ВЕСТНИК ВГУ, Серия физика, математика, 2004, № 1

УДК 514.83+514.7

КЛАССЫ СТАТИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ МАКСВЕЛЛА, ДОПУСКАЮЩИХ ПОДГРУППЫ ГРУППЫ ПУАНКАРЕ

© 2004 М. А. Паринов

Ивановский государственный университет

Под пространством Максвелла понимается пара (M^4, F), где M^4 — 4-мерное пространство Минковского или область в нем, а F — замкнутая внешняя дифференциальная 2-форма на M^4. Описаны классы статических пространств Максвелла, инвариантных относительно подгрупп группы Пуанкаре, найдены представители этих классов.

1. ВВЕДЕНИЕ

В классической теории электромагнитное поле описывается антисимметричным тензором F_{ij} на 4-мерном вещественном многообразии $M \subset \mathbf{R}_1^4$ (области пространства Минковского), удовлетворяющим уравнениям Максвелла [1, § 90]:

$$\partial_{[i}F_{jk]} = 0,\ \nabla_k F^{ik} = -\frac{4\pi}{c} J^i \ \ (i, j, k = 1, \ldots, 4) \quad (1)$$

(для тока J^i должно выполняться уравнение непрерывности: $\nabla_i J^i = 0$).

Под *пространством Максвелла* [2] будем понимать тройку (M, g, F), где M — гладкое вещественное 4-мерное многообразие, $F = \frac{1}{2} F_{ij} dx^i \wedge dx^j$ — обобщенная симплектическая структура на M, $g = g_{ij} dx^i dx^j$ — псевдоевклидова метрика на M лоренцевой сигнатуры $(---+)$. Всюду в дальнейшем будем считать, что $M \subset \mathbf{R}_1^4$. Уравнение $dF = 0$, означающее замкнутость формы F, эквивалентно первому из уравнений Максвелла. При выполнении второго уравнения Максвелла для тензора F_{ij} (и уравнения непрерывности) пространство Максвелла можно понимать как математическую модель электромагнитного поля.

Пусть G_S — группа диффеоморфизмов многообразия M, сохраняющих как g, так и F. Она является подгруппой группы G_g движений пространства Минковского (группы Пуанкаре) и группы G_F симплектоморфизмов структуры (M, F), причем $G_S = G_g \cap G_F$. Пространства Максвелла с нетривиальными группами G_S представляют интерес, например, в связи с известным методом получения первых интегралов уравнений Лоренца [3].

Электромагнитные поля, допускающие группы G_S, активно изучались в 60—70-х годах прошлого столетия [4—9]. Так, в работах [4—6] найдены максимальные подгруппы группы Пуанкаре преобразований, сохраняющих тензор F_{ij} (релятивистские группы симметрий) для конкретных видов полей F_{ij} (однородных, плоских волн и др.), а также исследованы структуры этих подгрупп. В работах [7—9] изучались связные подгруппы группы Пуанкаре, являющиеся инвариантными группами преобразований электромагнитных полей (то же самое, что и релятивистские группы симметрий). В частности, установлено, что размерность такой группы не превосходит шести [9], представлена классификация таких групп [7, 8]. Задача классификации связных подгрупп группы Пуанкаре с точностью до сопряженности решена в работе [10] (вне связи с электродинамикой).

В [11, 12] поставлена проблема классификации пространств Эйнштейна — Максвелла по группам G_S в связи с авторским методом получения первых интегралов уравнений Лоренца [3]. При этом под пространством Эйнштейна—Максвелла понимается более общий объект, чем пространство Максвелла (когда g есть псевдориманова метрика, такая, что пара (M, g) — пространство Эйнштейна [13, 14]). В случае плоской метрики G_g есть группа Пуанкаре, G_S — ее подгруппы, и мы имеем задачу классификации пространств Максвелла по подгруппам группы Пуанкаре. В некотором смысле (см. раздел 2) эта задача решена в [2]. Для статических пространств Максвелла (тензор F_{ij} не зависит от времени) описание классов впервые приведено в работе [15]. В настоящей работе эта классификация уточняется, приводятся в явном виде представители классов.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МЕТОД РЕШЕНИЯ

Прежде всего заметим, что описать класс пространств Максвелла, допускающих группу G_S, можно следующим образом. Пусть L_S — алгебра Ли векторных полей, соответствующая группе G_S. Тензор F_{ij}, задающий этот класс, является решением системы первого из уравнений Максвелла

$$\partial_i F_{jk} + \partial_j F_{ki} + \partial_k F_{ij} = 0 \ (i, j, k = 1, \ldots, 4) \quad (2)$$

и уравнений (условий инвариантности F_{ij} относительно G_S)

$$L_{\xi_\alpha} F_{ij} = 0 \ (\alpha = 1, \ldots, \ p = \dim L_S), \quad (3)$$

где ξ_α — базисные векторы в L_S, а L_{ξ_α} — производная Ли.

Заметим, что ввиду линейности уравнений (2) и (3) множество решений этой системы образует линейное пространство (класс), каждый элемент F_{ij} которого задает пространство Максвелла с группой симметрий не меньше G_S. Однако, на самом деле для некоторых из пространств Максвелла этого класса (иногда для всех) группа симметрий оказывается шире, чем G_S, для которой он найден. Поэтому для нахождения истинной группы симметрий приходится решать уравнение $L_\xi F_{ij} = 0$ относительно $\xi \in \mathcal{L}_g$ при заданном F_{ij} ($\mathcal{L}_g$ — алгебра Ли векторных полей, соответствующая группе G_g [1]) [1]. Алгебра $\mathcal{L}_g$ состоит из векторов вида $\xi^i = a^i_{\cdot j} x^j + b^i$, где $a^i_{\cdot j} = g^{ik} a_{kj}$, а $a_{kj} = -a_{jk}$ и b^i произвольные действительные числа. Пространство его решений и будет алгеброй Ли группы симметрий.

Заметим далее, что группа Пуанкаре имеет бесконечное множество подгрупп, поэтому невозможно составить список классов пространств Максвелла, инвариантных относительно G_S. Однако, можно выделить конечное множество подгрупп, в некотором смысле типичных, и для них описать классы пространств Максвелла. Таким естественно получаемым множеством является список представителей классов сопряженных подгрупп группы Пуанкаре. Действительно, если подгруппа G'_S сопряжена с G_S, то существует такое преобразование координат $A \in G_g$, $x^i = A^i_{i'} x^{i'} + a^i$, что $G'_S = A^{-1} G_S A$. Это означает, что класс пространств Максвелла с группой симметрий G_S, задаваемый тензором F_{ij}, переходит в класс с группой симметрий G'_S, задаваемый тензором $F'_{i'j'} = F_{i'j'} = F_{ij} A^i_{i'} A^j_{j'}$.

Примем за основу классификацию подгрупп группы Пуанкаре с точностью до сопряженности, представленную в работе И. В. Белько [10]. Список подалгебр размерностей от 1 до 6 алгебры $\mathcal{L}_g$ группы Пуанкаре содержит 76 пунктов, в некоторых из которых более одной алгебры. Алгебры будем обозначать $\mathcal{L}_{p,q}$ (p — размерность алгебры, q — номер в списке подалгебр размерности p), добавляя в случае необходимости к числу q букву $a, b, c, \ldots$. Задача описания классов пространств Максвелла сводится к решению для каждой подалгебры $\mathcal{L}_{p,q}$ системы уравнений (2)—(3).

Обозначим через $C_{p,q}$ класс пространств Максвелла, соответствующий алгебре $\mathcal{L}_{p,q}$. Очевидно, что если алгебры $\mathcal{L}_{p_1,q_1}$ и $\mathcal{L}_{p_2,q_2}$ связаны включением $\mathcal{L}_{p_1,q_1} \subset L_{p_2,q_2} (p_1 < p_2)$, то соответствующие классы связаны обратным включением: $C_{p_2,q_2} \subset C_{p_1,q_1}$. Возьмем базис алгебры Ли группы Пуанкаре в виде:

$$e_1 = (1,0,0,0), \ e_2 = (0,1,0,0), \ e_3 = (0,0,1,0), \ e_4 = (0,0,0,1),$$

$$e_{12} = (-x^2, x^1, 0, 0), \ e_{13} = (x^3, 0, -x^1, 0), \ e_{23} = (0, -x^3, x^2, 0),$$

$$e_{14} = (x^4, 0, 0, x^1), \ e_{24} = (0, x^4, 0, x^2), \ e_{34} = (0, 0, x^4, x^3).$$

Здесь $\{x^i\}$ — галилеевы координаты (в которых $g_{ij} = \mathrm{diag}(-1, -1, -1, 1)$). Выражение $L\{\xi_1, \ldots, \xi_p\}$ всюду означает линейную оболочку векторов $\xi_1, \ldots, \xi_p$.

В монографии автора [2] описаны все классы пространств Максвелла, инвариантные относительно подгрупп из списка И. В. Белько. Однако, в ряде случаев эти классы заданы системами дифференциальных уравнений, и вопрос о непустоте этих классов остался открытым. Для его решения достаточно указать примеры пространств Максвелла, допускающих группы $G_{p,q}$ (группа $G_{p,q}$ соответствует алгебре $\mathcal{L}_{p,q}$). В настоящей работе это сделано для статических пространств Максвелла, т.е. пространств, допускающих смещения вдоль оси времени (минимальная из подалгебр $\mathcal{L}_S^{\min} = L\{e_4\}$).

Поиск представителей классов в случае их неявного описания осуществлялся по следующей схеме. Для каждой группы $G_{p,q}$ был описан класс $P_{p,q}$ потенциалов (ковекторных полей на M) A_i, инвариантных относительно этой группы, т.е. удовлетворяющих условию $L_{\xi_\alpha} A_i = 0$ $(\alpha = 1,\dots,p)$, найден представитель этого класса, допускающий именно эту группу (не шире!), для него найден тензор

$$F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i \tag{4}$$

и проверено, что его группа G_S совпадает с $G_{p,q}$. Обозначения групп, алгебр и классов совпадают с теми, что используются в работе [2]. Классы $P_{p,q}$ для полей A_i, инвариантных относительно трансляций вдоль оси Ox^4, описаны в явном виде Н. А. Варниковой в ее дипломной работе (2003 г.).

В случае явного описания классов $C_{p,q}$ классификация потенциалов не использовалась, а поиск представителей осуществлялся путем решения уравнения $L_\xi F_{ij} = 0$ относительно $\xi \in \mathcal{L}_g$.

3. КЛАССЫ СТАТИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ МАКСВЕЛЛА

1°. *Класс* $C_{1,1b}$. Алгебра $\mathcal{L}_{1,1b} = L\{e_4\}$ соответствует 1-мерной группе смещений в направлении времениподобного вектора. Уравнение (3) для вектора $\xi_\alpha = e_4$ имеет вид: $\partial_4 F_{ij} = 0$. Поэтому компоненты тензора F_{ij} не зависят от x^4: $F_{ij} = F_{ij}(x^1,x^2,x^3)$. Уравнение (2) принимает вид:

$$\begin{gathered}\partial_1 F_{24} - \partial_2 F_{14} = 0,\ \partial_1 F_{34} - \partial_3 F_{14} = 0,\\ \partial_2 F_{34} - \partial_3 F_{24} = 0,\ \partial_1 F_{23} + \partial_2 F_{31} + \partial_3 F_{12} = 0.\end{gathered} \tag{5}$$

Набор условий (5) *задает класс* $C_{1,1b}$ *статических пространств Максвелла*. В классических векторных обозначениях

$$\begin{gathered}\mathbf{E} = (E_1,E_2,E_3) = (F_{41},F_{42},F_{43}),\\ \mathbf{H} = (H_1,H_2,H_3) = (F_{32},F_{13},F_{21})\end{gathered} \tag{6}$$

система уравнений (5) имеет вид:

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0,\quad \operatorname{div}\mathbf{H} = 0. \tag{7}$$

Из последних уравнений, в частности, следует, что *класс* $C_{1,1b}$ *содержит все электростатические и магнитостатические поля.*

Класс $P_{1,1b}$ потенциалов, инвариантных относительно группы $G_{1,1b}$, состоит из полей вида $A_i = A_i(x^1,x^2,x^3)$. Полагая $A_1 = A_2 = A_3 = 0$, $A_4 = \Phi(x^1,x^2,x^3)$ в формуле (4), получим общий вид электростатического поля:

$$F_{12} = F_{13} = F_{23},\ F_{\alpha 4} = \partial_\alpha \Phi\ (\alpha = 1,2,3). \tag{8}$$

Легко проверяется следующее утверждение.

Если частные производные $\partial_\alpha \Phi$ *и* $\partial_1\partial_\alpha \Phi$ $(\alpha = 1,2,3)$ *линейно независимы, то пространство Максвелла, определяемое тензором* (8), *допускает 1-мерную группу* $G_S = G_{1,1b}$.

Например, эти условия выполнены для функции $\Phi = x^1(x^1 + x^2 x^3)$.

2°. *Класс* $C_{2,1b}$. $\mathcal{L}_{2,1b} = L\{e_2, e_4\}$. Так как $\mathcal{L}_{1,1b} \subset \mathcal{L}_{2,1b}$, то класс $C_{2,1b}$ является подклассом класса $C_{1,1b}$. Добавляя к уравнениям (5) уравнение $L_{e_2} F_{ij} = \partial_2 F_{ij} = 0$, получим систему

$$\begin{gathered}\partial_1 F_{24} = \partial_3 F_{24} = 0,\ \partial_1 F_{34} - \partial_3 F_{14} = 0,\\ \partial_1 F_{23} + \partial_3 F_{12} = 0,\end{gathered} \tag{9}$$

где $F_{ij} = F_{ij}(x^1,x^3)$. Ее решение имеет вид

$$\begin{gathered}F_{12} = \frac{\partial\Phi}{\partial x^1},\ F_{13} = F_{13}(x^1,x^3),\ F_{23} = -\frac{\partial\Phi}{\partial x^3},\\ F_{14} = \frac{\partial\Psi}{\partial x^1},\ F_{24} = const,\ F_{34} = \frac{\partial\Psi}{\partial x^3},\end{gathered} \tag{10}$$

где $F_{13}(x^1,x^3)$, $\Phi(x^1,x^3)$, $\Psi(x^1,x^3)$ — произвольные гладкие функции. Таким образом, *тензор* F_{ij} *класса* $C_{2,1b}$ *задается формулами* (10).

Для получения примера электростатического поля с группой симметрий $G_S = G_{2,1b}$ положим в (10) $F_{13} = \Phi = F_{24} = 0$:

$$\begin{gathered}F_{12} = F_{13} = F_{23} = F_{24} = 0,\\ F_{14} = \frac{\partial\Psi}{\partial x^1},\ F_{34} = \frac{\partial\Psi}{\partial x^3}\ \ (\Psi = \Psi(x^1,x^3)).\end{gathered} \tag{11}$$

Если частные производные $\partial_1\Psi$, $\partial_3\Psi$, $\partial_1\partial_1\Psi$, $\partial_1\partial_3\Psi$ *линейно независимы и выполнено одно из неравенств* $x^3\partial_1\partial_1\Psi - x^1\partial_1\partial_3\Psi - \partial_3\Psi \neq 0$ *или* $x^3\partial_1\partial_3\Psi - x^1\partial_3\partial_3\Psi + \partial_1\Psi \neq 0$, *то пространство Максвелла, определяемое тензором* (11), *допускает 2-мерную группу* $G_S = G_{2,1b}$.

Например, эти условия выполнены для функции $\Psi = (x^1)^3 + (x^1)^2 x^3 + x^1 (x^3)^2 + (x^3)^3$.

3°. *Класс* $C_{2,3}$. $\mathcal{L}_{2,3} = L\{e_{13} + \lambda e_2, e_4\}$. *Поле* F_{ij} *определяется формулами* [2, с. 85]

$$\begin{aligned}F_{12} &= c_1\cos\varphi + c_2\sin\varphi,\\ F_{13} &= F_{13}(r,\tilde{x}^2),\\ F_{14} &= c_3\cos\varphi + c_4\sin\varphi,\\ F_{23} &= c_1\sin\varphi - c_2\cos\varphi,\\ F_{24} &= F_{24}(r,\tilde{x}^2),\\ F_{34} &= -c_3\sin\varphi + c_4\cos\varphi,\end{aligned} \tag{12}$$

где функции $F_{13}(r,\tilde{x}^2)$, $F_{24}(r,\tilde{x}^2)$ *и* $c_i = c_i(r,\tilde{x}^2)$ *удовлетворяют уравнениям*

$$\frac{\partial c_1}{\partial r}+\frac{c_1}{r}+\frac{\lambda}{r}\frac{\partial c_2}{\partial \tilde{x}^2}-\frac{\partial F_{13}}{\partial \tilde{x}^2}=0,\quad \frac{\partial F_{24}}{\partial r}-\frac{\partial c_4}{\partial \tilde{x}^2}=0,$$
$$\frac{\partial c_3}{\partial r}+\frac{c_3}{r}+\frac{\lambda}{r}\frac{\partial c_4}{\partial \tilde{x}^2}=0,\quad \frac{\lambda}{r}\frac{\partial F_{24}}{\partial \tilde{x}^2}+\frac{\partial c_3}{\partial \tilde{x}^2}=0, \qquad (13)$$

а связь координат $\{x^i\}$ *и* $\{r,\tilde{x}^2,\varphi,\tilde{x}^4\}$ *задается соотношениями*

$$x^1 = r\sin\varphi,\ x^2 = \lambda\varphi + \tilde{x}^2,$$
$$x^3 = r\cos\varphi,\ x^4 = \tilde{x}^4. \qquad (14)$$

Класс $P_{2,3}$ потенциалов, инвариантных относительно группы $G_{2,3}$, состоит из полей

$$A_1 = b_1\cos\varphi + b_2\sin\varphi,\ A_2 = A_2(r,\tilde{x}^2),$$
$$A_3 = -b_1\sin\varphi + b_2\cos\varphi,\ A_4 = A_4(r,\tilde{x}^2), \qquad (15)$$

где $b_k = b_k(r,\tilde{x}^2)$, $A_2(r,\tilde{x}^2)$ и $A_4(r,\tilde{x}^2)$ — произвольные гладкие функции. Полагая в формуле (4) $A_1 = A_2 = A_3 = 0$, $A_4 = \Phi(r,\tilde{x}^2) \equiv \Phi(t_1,t_2)$, получим следующее множество электростатических полей:

$$F_{12} = F_{13} = F_{23},\ F_{14} = \Phi_1\sin\varphi - \frac{\lambda\Phi_2}{r}\cos\varphi,$$
$$F_{24} = \Phi_2,\ F_{34} = \Phi_1\cos\varphi + \frac{\lambda\Phi_2}{r}\sin\varphi, \qquad (16)$$

где $\Phi_\alpha = \partial\Phi/\partial t_\alpha$. Положим $\Phi_{\alpha\beta} = \partial^2\Phi/\partial t_\alpha\partial t_\beta$. Справедливо следующее утверждение.

Если частные производные Φ_1, Φ_2, Φ_{11}, Φ_{12} *и* Φ_{22} *линейно независимы, то пространство Максвелла, определяемое тензором* (16), *допускает 2-мерную группу* $G_S = G_{2,3}$.

Например, эти условия выполнены для функции $\Phi(t_1,t_2) = t_1^3 + t_2^3 + t_1^2 + t_1t_2 + t_2^2$.

4°. *Класс* $C_{3,1b}$. Алгебра $\mathcal{L}_{3,1b} = L\{e_1,e_2,e_4\}$ является расширением алгебры $L_{2,1b}$. Поэтому $C_{3,1b} \subset C_{2,1b}$. В результате подстановки (10) в уравнение $L_{e_1}F_{ij} = \partial_1 F_{ij} = 0$ и последующего анализа получим *общий вид тензора* F_{ij} *пространства Максвелла класса* $C_{3,1b}$:

$$F_{12} = C_1,\ F_{13} = F_{13}(x^3),\ F_{14} = C_2,$$
$$F_{23} = F_{23}(x^3),\ F_{24} = C_3,\ F_{34} = F_{34}(x^3) \qquad (17)$$

($C_i = const$ и $F_{13}(x^3)$, $F_{23}(x^3)$, $F_{34}(x^3)$ — произвольные гладкие функции).

Для получения примера пространства Максвелла с группой симметрий $G_S = G_{3,1b}$ положим в (17) $C_i = 0$:

$$F_{12} = F_{14} = F_{24} = 0,\ F_{13} = F_{13}(x^3),$$
$$F_{23} = F_{23}(x^3),\ F_{34} = F_{34}(x^3). \qquad (18)$$

Нетрудно получить следующее утверждение.

Если функции $F_{13}(x^3)$, $F'_{13}(x^3)$, $F_{23}(x^3)$ *и* $F_{34}(x^3)$ *линейно независимы, то пространство Максвелла, определяемое тензором* (18), *допускает 3-мерную группу* $G_S = G_{3,1b}$.

Например, эти условия выполнены для функций $F_{13} = x^3$, $F_{23} = \sin x^3$, $F_{34} = \cos x^3$.

5°. *Класс* $C_{3,6}$. $\mathcal{L}_{3,6} = L\{e_{24}+\lambda e_3, e_2, e_4\}$. *Поле* F_{ij} *определяется следующими формулами* [2, с. 85]:

а) *при* $\lambda \neq 0$ *(класс* $C_{3,6a}$*)*

$$F_{12} = -\lambda c'_1(x^1)\frac{x^3}{\lambda} - \lambda c'_2(x^1)\frac{x^3}{\lambda},$$
$$F_{13} = F_{13}(x^1),$$
$$F_{14} = \lambda c'_1(x^1)\frac{x^3}{\lambda} + \lambda c'_2(x^1)\frac{x^3}{\lambda},$$
$$F_{23} = c_1(x^1)\frac{x^3}{\lambda} + c_2(x^1)\frac{x^3}{\lambda}, \qquad (19)$$
$$F_{24} = const,$$
$$F_{34} = c_1(x^1)\frac{x^3}{\lambda} + c_2(x^1)\frac{x^3}{\lambda},$$

где $c_1(x^1)$ *и* $c_2(x^1)$ *— произвольные функции (штрих означает дифференцирование)*;

b) *при* $\lambda = 0$ *(класс* $C_{3,6b}$*)*

$$F_{12} = F_{14} = F_{23} = F_{34} = 0,$$
$$F_{13} = F_{13}(x^1,x^3), \qquad (20)$$
$$F_{24} = \mathrm{const}.$$

Для получения примеров положим в (19) $c_2 = F_{13} = F_{24} = 0$:

$$F_{12} = -\lambda c'_1(x^1)\frac{x^3}{\lambda},$$
$$F_{13} = F_{13}(x^1),$$
$$F_{14} = \lambda c'_1(x^1)\frac{x^3}{\lambda}, \qquad (21)$$
$$F_{23} = c_1(x^1)\frac{x^3}{\lambda},$$
$$F_{24} = 0, F_{34} = c_1(x^1)\frac{x^3}{\lambda}.$$

Справедливы следующие утверждения.

Если функции $c_1(x^1)$ *и* $c_1'(x^1)$ *линейно независимы, то пространство Максвелла, определяемое тензором* (21), *допускает 3-мерную группу* $G_S = G_{3,6a}$.

Если функции $\partial_1 F_{13}$, $\partial_3 F_{13}$ *и* $x^3\partial_1 F_{13} - x^1\partial_3 F_{13}$ *линейно независимы, то пространство Максвелла, определяемое тензором* (20), *допускает 3-мерную группу* $G_S = G_{3,6b}$.

6°. *Класс* $C_{4,1}$. $\mathcal{L}_{4,1} = L\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ *Общий вид тензора* F_{ij} *пространства Максвелла класса* $C_{4,1}$: $F_{ij} = const$ $(i, j = 1, \dots, 4)$. Такие пространства называются *однородными*. Каждое из однородных пространств Максвелла допускает более широкую группу, чем группа трансляций $G_{4,1}$, — 6-мерную подгруппу группы Пуанкаре [2, 16]. Таким образом, *не существует пространств Максвелла с группой симметрий* $G_S = G_{4,1}$.

7°. *Класс* $C_{4,3}$. $\mathcal{L}_{4,3} = L\{e_{13} + \lambda e_2, e_1, e_3, e_4\}$ $(\lambda \neq 0)$. *Поле* F_{ij} *определяется следующими формулами* [2, с. 90—91]:

a) *при* $\lambda \neq 0$ *(класс* $C_{4,3a}$*)*

$$
\begin{aligned}
F_{12} &= a_1 \sin\frac{x^2}{\lambda} - a_2 \cos\frac{x^2}{\lambda},\\
F_{32} &= a_1 \cos\frac{x^2}{\lambda} + a_2 \sin\frac{x^2}{\lambda},\\
F_{14} &= F_{34} = 0,\\
F_{13} &= a_3,\\
F_{24} &= a_4 \ (a_i = const);
\end{aligned}
\tag{22}
$$

b) *при* $\lambda = 0$ *(класс* $C_{4,3b}$*)*

$$
\begin{aligned}
F_{12} &= F_{14} = F_{23} = F_{34} = 0,\\
F_{13} &= \Phi(x^2),\\
F_{24} &= \Psi(x^2),
\end{aligned}
\tag{23}
$$

где $\Phi(x^2)$ *и* $\Psi(x^2)$ *— произвольные гладкие функции.*

Справедливы следующие утверждения.

Если $a_1 \neq 0$ *или* $a_2 \neq 0$, *то пространство Максвелла, определяемое тензором* (22), *допускает 4-мерную группу* $G_S = G_{4,3a}$.

Если функции $\Phi(x^2)$ *и* $\Psi(x^2)$ *линейно независимы, то пространство Максвелла, определяемое тензором* (23), *допускает 4-мерную группу* $G_S = G_{4,3b}$.

8°. *Класс* $C_{4,6}$. $\mathcal{L}_{4,6} = L\{e_{24} + \lambda e_3, e_1, e_2, e_4\}$. *Поле* F_{ij} *определяется следующими формулами* [2, с. 97]:

a) *при* $\lambda \neq 0$ *(класс* $C_{4,6a}$*)* $(\lambda \neq 0)$

$$
\begin{aligned}
F_{23} &= a_1 \frac{x^3}{\lambda} + a_2 \frac{x^3}{\lambda},\\
F_{34} &= a_1 \frac{x^3}{\lambda} + a_2 \frac{x^3}{\lambda},\\
F_{12} &= F_{14} = 0,\\
F_{24} &= a_3,\\
F_{13} &= a_4 \ (a_i = const);
\end{aligned}
\tag{24}
$$

b) *при* $\lambda = 0$ *(класс* $C_{4,6b}$*)*

$$
\begin{aligned}
F_{12} &= F_{14} = F_{23} = F_{34} = 0,\\
F_{13} &= F_{13}(x^3),\\
F_{24} &= \text{const}.
\end{aligned}
\tag{25}
$$

Справедливы следующие утверждения.

Если $a_1 \neq 0$ *или* $a_2 \neq 0$, *а также* $a_3 \neq 0$ *или* $a_4 \neq 0$, *то пространство Максвелла, определяемое тензором* (24), *допускает 4-мерную группу* $G_S = G_{4,6a}$.

Если $F_{13}(x^3) \neq \text{const}$, *то пространство Максвелла, определяемое тензором* (25), *допускает 4-мерную группу* $G_S = G_{4,6b}$.

9°. *Класс* $C_{4,8}$. $\mathcal{L}_{4,8} = L\{e_{12} - e_{14} + \lambda e_3, e_1, e_2, e_4\}$. *Поле* F_{ij} *определяется следующими формулами* [2, с. 86]:

a) *при* $\lambda = 0$ *(класс* $C_{4,8a}$*)*

$$
\begin{aligned}
F_{12} = F_{14} = const,\ F_{13} = F_{14} = 0,\\
F_{23} = -F_{34}(x^3);
\end{aligned}
\tag{26}
$$

b) *при* $\lambda \neq 0$ *(класс* $C_{4,8b}$*)*

$$
\begin{aligned}
F_{12} = F_{14} = C_1,\ F_{24} = 0,\ F_{13} = \frac{C_2}{\lambda}x^3 + C_2,\\
F_{23} = \frac{C_2}{2\lambda^2}(x^3)^2 + \frac{C_3}{\lambda}x^3 C_4,\ F_{34} = -F_{23} - C_2,
\end{aligned}
\tag{27}
$$

где $C_1, \dots, C_4$ — произвольные постоянные.

Справедливы следующие утверждения.

Если $F_{23} \neq const$, то пространство Максвелла, определяемое тензором (26), допускает 4-мерную группу $G_S = C_{4,8a}$.

Если $C_1 \neq 0$ и $C_2 \neq 0$, то пространство Максвелла, определяемое тензором (27), допускает 4-мерную группу $G_S = C_{4,8b}$

10°. *Класс* $C_{4,18}$. $\mathcal{L}_{4,18} = L\{e_{12} - e_{14} + \lambda e_3, e_1, e_2, e_4\}$. *Поле* F_{ij} *определяется следующими формулами* [2, с. 86]:

$$F_{12} = -Ax^3/r^3,\ F_{13} = Ax^2/r^3,$$
$$F_{23} = -Ax^1/r^3, \tag{28}$$
$$F_{14} = x^1C(r),\ F_{24} = x^2C(r),\ F_{34} = x^3C(r),$$

где $A = const$, а $C(r)$ — произвольная функция, а $\{r,\varphi,\theta,x^4\}$ — «сферические» координаты, связанные с координатами $\{x^i\}$ формулами

$$x^1 = r\cos\varphi\cos\theta,\ x^2 = r\sin\varphi\cos\theta,$$
$$x^3 = r\sin\theta. \tag{29}$$

В частности, этот класс включает в себя кулоновское поле, если положить $A = 0$ и $C(r) = K/r^3$ $(R = const)$.

11°. *Алгебрам* $\mathcal{L}_{5,1} = L\{e_{24}, e_1, e_2, e_3, e_4\}$ *и* $\mathcal{L}_{5,2} = L\{e_{13} + \lambda e_{24}, e_1, e_2, e_3, e_4\}$ *соответствует один и тот же класс* $C_{6,2}$ *однородных пространств Максвелла, задаваемых тензорами*

$$F_{12} = F_{14} = F_{23} = F_{34} = 0,$$
$$F_{13} = C_1,\ F_{24} = C_2, \tag{30}$$

где C_1 *и* C_2 — *произвольные константы* [2, с. 86—87].

Если $C_1 \neq 0$ *или* $C_2 \neq 0$, *то пространство Максвелла, определяемое тензором* (30), *допускает 6-мерную группу* $G_S = G_{6,2}$, *соответствующую алгебре* $\mathcal{L}_{6,2} = L\{e_{13}, e_{24}, e_1, e_2, e_3, e_4\}$.

12°. *Алгебре* $\mathcal{L}_{5,3} = L\{e_{12} - e_{14}, e_1, e_2, e_3, e_4\}$ *соответствует класс* $C_{6,3}$ *однородных пространств Максвелла, задаваемых тензорами*

$$F_{12} = F_{14} = C_1,$$
$$F_{23} = -F_{34} = C_2, \tag{31}$$
$$F_{13} = F_{24} = 0,$$

где C_1 *и* C_2 — *произвольные константы* [2, с. 87].

Если $C_1 \neq 0$ *или* $C_2 \neq 0$, *то пространство Максвелла, определяемое тензором* (31), *допускает 6-мерную группу* $G_S = G_{6,3}$, *соответствующую алгебре*

$$\mathcal{L}_{6,3} = L\{e_{12} - e_{14}, e_{23} + e_{34}, e_1, e_2, e_3, e_4\}.$$

13°. *Класс* $C_{5,6}$. $\mathcal{L}_{5,6} = L\{e_{12} - e_{14}, e_{24} + \lambda e_3, e_1, e_2, e_4\}$. *Тензор* F_{ij} *класса* $C_{5,6}$ $(\lambda \neq 0)$ *имеет следующий вид*

$$F_{12} = F_{13} = F_{14} = F_{24} = 0,$$
$$F_{23} = -F_{34} = Ke^{-x^3/\lambda}\ (K = \mathrm{const}). \tag{32}$$

При $\lambda = 0$ этот класс пуст [2, с. 99].

14°. *Для алгебр*

$$\mathcal{L}_{6,4} = L\{e_{12} - e_{14}, e_{24}, e_1, e_2, e_3, e_4\},$$
$$\mathcal{L}_{6,9} = L\{e_{12}, e_{14}, e_{24}, e_1, e_2, e_4\}$$

соответствующие классы пусты [2, с. 87, 100].

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе описаны классы пространств Максвелла, инвариантных относительно подгрупп группы Пуанкаре из списка И. В. Белько, содержащих смещения по времени. Установлено следующее.

1. *Для классов* $C_{p,q}$, *задаваемых подгруппами* $G_{1,1b}$, $G_{2,1b}$, $G_{2,3}$, $G_{3,1b}$, $G_{3,6a}$, $G_{3,6b}$, $G_{4,3a}$, $G_{4,3b}$, $G_{4,6a}$, $G_{4,6b}$, $G_{4,8a}$, $G_{4,8b}$, $G_{4,18}$, $G_{5,6}$, $G_{6,2}$, $G_{6,3}$, *существуют пространства Максвелла с группой симметрий* $G_S = G_{p,q}$.

2. *Для всех пространств Максвелла из классов* $C_{p,q}$, *задаваемых подгруппами* $G_{4,1}$, $G_{5,1}$, $G_{5,2}$ *и* $G_{5,3}$ *группа* G_S *в действительности шире* (во всех случаях 6-мерна).

3. *Не существует пространств Максвелла с группами* G_S, *равными* $G_{6,4}$ *и* $G_{6,9}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля. М. Наука. 1967. 460 с.

2. *Паринов М. А.* Пространства Эйнштейна—Максвелла и уравнения Лоренца. Иваново. Изд-во ИвГУ. 2003. 180 с.

3. *Иванова А. С., Паринов М. А.* Первые интегралы уравнений Лоренца для некоторых классов электромагнитных полей // Тр. МИРАН. им. В. А. Стеклова. 2002. Т. 236. С. 197—203.

4. *Janner A., Ascher E.* Space-time symmetry of linearly polarized electromagnetic plane waves // Lettere nuovo Cimento. 1969. Vol. 2. № 15. P. 703—705.

5. *Janner A., Ascher E.* Space-time symmetry of transverse electromagnetic plane waves // Helv. phys. acta. 1970. Vol. 43. № 3. P. 296—303.

7. *Janner A., Ascher E.* Relativistic symmetry groups of uniform electromagnetic fields // Physica. 1970. Vol. 48. № 3. P. 425—446.

8. *Bacry H., Combe Ph., Sorba P.* Connected subgroups of the Poincare group. I. // Rep. of Math. Phys. 1974. Vol. 5. № 2. P. 145—186.

9. *Bacry H., Combe Ph., Sorba P.* Connected subgroups of the Poincare group. II. // Rep. of Math. Phys. 1974. Vol. 5. № 3. P. 361—392.

10. *Combe Ph., Sorba P.* Electromagnetic fields with symmetry // Physica. 1975. Vol. A80. № 3. P. 271—286.

11. *Белько И. В.* Подгруппы группы Лоренца—Пуанкаре // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1971. № 1. С. 5—13.

12. *Паринов М. А.* Задача групповой классификации электромагнитных полей // Современные методы теории функций и смежные проблемы: Тез. докл. ВЗМШ. Воронеж. ВГУ. 1999. С. 156.

13. *Паринов М. А.* Групповая классификация пространств Максвелла // Современный анализ и его приложения: Тез. докл. ВЗМШ. Воронеж. ВГУ. 2000. С. 129—130.

14. *Бессе А. Л.* Многообразия Эйнштейна. М. 1990. Т. 1—2. 703 с.

15. *Петров А. З.* Пространства Эйнштейна. М. Физматгиз. 1961. 464 с.

16. *Белова О. Г., Зарембо А. Н., Паринов М. А., Сергеева О. О., Угарова Ю. Г.* Классификация статических электромагнитных полей по подгруппам группы Пуанкаре // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. Вып. 3 (2000). С. 11—22.

17. *Parinov M. A.* Classes of Maxwell Spaces Admitting Translations // Contemporary Mathematics and Its Applications. Vol. 10. Suzdal Conference-4, 2003. P. 157—166.