой упругости, равна $\int\limits_0^1 \frac{u^2}{2}dQ$. Внутренняя энергия, накапливаемая струной за счет собственной упругости, выражается интегралом $\int\limits_0^1 \frac{pu'^2}{2}dx$, что в целом приводит к общей потенциальной энергии

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Минобразования России на поддержку научно-исследовательской работы аспирантов высших учебных заведений № А03-2.8-65 (КЦ СПбГУ), Минобразования РФ (КЦ СПбГУ) (грант №Е02-1.0-46), РФФИ (гранты № 04-01-00049, 02-01-00307), программы «Университеты России» (проект УР.04.01.004) и гранта президента РФ на поддержку ведущих научных школ № НШ-1643.2003.1.

$$\Phi(u) = -\int_0^1 \frac{pu'}{2} du - \int_0^1 \frac{u^2}{2} dQ + \int_0^1 u dF. \qquad (2)$$

Мы рассматриваем функционал (2) на множестве функций из E, удовлетворяющих условиям $u(0) = u(1) = 0$. Минимизируя (по схеме Лагранжа) функцию $\varphi(\lambda) = \Phi(u_0 + \lambda h)$, где u_0 — реальная форма, принятая струной, h — произвольная допустимая ее вариация, и проинтегрировав по частям интеграл $\int_0^1 pu_0' dh$, получим, что

$$\int_0^1 h d(pu_0' - \int_0^x u_0 dQ + F) = 0.$$

Тогда из леммы Дю-Буа–Реймонда следует, что реальная форма струны должна удовлетворять уравнению (1).

3. Проведем необходимые пояснения относительно уравнения (1). Обозначим через $S(z)$ — множество точек разрыва функции $z(x)$, и через $\Delta z(\xi)$ — скачок функции z в точке ξ, т.е. $\Delta z(\xi) = z(\xi + 0) - z(\xi - 0)$. Пусть $S = S(Q) \cup S(F) \cup S(p)$, т.е. множество S содержит точки разрыва функций Q, F, p. Из (1) следует, что если $\xi \in S$, то

$$\Delta pu'(\xi) = u(\xi)\Delta Q(\xi) - \Delta F(\xi). \qquad (3)$$

Воспользовавшись [2], заметим, что производная $u'(x)$ определена и удовлетворяет (1), если $x \notin S$. Если же $x \in S$, то определены правая и левая производные $u'_+(x)$, $u'_-(x)$, причем $u'_+(x) = u'(x+0)$, а $u'_-(x) = u'(x-0)$. Другими словами, если $\xi \in S$, то правая и левая производные связаны между собой соотношением (3). Для всех $x \in (0,1)$ правая и левая производные удовлетворяют соответственно уравнениям:

$$-p(x+0)u'_+(x) + \int_0^{x+0} udQ = F(x+0) + const,$$

$$-p(x-0)u'_-(x) + \int_0^{x-0} udQ = F(x-0) + const,$$

где $\int_0^{x+0}$ — интеграл по промежутку $[0, x]$, а $\int_0^{x-0}$ — по промежутку $[0, x)$.

Для устранения возможных недоразумений связанных с интерпретацией уравнения (1), мы предлагаем следующую конструкцию. Каждую точку $\xi \in S$ заменим парой $\{\xi - 0, \ \xi + 0\}$, и обозначим полученное множество через $\overline{[0,1]}$. Тогда для всех $x \in \overline{[0,1]}$ уравнение (1) корректно определено в установленном выше смысле.

4. Далее нам потребуется следующая

Теорема 1. Для любых u_0, v_0 и любой точки $x_0 \in \overline{[0,1]}$ уравнение (1) имеет единственное решение, удовлетворяющее условиям

$$u(x_0) = u_0, \ u'(x_0) = v_0. \qquad (4)$$

Доказательство. Выразим из (1) константу, используя условие (4). Тогда (1) примет вид

$$pu'(x) = \int_{x_0}^x udQ - F(x) + F(x_0) + p(x_0)v_0.$$

С учетом $u(x_0) = u_0$, получим, $u(x) = z(x) + Au(x)$, где $z(x) = u_0 + \int_{x_0}^x \frac{p(x_0)v_0 - F(t) + F(x_0)}{p(t)} dt$, $Au(x) = \int_{x_0}^x \frac{1}{p(t)} (\int_{x_0}^t u(s)dQ(s))dt$. Заметим, что из ограниченности вариации функций F, p и условия $p > 0$ вытекает, что $z \in C[0,1]$. Оператор A действует из $C[0,1]$ в $C[0,1]$.

Тогда из оценки

$$\left|A^n u(x)\right| \le \left(\frac{Var(Q)}{\inf\limits_{[0,1]} p} \right)^n \frac{\|u\| \cdot |x - x_0|^n}{n!},$$

справедливой для всех $u \in C[0,1]$ (доказывается индукцией по n с использованием стандартных свойств интеграла Стильтьеса), следует равномерная сходимость на [0, 1] ряда Неймана к единственному решению задачи (1), (4).

5. Уравнение (1) напоминает своими свойствами обыкновенное дифференциальное уравнение. Аналогом однородного уравнения является

$$-pu'(x) + \int_0^x u(s)dQ(s) = const. \qquad (5)$$

Если Q — абсолютно непрерывна, то дифференцирование равенства (5) приведет нас, очевидно, к уравнению

$$-(pu')' + Q'u = 0.$$

Ситуация, рассматриваемая в нашем контексте, допускает функции $Q(x)$, имеющие не только скачки, приводящие к δ — образным особенностям у Q', но и сингулярные компоненты у $Q(x)$ типа лестницы Кантора.

Заметим, что всякое нетривиальное решение уравнения (5) может иметь лишь конечное число нулей. Из теоремы 1 следует, что все нули нетривиального решения простые, т.е. равенство $u(\xi)=0$ влечет за собой $u'(\xi \pm 0) \neq 0$.

6. Будем называть уравнение (5) неосциллирующим на [0, 1], если всякое нетривиальное решение (5) имеет на [0, 1] не более одного нуля.

Теорема 2. Для неосцилляции (5) достаточно, чтобы функция $Q(x)$ монотонно неубывала.

Доказательство. Предположим, что α и β — соседние нули нетривиального решения уравнения (5). Будем считать, что $u(x)>0$ при $x \in (\alpha, \beta)$. Перепишем уравнение (5) в виде

$$pu'(x) = \int\limits_{\alpha+0}^{x} u(s)dQ(s) + pu'(\alpha+0).$$

Из последнего равенства вытекает, что $u(x)$ строго возрастает на (α,β), что противоречит предположению $u(\alpha)=u(\beta)=0$.

Далее нам потребуется аналог теоремы Штурма о перемежаемости нулей.

Теорема 3. Для любых двух линейно независимых решений φ_1, φ_2 уравнения (5) их нули в [0, 1] перемежаются.

Доказательство. Пусть ξ_1 и ξ_2 — соседние нули решения φ_1. Можем считать, что $\varphi_1(x)>0$ на (ξ_1,ξ_2). Предположим, что φ_2 не имеет нулей на $[\xi_1,\xi_2]$. Тогда можем считать, что $\varphi_2(x)>0$ при $x\in[\xi_1,\xi_2]$. Заметим, что найдется точка $\theta \in (\xi_1,\xi_2)$ такая, что для всех $x\in[\xi_1,\xi_2]$ выполняется $\dfrac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} \le \dfrac{\varphi_1(\theta)}{\varphi_2(\theta)}$. Обозначив через $\lambda = \dfrac{\varphi_1(\theta)}{\varphi_2(\theta)}$, рассмотрим функцию $h=\lambda\varphi_2-\varphi_1$. Так как θ — точка локального минимума функции $h(x)$, то одна из производных $h'(\theta\pm 0)$ заведомо равна нулю, что в силу теоремы 1 влечет $h\equiv 0$. Рассуждения упрощаются, если φ_2 обращается в нуль в одной из точек ξ_1,ξ_2.

Следующая теорема является аналогом теоремы о неосцилляции уравнения Якоби из вариационного исчисления.

Теорема 4. Следующие свойства эквивалентны:

1) Уравнение (5) имеет строго положительное на [0, 1] решение;

2) Решение $u(x)$ уравнения (5) при условиях $u(0)=0$, $u'(0)=1$ не имеет других нулей;

3) Уравнение (5) не осциллирует на [0, 1];

4) Для любой монотонно неубывающей функции $F(x)$ существует хотя бы одно строго положительное решение уравнения (1).

Доказательство. Докажем цепочку следствий $1)\Rightarrow 2)\Rightarrow 3)\Rightarrow 4)\Rightarrow 1)$.

1)⇒2). Пусть $\varphi(x)$ — положительное решение уравнения (5). Если решение $u(x)$ из 2) обращается в нуль в точке $\eta\in(0,1]$, то по теореме 3, $\varphi(x)$ обязано иметь на $(0,\eta)$ нуль, что невозможно.

2)⇒3). Если существует решение $v(x)$, которое в точках η_1 и η_2 обращается в нуль, то функция $u(x)$ из 2) обязана иметь нуль на (η_1,η_2), что невозможно.

3)⇒4). Пусть $v(x)$ — решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям $v(0)=v'(0)=0$. Пусть $M>0$ такое, что для всех $x\in[0,1]$ $|v(x)|\le M$. Пусть φ_1 — решение уравнения (5), удовлетворяющее условиям $\varphi_1(0)=0$, $\varphi_1'(0)=1$, а φ_2 — решение уравнения (5) удовлетворяющее условиям $\varphi_2(1)=0$, $\varphi_2'(1)=-1$. Заметим, что функции φ_1 и φ_2 строго положительные на (0, 1] и [0, 1) соответственно. Тогда найдется точка $\eta\in(0,1)$ такая, что $\varphi_1(\eta)=\varphi_2(\eta)$. Легко проверить, что функция

$$u(x) = v(x) + \frac{M}{\min\limits_{[\eta,1]}\varphi_1}\varphi_1(x) + \frac{M}{\min\limits_{[0,\eta]}\varphi_2}\varphi_2(x)$$

является искомым положительным решением уравнения (1).

Следствие **4)⇒1)** очевидно.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аткинсон Ф.* Дискретные и непрерывные граничные задачи. — М.: Мир, 1991.

2. *Кац И.С., Крейн М.Г.* Дополнение 2 к книге [1]. С. 648—733.

3. *Покорный Ю.В.* Интеграл Стилтьеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях //ДАН., 1999. — Т. 364, № 2. С. 167—169.

4. *Покорный Ю.В.* О дифференциалах Стилтьеса в обобщенной задаче Штурма-Лиувилля // ДАН, 2002. Т.383, №5. С.1—4.