*УДК 517.925.52*

# МЕТОД НАПРАВЛЯЮЩИХ ФУНКЦИЙ В МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

**© 2004 А. И. Перов**

*Воронежский государственный университет*

Изучается поведение траекторий динамической системы при условии, что она имеет направляющую функцию, т.е. функцию, возрастающую вдоль любой траектории, проходящей через некоторое открытое множество фазового пространства. Показывается, что динамически предельные точки не могут лежать в указанном открытом множестве, и приводятся условия существования траекторий, устойчивых по Лагранжу.

В статье впервые дается определение направляющих функций (функционалов) для динамических систем, рассматриваемых в произвольных локально компактных метрических пространствах. Основные сведения по динамическим системам можно найти в книге [5], обозначения и определения из которой мы постоянно будем использовать. Метод направляющих функций был предложен в статье [4], где он был применен в проблеме существования периодических решений нестационарных (неавтономных) систем обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений. Здесь мы ставим перед собой несколько иную задачу: мы хотим выяснить поведение всех траекторий динамической системы, если известно, что она обладает направляющей функцией, имеющей те или иные свойства.

В учебнике [3] в первой главе представлен обширный материал подобного сорта, но он имеет локальную направленность и группируется вокруг вопросов устойчивости инвариантных множеств. Отметим, что в другом учебнике [6] изложены интересные факты теории динамических систем, представленных стационарными системами обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений в конечномерном евклидовом пространстве. Изложенная ниже теория применима не только к описанным выше уравнениям, но и к произвольным гладким потокам на дифференциальных многообразиях, снабженных римановой метрикой [1].

Начало и конец доказательства обозначаются соответственно □ и ■.

В фазовом пространстве $R$, которое мы считаем произвольным локально компактным метрическим пространством, рассмотрим динамическую систему $f(p,t)$.

Предположим, что имеется разложение фазового пространства

$$R = K \cup G, \tag{1}$$

где $K$ и $G$ — некоторые непустые взаимно непересекающиеся множества, причем $K$ замкнуто, а $G$ открыто. В дальнейшем важную роль играет *граница* $\partial K$ множества $K$. Это замкнутое множество мы считаем непустым; отметим формулы

$$\partial K = \partial G = \bar{G} \setminus G = K \cap \bar{G}. \tag{2}$$

Пусть $u : \bar{G} \to R$ есть произвольная непрерывная функция (по терминологии [3]–непрерывный функционал). Согласно (2) множество $\partial K$ лежит в $\bar{G}$ и потому функция $u(p)$ определена во всех точках множества $\partial K$. Введем числа

$$\begin{aligned} m &= \inf\{u : u = u(p), p \in \partial K\}, \\ M &= \sup\{u : u = u(p), p \in \partial K\}. \end{aligned} \tag{3}$$

Ясно, что $m \le M$. В общем случае они могут быть и бесконечными. Мы ограничимся тем случаем, когда оба числа являются конечными.

Если множество $K$ является компактным, то $\partial K$ также есть компактное множество. По обобщенной теореме Вейерштрасса непрерывная на компактном множестве $\partial K$ функция $u(p)$ ограничена и достигает наименьшего и наибольшего значений. В этом случае в формулах (3) вместо $\inf$ и $\sup$ можно писать $\min$ и $\max$.

Отметим, хотя этот факт и не будет нами использован, что функцию $u(p)$ можно считать заданной и непрерывной на всем пространстве $R$ — для этого ее достаточно продолжить с сохранением непрерывности и границ $m \le u(p) \le M$ с замкнутого множества $\partial K$ на всё множество $K$ (см. (2) и (3)). Такую возможность предоставляет теорема Титце−Урысона [2].

Теперь мы можем дать наше основное определение. Если $f(p,t) \in \bar{G}$ при $\alpha \le t \le \beta$, то мы всегда можем рассмотреть непрерывную функцию

$$u(t) \equiv u(f(p,t)), \;\; \alpha \le t \le \beta. \tag{4}$$

Мы скажем, что $u$ является *направляющей* функцией для расматриваемой динамической системы, если из

$$f(p,t) \in \bar{G} \text{ при } \alpha \le t \le \beta, \tag{5}$$

$$f(p,t) \in G \text{ при } \alpha < t < \beta, \tag{6}$$

вытекает, что функция $u(t)$ является возрастающей:

$$\text{если } \alpha \le s < t \le \beta, \text{ то } u(s) < u(t). \tag{7}$$

Развиваемая нами теория тесно связана с замкнутым множеством

$$\begin{aligned} F &= K \cup \{p \in G : m \le u(p) \le M\} = \\ &= K \cup \{p \in \bar{G} : m \le u(p) \le M\}. \end{aligned} \tag{8}$$

По аналогии с исходным разложением (1) напишем новое разложение

$$R = F \cup E, \tag{9}$$

где $F$ и $E$ — некоторые взаимно непересекающиеся множества, причем $F$ замкнуто, а $E$ открыто. Множество $E$ есть дополнение к множеству $F : E = R \setminus F$, и $E = G \setminus F$. Для границы $\partial F$ множества $F$ справедливы формулы

$$\partial F = \partial E = \bar{E} \setminus E = F \cap \bar{E} \tag{10}$$

(сравни с (2)). В общем случае

$$E = \{p \in G : u(p) < m\} \cup \{p \in G : u(p) > M\}, \tag{11}$$

причем одно из слагаемых может оказаться и пустым.

Отметим важные частные случаи. Если нет точек $p$ из $G$, в которых $u(p) < m$, т.е.

$$\{p \in G : u(p) < m\} = \varnothing, \tag{12}$$

то формулы (8) и (11) принимают соответственно вид

$$\begin{aligned} F &= K \cup \{p \in G : u(p) \le M\} = \\ &= K \cup \{p \in \bar{G} : u(p) \le M\}, \end{aligned} \tag{13}$$

$$E = \{p \in G : u(p) > M\}. \tag{14}$$

Аналогично, если нет точек $p$ из $G$, в которых $u(p) > M$, т.е.

$$\{p \in G : u(p) > M\} = \varnothing, \tag{15}$$

то формулы (8) и (11) принимают соответственно вид

$$\begin{aligned} F &= K \cup \{p \in G : u(p) \ge m\} = \\ &= K \cup \{p \in \bar{G} : u(p) \ge m\} \end{aligned} \tag{16}$$

$$E = \{p \in G : u(p) < m\}. \tag{17}$$

Мы оставляем в стороне тот малоинтересный случай, когда оба слагаемых в (11) являются пустыми, т.е. $E = \varnothing$.

Напомним, что траектория $f(p,t)$ (и точка $p$) называется *уходящей в положительном направлении*, если у нее нет $\omega$-предельных точек, т.е.

$$D^{+}(p) = \varnothing. \tag{18}$$

Покажем, что *траектория $f(p,t)$ является уходящей в положительном направлении в том и только в том случае, если для любого компактного множества $C$ можно указать такое $t = t(C)$, что*

$$f(p,t) \bar{\in} C \;\; \text{при} \;\; t(C) < t < +\infty. \tag{19}$$

□ Покажем, что из (18) вытекает (19). Предположим обратное, т.е. предположим, что (18) выполнено, а (19) места не имеет. Последнее означает, что можно указать такое компактное множество $C_0$ и последовательность $t_k \to +\infty$, для которых $f(p,t_k) \in C_0$. Последовательность $q_k \equiv f(p,t_k)$ лежит в компактном множестве $C_0$; поэтому из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $q_{k_j} \to r_0$. Мы видим, что $t_{k_j} \to +\infty$ и $f(p,t_{k_j}) \equiv q_{k_j} \to r_0$. Это означает, что $r_0$ есть $\omega$ — предельная точка траектории $f(p,t)$, т.е. $r_0 \in D^{+}(p)$, что по условию (18) невозможно.

Покажем, что и наоборот, из (19) вытекает (18). Предположим обратное: пусть $D^{+}(p) \neq$ и $q_0$ есть $\omega$-предельная точка траектории $f(p,t)$. Тогда существует такая последовательность $t_k \to +\infty$, что $f(p,t_k) \to q_0$. Пусть $p_k \equiv f(p,t_k)$ и $C_0 = \{p_1, \ldots, p_k, \ldots; q_0\}$. Множество $C_0$ компактно и замкнуто, причем $f(p,t_k) \in C_0$ при $k = 1, 2, \dots$ . Мы видим, что для компактного множества $C_0$ условие (19) не выполнено — вопреки сделанному нами предложению. ■

**Теорема 1.** *Если $p \overline{\in} F$, причем $u(p) > M$, то $f(p,t) \overline{\in} F$ при $0 \le t < +\infty$ и траектория $f(p,t)$ является уходящей в положительном направлении.*

*Аналогично, если $p \overline{\in} F$, причем $u(p) < m$, то $f(p,t) \overline{\in} F$ при $-\infty < t \le 0$ и траектория $f(p,t)$ является уходящей в отрицательном направлении.*

Сделаем к этой теореме некоторые пояснения. Если $p \overline{\in} F$, то $p \in K$ (см. (8)) и , значит, $p \in G$. Так как функция $u$ определена на $\bar{G}$, то она определена, конечно, во всех точках множества $G$, так что $u(p)$ имеет смысл. Далее, если $p \overline{\in} F$, то значит $u(p)$ не может лежать в отрезке $[m, M]$. Поэтому либо $u(p) > M$, либо $u(p) < m$. Конечно, каждое из утверждений теоремы предполагает, что точки, обладающие указанными свойствами, существуют.

Утверждениям теоремы 1 можно придать и позитивный смысл: *если $p \in E$, причём $u(p) > M$, то $f(p,t) \in E$ при $0 \le t < +\infty$; аналогично, если $p \in E$, причем $u(p) < m$, то $f(p,t) \in E$ при $-\infty < t \le 0$.*

Мы докажем только первую часть теоремы 1, ибо вторая часть может быть доказана аналогично или выведена из первой ее части.

□ Предположим, что утверждение теоремы неверно. Обозначим через $T$ множество тех $t \ge 0$, для которых $f(p,t) \in F$. Так как $p \overline{\in} F$, то $p \in E$. Множество $E$ открыто и выражение $f(p,t)$ непрерывно по $t$. Поэтому существует такое $\varepsilon > 0$, что $f(p,t) \in E$ при $|t| < \varepsilon$. Итак, $f(p,t) \overline{\in} F$ при $|t| < \varepsilon$. Поэтому $t \ge \varepsilon$ для всех элементов множества $T$. Обозначая через $t_1$ минимальный элемент множества $T$, $t_1 \ge \varepsilon$, получаем

$$f(p,t) \overline{\in} F \text{ при } 0 \le t < t_1;\ p_1 \equiv f(p,t_1) \in F.$$

Мы видим, что выполнено условие (6) с заменой $G$ на $E$, $\alpha = 0$ и $\beta = t_1$. Далее, $p = f(p,0) \overline{\in} F$ и, значит, $p \in E$, а потому $p \in \bar{E}$. Так как $f(p,t) \in E$ при $0 \le t < t_1$, то по непрерывности $p_1 = f(p,t_1) \le M$ . Итак, выполнено и условие (5) с заменой $G$ на $E$.

Рассмотрим непрерывную функцию $u(t) \equiv u(f(p,t))$ на отрезке $0 \le t \le t_1$ (см. (4)). В силу условия теоремы имеем $u(0) = u(f(p,0)) = u(p) > M$. Далее, мы видим, что $p_1 \in F$ и $p_1 \in \bar{E}$. Последнее говорит о том, что $p_1 \in \bar{G}$ и поэтому выражение $u(p_1)$ имеет смысл. Если $p_1 \in G$, то так как $p_1 \in F$, то $m \le u(p_1) \le M$ и $u(p_1) \le M$. Если $p_1 \overline{\in} G$, то $p_1 \in \bar{G} \setminus G = \partial K$ и $m \le u(p_1) \le M$ согласно (3); поэтому $u(p_1) \le M$. Итак, в обоих случаях $u(p_1) \le M$.

С другой стороны в силу условия направляемости (7)

$$M < u(0) < u(t_1) \le M.$$

Полученное противоречие и доказывает наше утверждение.

Так как по доказанному $f(p,t) \overline{\in} F$ при $0 \le t < +\infty$, то непрерывная функция $u(t) \equiv u(f(p,t))$ определена при всех $t \ge 0$ и является возрастающей. Поэтому она имеет предел при $t \to +\infty$, который, вообще говоря, может быть как конечным, так и бесконечным.

Покажем теперь, что положительная полутраектория $f(p,t)$, $0 \le t < +\infty$, не имеет $\omega$-предельных точек. Предположим обратное: тогда существуют такие точка $q \in R$ и последовательность $t_k \to +\infty$, для которых $p_k \equiv f(p,t_k) \to q$.

Тогда $u(t_k) = u(f(p,t_k)) = u(p_k) \to u(q) = c$. Мы видим, что предел $u(t)$ при $t \to +\infty$ конечен и равен $c$. Поэтому $M < u(0) < u(t) < c$ при $0 < t < +\infty$.

Так как $p_k \to q$, то

$$f(p_k,t) \to f(q,t) \text{ локально при } -\infty < t < +\infty,$$

т.е. равномерно на каждом конечном промежутке. Но тогда

$$u(f(q,t)) = \lim_{k\to+\infty} u(f(p_k,t)) = \lim_{k\to+\infty} u(f(f(p,t_k),t)) = \\ = \lim_{k\to+\infty} u(f(p,t+t_k)) = \lim_{k\to+\infty} u(t+t_k) = c,$$

т.е. в этом случае траектория $f(q,t)$ при всех $t$ лежит в множестве $u(r) = c > M$ (на поверхности уровня) и $v(t) \equiv u(f(q,t)) = c$. Мы видим, что функция $v(t)$ является стационарной, т.е. принимающей постоянное значение. С другой стороны, так как траектория $f(q,t)$ целиком лежит в $E$, то в силу условия направляемости (7) функция $v(t)$ должна быть возрастающей. Полученное противоречие говорит о том, что имеет место (18) и траектория $f(p,t)$ является уходящей в положительном направлении. ■

**Теорема 2.** *Пусть $p \in F$ и $0 \le t < +\infty$. Тогда либо*

$$f(p,t) \in F \text{ при } 0 \le t < +\infty, \tag{20}$$

*либо существует такое* $t_1 \ge 0$, *что*

$$f(p,t) \in F \text{ при } 0 \le t \le t_1, \quad f(p,t) \bar{\in} F \text{ при } t_1 < t < +\infty, \tag{21}$$

при этом

$$u(p_1) = M \text{ и } u(t) \equiv u(f(p,t)) > M \text{ при } t_1 < t < +\infty, \tag{22}$$

*где* $p_1 \equiv f(p,t_1)$.

*Пусть* $p \in F$ *и* $-\infty \le t \le 0$. *Тогда либо*

$$f(p,t) \in F \text{ при } -\infty < t \le 0, \tag{23}$$

*либо существует такое* $t_1 \le 0$, *что*

$$f(p,t) \in F \text{ при } t_1 \le t \le 0, \quad f(p,t) \bar{\in} F \text{ при } -\infty < t < t_1, \tag{24}$$

*при этом*

$$u(p_1) = m \text{ и } u(t) \equiv u(f(p,t)) < m \text{ при } -\infty < t < t_1, \tag{25}$$

*где* $p_1 \equiv f(p,t_1)$.

Эта теорема, в частности, говорит о том, что если нет точек $p \in G$, в которых $u(p) > M$, т.е. имеет место (15), то справедливо утверждение (20). Аналогично, если нет точек $p \in G$, в которых $u(p) < m$, т.е. имеет место (12), то справедливо утверждение (23).

□ Пусть утверждение (20) места не имеет. Обозначим через $T$ множество всех тех $t > 0$, для которых $f(p,t) \bar{\in} F$. Это открытое непустое, по предположению, множество в силу теоремы 1 обладает следующим свойством: если $s \in T$, то и все $t \ge s$ также входят в $T$. Поэтому $T = (t_1, +\infty)$, где $t_1 = \inf T$, и справедливы соотношения (21).

Так как $f(p,t) \bar{\in} F$ при $t_1 < t < +\infty$, то $f(p,t) \in E$ при $t_1 < t < +\infty$. По непрерывности $p_1 \equiv f(p,t_1) \in \bar{E}$ и $p_1 \in F$. Так же, как и выше, убеждаемся в том, что $u(p_1) \le M$. С другой стороны, т.к. $f(p,t) \bar{\in} F$ при $t_1 < t < +\infty$, то $u(t) > M$ (остающаяся еще возможность $u(t) < m$ по соображениям непрерывности должна быть отвергнута). Поэтому $u(t_1) = M$ и в силу основного условия (7)

$$M = u(p_1) = u(t_1) < u(t) \text{ при } t_1 < t < +\infty$$

и соотношения (22) установлены. ■

Наше исследование поведения траекторий динамической системы, обладающей направляющей функцией, завершает

**Теорема 3.** *Если* $p \bar{\in} F$ *и* $u(p) > M$, *то либо при некотором* $t = t_1 < 0$ *траектория* $f(p,t)$ *попадает в множество* $F$ *и тогда дальнейшие события при* $-\infty < t < t_1$ *развиваются по сценарию теоремы 2 (вторая часть), либо*

$$f(p,t) \bar{\in} F \text{ при } -\infty < t \le 0. \tag{26}$$

*В этом случае* $u(t) \equiv u(f(p,t))$ *определена при всех* $t \le 0$, *является возрастающей и* $u(t) > M$ *при указанных значениях* $t$. *Поэтому функция* $u(t)$ *имеет конечный предел* $c$ *при* $t \to -\infty$, *причем* $c \ge M$.

*Если имеет место (26), то либо множество всех* $\alpha$*-предельных точек траектории* $f(p,t)$ *пусто,*

$$D^-(p) = \varnothing, \tag{27}$$

*и траектория* $f(p,t)$ *является уходящей в отрицательном направлении, либо множество* $D^-(p)$ *непусто и траектория* $f(p,t)$ *является асимптотической в отрицательном направлении.*

*В последнем случае*

$$u(t) \to M \text{ при } t \to -\infty, \tag{28}$$

$$D^-(p) \subseteq \{q \in \partial K : u(q) = M\}, \tag{29}$$

$$D^-(p) \text{ связное множество}, \tag{30}$$

$$\rho(f(p,t), D^-(p)) \to 0 \text{ при } t \to -\infty. \tag{31}$$

*Утверждения (30) и (31) имеют место при дополнительном предположении, что замкнутое инвариантное множество* $D^-(p)$ *является компактным (т.е. траектория* $f(p,t)$ *является устойчивой по Лагранжу в отрицательном направлении).*

*Если* $p \bar{\in} F$ *и* $u(p) < m$, *то либо при некотором* $t = t_1 > 0$ *траектория* $f(p,t)$ *попадает в множество* $F$ *и тогда дальнейшие события при* $t_1 < t < +\infty$ *развиваются по сценарию теоремы 2 (первая часть), либо*

$$f(p,t) \bar{\in} F \text{ при } 0 \le t < +\infty. \tag{32}$$

*В этом случае* $u(t) \equiv u(f(p,t))$ *определена при всех* $t \ge 0$, *является возрастающей и* $u(t) < m$ *при указанных значениях* $t$. *Поэтому функция* $u(t)$ *имеет конечный предел* $c$ *при* $t \to +\infty$, *причем* $c \le m$.

*Если имеет место (32), то либо множество всех* $\omega$*-предельных точек траектории* $f(p,t)$ *пусто, (18), и траектория* $f(p,t)$ *является уходящей в положительном направлении, либо множество* $D^+(p)$ *непусто* *и траектория $f(p,t)$ является асимптотичной в положительном направлении.*

*В последнем случае*

$$u(t) \to m \text{ при } t \to +\infty, \quad (33)$$

$$D^+(p) \subseteq \{q \in \partial K : u(q) = m\}, \quad (34)$$

$$D^+(p) \text{ связное множество} \quad (35)$$

$$\rho(f(p,t), D^+(p)) \to 0 \text{ при } t \to +\infty. \quad (36)$$

*Утверждения (35) и (36) имеют место при дополнительном предположении, что замкнутое инвариантное множество $D^+(p)$ является компактным (т.е. траектория $f(p,t)$ является устойчивой по Лагранжу в положительном направлении).*

Определение устойчивости по Лагранжу смотри в [5, с. 361—362]. □ Пусть имеет место (26). Полутраектория $f(p,t)$ при $-\infty < t \le 0$ может либо не иметь $\alpha$-предельных точек, т.е. справедливо соотношение (27), и тогда траектория $f(p,t)$ является уходящей в отрицательном направлении, либо $D^-(p) \ne \varnothing$. Т.к. $f(p,t) \in E$ при $-\infty < t \le 0$, то $D^-(p) \subseteq \bar{E}$, но в $E$, как мы видим при доказательстве теоремы 1, нет предельных точек рассматриваемой траектории: $D^-(p) \cap E = \varnothing$. Поэтому $D^-(p) \subseteq \bar{E} \setminus E = \partial F$, как это следует из формулы (10). Уточним последнее включение. Так как $\bar{E} \subseteq \bar{G}$, то множество $D^-(p)$ лежит, конечно, в $\bar{G}$. Далее, как об этом говорит условие (7), множество $D^-(p)$ не только не лежит в $E$, оно не лежит также в множестве $G$, точнее, не пересекается с ним. Поэтому $D^-(p) \subseteq \bar{G} \setminus G = \partial K$. Пусть $q \in D^-(p)$ и $t_k \to -\infty$ такова, что $f(p,t_k) \to q$. Тогда с одной стороны $u(q) = \lim\limits_{k\to+\infty} u(f(p,t_k)) = \lim\limits_{k\to+\infty} u(t_k) \ge M$, а с другой стороны, так как $q \in \partial K$, то $m \le u(q) \le M$ и $u(q) \le M$. Поэтому $u(q) = M$ при $q \in D^-(p)$. Утверждения (28) и (29) установлены (в частности доказано, что $c = M$). Утверждения (30) и (31) для компактного множества $D^-(p)$ хорошо известны. ■

**Теорема 4.** *Пусть замкнутое множество $F$, определяемое формулой (8), является компактным и выполнено одно из условий (12) или (15).*

*Тогда существует по крайней мере одна траектория $f(p^*,t)$, лежащая в множестве $F$ при всех $t$:*

$$f(p^*,t) \in F \text{ при } -\infty < t < +\infty. \quad (37)$$

□ Пусть выполнено условие (12). Тогда, как это следует из теоремы 2, можно утверждать следующее:

$$\text{если } p \in F, \text{ то } f(p,t) \in F \text{ при } -\infty < t \le 0.$$

Поэтому для достижения поставленной цели нам нужно обнаружить такую точку $p^* \in F$, для которой

$$f(p^*,t) \in F \text{ при } 0 \le t < +\infty.$$

Положим $F_0 = F$ и $F_k = f(F,-k)$, $k = 1,2,\dots$. Компактные множества, нами построенные, образуют невозрастающую последовательность

$$F_0 \supseteq F_1 \supseteq \dots \supseteq F_k \supseteq \dots.$$

В силу компактности множества $F$ эта последовательность имеет непустое пересечение

$$F_\infty \equiv F_0 \cap F_1 \cap \dots \cap F_k \cap \dots.$$

Пусть $p^* \in F_\infty$. Тогда $p^* \in F_k$ при любом $k$, т.е. $f(p^*,t) \in F$ при $0 \le t \le k$ для любого натурального $k$. Итак, $f(p^*,t) \in F$ при $0 \le t < +\infty$ при любом $p^* \in F_\infty$. ■

Теорема 4 может быть дополнена утверждением о том, что получающаяся траектория (движение) устойчива по Лагранжу, а потому в ее замыкании обязательно лежит некоторое минимальное множество и, как следствие, некоторая рекуррентная траектория (движение).

Нам осталось сказать несколько слов о границе $\partial F$ множества $F$.

**Теорема 5.** *Если выполнено условие (12), то*

$$\partial F = (\partial K \cap \bar{E}) \cup \{p \in G : u(p) = M\}; \quad (38)$$

*если выполнено условие (15), то*

$$\partial F = (\partial K \cap \bar{E}) \cup \{p \in G : u(p) = m\}; \quad (39)$$

*наконец, в общем случае*

$$\partial F = (\partial K \cap \bar{E}) \cup \{p \in G : u(p) = M\} \cup \cup\{p \in G : u(p) = m\}. \quad (40)$$

□ Мы докажем только формулу (38), ибо остальные формулы (39) и (40) устанавливаются подобными рассуждениями.

Пусть $p \in \partial F$, тогда в силу формулы (10) имеем $p \in F \cap \bar{E}$, откуда следует, что $p \in F$ и $p \in \bar{E}$. Если $p \,\bar{\in}\, G$, то так как $p \in \bar{G}$, ибо из $E \subseteq G$ вытекает, что $\bar{E} \subseteq \bar{G}$, и $p \in \bar{G}$ в силу формулы (2) получаем $p \in \bar{G} \setminus G = \partial K$. Мы видим, что в рассматриваемом случае $p \in \partial K$ и так как, кроме того, $p \in \bar{E}$, то

$p \in \partial K \cap \bar{E}$, и точка $p$ попадает в первое слагаемое справа формулы (38). Если $p \in G$, то так как $p \in F$, то $u(p) \le M$, а так как одновременно $p \in \bar{E}$, то $u(p) \ge M$ (см. формулу (14)). Поэтому $p \in G$ и $u(p) = M$, и точка $p$ попадает во второе слагаемое в формуле (38). Включение в одну сторону доказано. Отметим, что в рассматриваемом случае $u(p) \equiv M$ для $p \in \partial K \cap \bar{E}$.

Докажем обратное включение. Пусть $p$ принадлежит множеству, стоящему справа в формуле (38). Если $p$ входит в первое слагаемое, $p \in \partial K \cap \bar{E}$, то $p \in \partial K$ и $p \in \bar{E}$. Так как $\partial K \subseteq K$ в силу замкнутости множества $K$, то $p \in K \cap \bar{E} \subseteq F \cap \bar{E} = \partial F$ (мы использовали тот факт, что $K \subset F$ и формулу (10)). Итак, если $p$ входит в первое слагаемое, то $p \in \partial F$. Если $p$ входит во второе слагаемое, то $p \in G$ и $u(p) = M$. Отсюда вытекает, во-первых, что $p \in F$ (см. формулу (8)). Покажем, во-вторых, что $p \in \bar{E}$. Так как множество $G$ открыто, то можно указать такое $\varepsilon > 0$, что $f(p,t) \in G$ при $|t| < \varepsilon$. По свойству (7) функция $u(t) \equiv u(f(p,t))$ является возрастающей при $-\varepsilon < t < \varepsilon$. Поэтому $u(0) = u(f(p,0)) = u(p) = M < u(t)$ при $0 < t < \varepsilon$. Мы видим, что $f(p,t) \in E$ при $0 < t < \varepsilon$ и потому $p = f(p,0) = \lim_{0<t\to 0} f(p,t) \in \bar{E}$. Итак, в рассматриваемом случае $p \in F$ и $p \in \bar{E}$, отсюда следует, что $p \in F \cap \bar{E} = \partial F$ — по формуле (10). Мы показали, что если $p$ входит во второе слагаемое, то $p \in \partial F$. Формула (38) доказана. ■

Работа выполнена при поддержке гранта VZ-010-0 «Волновые процессы в неоднородных и нелинейных средах» Минобразования РФ и CRDF (США).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аносов Д.В.* Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны // Труды математического института им. В. А. Стеклова АН СССР. Москва, 1967.

2. *Борисович Ю.Г., Близняков Н.М., Израилевич Я.А., Фоменко Т.Н.* Введение в топологию. М.: Высшая школа. 1980. 296 с.

3. *Зубов В.И.* Устойчивость движения. М.: Высшая школа. 1973. 272 с.

4. *Красносельский М.А., Перов А.И.* Об одном принципе существования ограниченных, периодических и почти-периодических решений у системы обыкновенных дифференциальных уравнений. // ДАН СССР. 1958. Т. 123. № 2. С. 235—238.

5. *Немыцкий В.В., Степанов В.В.* Качественная теория дифференциальных уранвнеий. М.-Л.: ГИТТЛ. 1949. 552 с.

6. *Петровский И.Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука. 1964. 272 с.