

УДК 621.391

ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НАКАГАМИ ПО КОРРЕЛИРОВАННОЙ ВЫБОРКЕ*

© 2004 В. И. Парфенов

Определены статистические характеристики (N -мерная плотность вероятности и коэффициент корреляции) замирающего радиосигнала. Предложены и проанализированы достаточно простые алгоритмы оценки параметров, характеризующих среднюю мощность и глубину замираний

Передача информации в каналах связи и вещания, использующих свободное распространение радиоволн, всегда сопровождается флуктуациями амплитуды сигнала. Случайные флуктуации уровня сигнала на входе приемника называются замираниями. Обычно разделяют два вида амплитудных флуктуаций — быстрые и медленные замирания [1—3]. Причина быстрых замираний — многолучевая структура сигнала и интерферирующих лучей; причина медленных замираний — затенение первой полузоны Френеля радиосигнала на трассе за счет особенностей рельефа. Так как природа быстрых и медленных замираний различна, то их влияние принято рассматривать отдельно. В дальнейшем речь будет идти о быстрых замираниях. В большинстве случаев плотность распределения вероятности огибающей радиосигнала при быстрых замираниях описывается законом Релея [1—3]. В то же время некоторые опубликованные данные [3, 4] свидетельствуют о том, что уровень сигнала в городских условиях может подчиняться более глубокому замиранию. Причем наиболее глубокие замирания наблюдаются около передающего пункта. Полагают, что это явление связано с интерференцией двух-трех волн примерно одинаковой и относительно большой амплитуды. При этом для описания плотности распределения вероятности огибающей используют закон Накагами с параметрами распределения Ω и m :

$$W(U) = \frac{2m^m U^{2m-1}}{\Omega^m \Gamma(m)} \exp\left(-\frac{mU^2}{\Omega}\right). \quad (1)$$

* Работа выполнена при поддержке CRDF и Минобрнауки РФ (проекты VZ-010-0, T02-3.1-71)

Здесь $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция [5]. Заметим, что, положив в распределении (1) параметр $m = 1$, получим распределение Релея. Таким образом, можно считать, что распределение Накагами является более общим для описания замираний сигнала, особенно в сотовых системах связи, а оценка параметров Ω и m распределения (1) является необходимой для определения характеристик канала связи. Действительно, параметр Ω распределения (1) характеризует среднюю мощность замирающего сигнала, а параметр m — глубину замираний. Известно, например [6], что оценка параметра m имеет особое важное значение в системах радиосвязи с частотной адаптацией. Как показывают расчеты [7], системы радиосвязи, в которых учитываются различия в глубине замираний между частотно-разнесенными радиоканалами, обладают существенным энергетическим выигрышем по сравнению с системами, в которых этими различиями пренебрегают.

В известной литературе [8 и др.], посвященной оценке параметров распределения, синтез и анализ алгоритмов оценки осуществляется в основном в предположении, что наблюдаемая выборка отсчетов огибающей является некоррелированной. Однако, очевидно, подобное предположение в ряде случаев может не выполняться, особенно при увеличении числа отсчетов на интервале наблюдения. В связи с этим представляет интерес анализ влияния степени коррелированности выборки на характеристики оценок параметров Ω и m .

Учтем, что, если случайный процесс удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению в симметризованной форме

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{mN_0}{\Omega} U^{3-4m} + \sqrt{2}U^{1-2m}n(t),$$

$$U > 0, m \geq 1/2,$$

где $n(t)$ — гауссовский белый шум с односторонней спектральной плотностью N_0 , то в соответствии с теоремой Дуба [9] он является марковским случайным процессом с коэффициентами сноса и диффузии вида

$$K_1(U) = -\frac{mN_0}{\Omega} U^{3-4m} + \frac{N_0}{2}(1-2m)U^{1-4m}, K_2(U) =$$

$$= N_0 U^{0(1-2m)}. \text{ Причем стационарное решение уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова совпадает с (1). Следовательно, процесс } U(t) \text{ является марковским процессом с одномерной плотностью вероятности (1) и двумерной плотностью вероятности [10]}$$

$$W_2(U_1, U_2) = \frac{4m^{m+1}(U_1 U_2)^m}{\Omega^{m+1} \Gamma(m) \rho^{m-1} (1-\rho^2)} \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{m}{\Omega} \frac{U_1^2 + U_2^2}{1-\rho^2}\right) I_{m-1}\left(\frac{2\rho m U_1 U_2}{\Omega(1-\rho^2)}\right), \quad (2)$$

$$U_1, U_2 > 0.$$

Здесь $I_{m-1}(\cdot)$ — модифицированная функция Бесселя $(m-1)$ -го порядка [5], $\rho = \rho(|t_1 - t_2|)$ — коэффициент корреляции узкополосного случайного процесса с огибающей $U(t)$.

Учитывая марковские свойства случайного процесса $U(t)$, из (1), (2) можно найти N -мерную плотность распределения вероятности отсчетов огибающей $\vec{U} = \|U_1, U_2, \dots, U_N\|$:

$$W_N(\vec{U}) = \prod_{k=2}^N W_2(U_{k-1}, U_k) / \prod_{k=2}^{N-1} W(U_k) =$$

$$= \frac{2^N m^{m+N-1} U_1^m U_N^{m-1}}{\Gamma(m) \Omega^{m+N-1} [\rho^{m-1} (1-\rho^2)]^{N-1}} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{m}{\Omega(1-\rho^2)} \left[\sum_{k=1}^N U_k^2 + \rho^2 \sum_{k=2}^{N-1} U_k^2\right]\right\} \times \quad (3)$$

$$\times \prod_{k=2}^N U_k I_{m-1}\left(\frac{2m\rho U_{k-1} U_k}{\Omega(1-\rho^2)}\right).$$

Если в (3) положить $\rho = 0$, т.е. считать отсчеты огибающей некоррелированными, то придем к очевидному результату $W_N(\vec{U}) =$

$$= \prod_{k=1}^N W(U_k).$$

Кроме известного выражения для начального момента n -го порядка процесса $U(t)$

$$M_n = \langle U^n \rangle = \left(\frac{\Omega}{m}\right)^{n/2} \frac{\Gamma(m+1/2)}{\Gamma(m)} \quad (4)$$

из (1), (2) можно найти выражение для корреляционной функции этого процесса:

$$K(\tau) = K(|t_1 - t_2|) = \langle U(t_1)U(t_2) \rangle - \langle U(t_1) \rangle \langle U(t_2) \rangle =$$

$$= \frac{\Omega}{m} \left[\frac{\Gamma(m+1/2)}{\Gamma(m)} \right]^2 \{ {}_2F_1(-1/2, -1/2; m; \rho^2) - 1 \}. \quad (5)$$

Здесь ${}_2F_1(\cdot; \cdot; \cdot)$ — гипергеометрическая функция Гаусса [5]. Из (5) также нетрудно получить выражение для коэффициента корреляции процесса $U(t)$:

$$R(\tau) = \frac{K(\tau)}{K(0)} = \left\{ {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; m; \rho^2\right) - 1 \right\} \times$$

$$\times \left\{ m \left[\frac{\Gamma(m)}{\Gamma(m+1/2)} \right]^2 - 1 \right\}^{-1}. \quad (6)$$

В дальнейшем при всех численных расчетах будем полагать, что коэффициент корреляции случайного радиосигнала с огибающей $U(t)$ имеет вид $\rho = \rho(\tau) = \exp(-\alpha|\tau|)$. На рис. 1 изображен коэффициент корреляции (6), как функция от $\alpha\tau$ (при $\tau \geq 0$), для разных значений параметра m . Кривая 1 на этом рисунке построена при $m = 1/2$, кривая 2 — при $m = 1$, кривая 3 — при $m = 10$. На рис. 2 изображен коэффициент корреляции (6), как функция от параметра m , для разных постоянных значений параметра ρ . Так, кривая 1 построена при $\rho = 0.1$, кривая 2 — при $\rho = 0.5$, кривая 3 — при $\rho = 0.9$. Анализ этих рисунков свидетельствует о том, что влияние параметра m на коэффициент корреляции огибающей (6) не значительно, а величина параметра Ω вообще не оказывает никакого влияния на коэффициент корреляции огибающей. Следует также отметить, что при одном и том же значении τ имеет место неравенство $R(\tau) \leq \rho(\tau)$.

Перейдем теперь к отысканию оценок параметров Ω и m распределения (3). При использовании метода максимального правдоподобия по выборке $\vec{U} = \|U_1, U_2, \dots, U_N\|$ оценки этих параметров Ω_m и m_m следует находить из решения системы уравнений вида

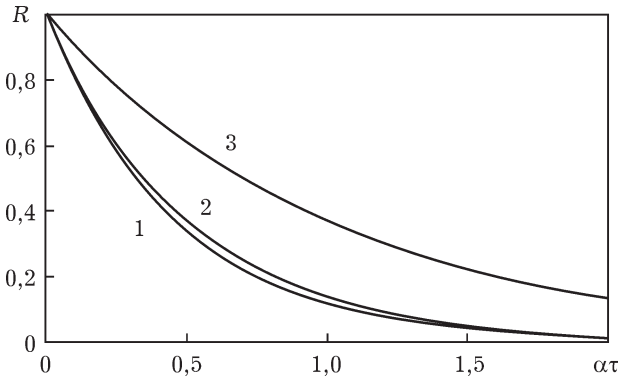


Рис. 1. Зависимость коэффициента корреляции огибающей радиосигнала от нормированного интервала между отсчетами $\alpha\tau$

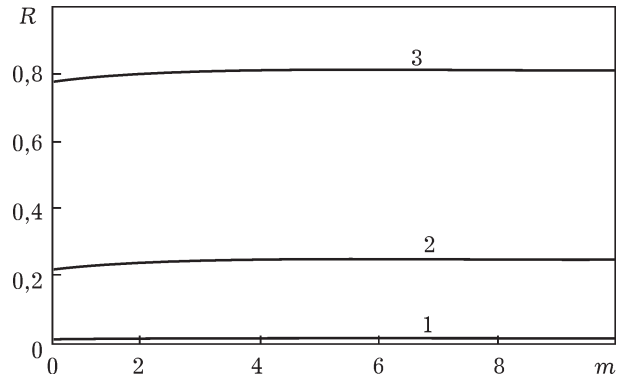


Рис. 2. Зависимость коэффициента корреляции огибающей радиосигнала от параметра m , характеризующего глубину замираний

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \Omega} W_N(\vec{U})|_{\Omega_m, m_m} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial m} W_N(\vec{U})|_{\Omega_m, m_m} = 0, \end{cases}$$

где плотность вероятности $W_N(\vec{U})$ определена в (3). Решение такой системы уравнений аналитически в явной форме найти не удастся. Поэтому оценки Ω_m и m_m могут быть найдены лишь приближенно численными методами, что затрудняет практическое использование оценок максимального правдоподобия этих параметров. В связи с этим рассмотрим более простой приближенный способ нахождения оценок параметров Ω и m , используя метод моментов [8]. Учтем, что $\Omega = M_2$, а $m = M_2^2 / (M_4 - M_2^2)$, где $M_n = \langle U^n \rangle$ — начальный момент n -го порядка (4). Следовательно, оценки этих параметров в соответствии с методом моментов могут быть найдены как

$$\begin{aligned} \Omega^* &= M_2^* = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N U_i^2, \quad m^* = \\ &= (M_2^*)^2 / (M_4^* - (M_2^*)^2) = \\ &= [M_4^* / (M_2^*)^2 - 1]^{-1} = (z^* - 1)^{-1} = \\ &= \left\{ N \sum_{i=1}^N U_i^4 / \left(\sum_{i=1}^N U_i^2 \right)^2 - 1 \right\}^{-1}. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь $M_n^* = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N U_i^n$ — оценка начального момента n -го порядка по методу моментов, $z^* = M_4^* / (M_2^*)^2$ — оценка параметра $z = M_4 / M_2^2$.

В дальнейшем, для простоты, вместо оценки параметра m будем рассматривать оценку параметра z , которые однозначно связаны друг с другом: $m^* = (z^* - 1)^{-1}$, $z^* = 1 + 1/m^*$.

Перейдем теперь к определению характеристик оценок Ω^* и z^* . Будем характеризовать точность оценок их смещениями и дисперсиями. Начнем с оценки энергетического параметра Ω . В соответствии с (7) оценка этого параметра совпадает с оценкой начального момента второго порядка. При этом нетрудно показать, что такая оценка является несмещенной, а дисперсия оценки при равноотстоящих отсчетах с шагом Δ может быть определена аналогично [11] как

$$\begin{aligned} D(\Omega^*) &= \langle (\Omega^*)^2 \rangle - \langle \Omega^* \rangle^2 = \frac{\Omega^2}{N} \left\{ \frac{m+1}{m} - N + \right. \\ &\left. + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \left(1 - \frac{i}{N} \right) {}_2F_1 \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; m; \rho_i^2 \right) \right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

Рисунки 3—5 иллюстрируют поведение нормированной дисперсии оценки параметра Ω : $\eta_\Omega = D(\Omega^*) / \Omega^2$. Так, на рис. 3 изображена зависимость $\eta_\Omega(N)$ при $\mu = 10$. Здесь и далее параметр $\mu = \alpha T$ характеризует отношение интервала наблюдения T к интервалу корреляции радиосигнала, причем $\alpha\Delta = \mu / (N - 1)$, а $\rho_i = \exp(-i\alpha\Delta) = \exp(-i\mu / (N - 1))$. Кривая 1 на рис. 3 построена при $m = 1/2$, кривая 2 — при $m = 1$, а кривая 3 — при $m = 10$. На рис. 4 изображена зависимость $\eta_\Omega(m)$ при $\mu = 10$. Причем кривая 1 на этом рисунке построена при $N = 5$, кривая 2 — при $N = 10$ и кривая 3 — при $N = 20$. Наконец, на рис. 5 изображена зависимость $\eta_\Omega(\mu)$ при $m = 1/2$.

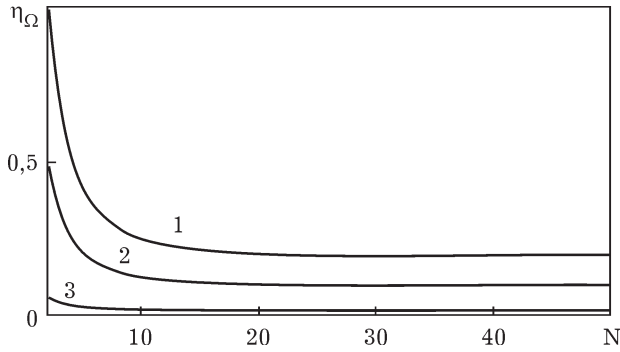


Рис. 3. Зависимость нормированной дисперсии оценки средней мощности радиосигнала от числа отсчетов огибающей

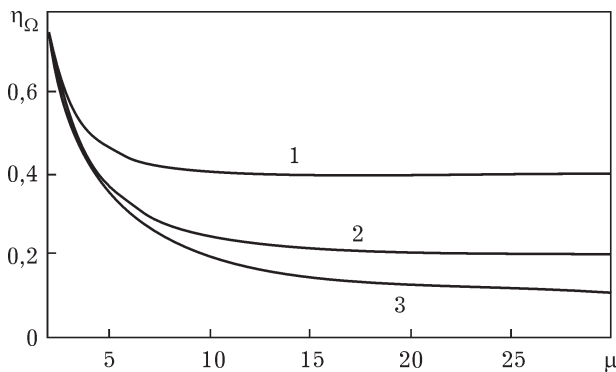


Рис. 5. Зависимость нормированной дисперсии оценки средней мощности радиосигнала от параметра, характеризующего количество интервалов корреляции на интервале наблюдения

Кривая 1 на этом рисунке построена при $N = 5$, кривая 2 — при $N = 10$, а кривая 3 — при $N = 20$. Анализ рисунков 3—5 показывает, что дисперсия оценки параметра Ω убывает с ростом числа отсчетов N (при фиксированном значении параметра μ), пока не достигнет насыщения. С ростом параметра m дисперсия оценки параметра Ω также убывает. Уменьшение интервала корреляции, т.е. увеличение параметра μ , приводит к уменьшению дисперсии оценки Ω^* . Таким образом, наличие корреляции между отсчетами приводит к увеличению дисперсии оценки Ω^* по сравнению со случаем некоррелированной выборки (при $\mu \rightarrow \infty$ и фиксированном N). Кроме того, можно показать, что при $\mu = 0$ ($\rho_i = 1$) дисперсия оценки $D(\Omega^*)$ становится не зависящей от числа отсчетов N .

Рассмотрим теперь оценку параметра $z = 1 + 1/m$. В соответствии с (7) оценка параметра z будет представлять собой отно-

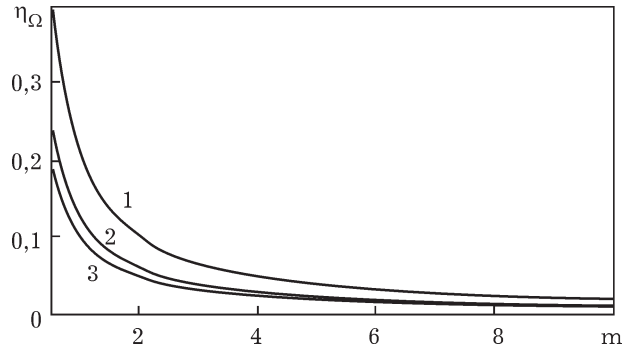


Рис. 4. Зависимость нормированной дисперсии оценки средней мощности радиосигнала от параметра m , характеризующего глубину замираний

$$\text{шение } z^* = M_4^* / (M_2^*)^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N U_i^4 \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N U_i^2 \right)^{-2}.$$

$$\text{Обозначив } X^* = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N U_i^4 \text{ и } Y^* = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N U_i^2,$$

можем записать $z^* = X^* / (Y^*)^2$, причем, учитывая, что $m \geq 1/2$, потребуем выполнение неравенства $1 < z^* \leq 3$. Характеристики оценки z^* можно приближенно найти, предположив приближенную гауссовость случайных величин X^* и Y^* при больших значениях N . Подобное предположение будет тем точнее, чем менее коррелированными являются величины $U_i, i = \overline{1, N}$. Итак, учтем, что величины X^* и Y^* являются гауссовскими коррелированными случайными величинами со следующими характеристиками:

$$m_X = \langle X^* \rangle = \Omega^2(1 + m) / m, \quad m_Y = \langle Y^* \rangle = \Omega,$$

$$D_X = \langle (X^*)^2 \rangle - \langle X^* \rangle^2 = \frac{1}{N} \left\{ G_4(0) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \left(1 - \frac{i}{N} \right) G_4(i\Delta) \right\} - \Omega^4(m + 1)^2 / m^2,$$

$$D_Y = \langle (Y^*)^2 \rangle - \langle Y^* \rangle^2 = \frac{1}{N} \left\{ G_2(0) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \left(1 - \frac{i}{N} \right) G_2(i\Delta) \right\} - \Omega^2,$$

$$r_{XY} = \langle X^* Y^* \rangle - \langle X^* \rangle \langle Y^* \rangle = \left\{ \frac{1}{N} \left[H(0) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \left(1 - \frac{i}{N} \right) H(i\Delta) \right] - \frac{\Omega^3(m + 1)}{m} \right\} \left\{ 2\Omega^3 \frac{m + 1}{m^2} \right\}^{-1},$$

где

$$G_n(i\Delta) = \left(\frac{\Omega}{m}\right)^n \left[\frac{\Gamma(m+n/2)}{\Gamma(m)}\right]^2 {}_2F_1\left(-\frac{n}{2}, -\frac{n}{2}; m; \rho_i^2\right),$$

$n = 1, 2, \dots$

$$H(i\Delta) = \Omega^3 \frac{m+1}{m} {}_2F_1(-2, -1; m; \rho_i^2).$$

Тогда их совместная плотность распределения вероятностей имеет вид

$$W_G(X^*, Y^*) \frac{1}{\sqrt{2\pi D_X D_Y (1-r_{XY}^2)}} \times$$

$$\times \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-r_{XY}^2)} \left[\frac{(X^* - m_X)^2}{2D_X} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{(Y^* - m_Y)^2}{2D_Y} - 2r_{XY} \frac{(X^* - m_X)(Y^* - m_Y)}{\sqrt{D_X D_Y}} \right] \right\}.$$

Таким образом, плотность распределения вероятности случайной величины $z^* = X^*/(Y^*)^2$ можно определить, используя известные правила преобразования плотностей вероятностей при нелинейных безынерционных преобразованиях [12]. В нашем случае плотность распределения вероятности случайной величины z^* может быть определена как $W(z^*) = C \int_0^\infty W_G(z^* y^2, y) y^2 dy$, где

$$C = \left\{ \int_1^3 dz \int_0^\infty dy W_G(z y^2, y) y^2 \right\}^{-1}.$$

Далее, зная плотность распределения вероятности оценки z^* , можно найти характеристики этой оценки. В частности, дисперсия оценки определится выражением

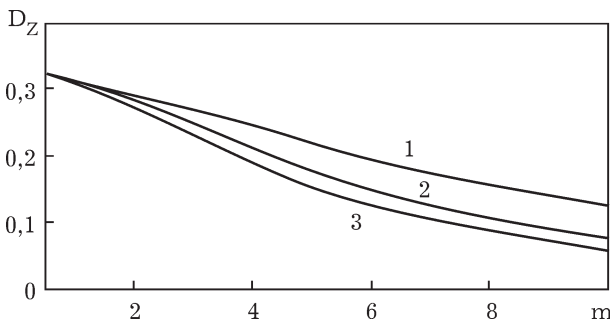


Рис. 7. Зависимость дисперсии оценки параметра z от истинного значения этого параметра

$$D(z^*) = \langle (z^*)^2 \rangle - \langle z^* \rangle^2 =$$

$$= \int_1^3 z^2 W(z) dz - \left[\int_1^3 z W(z) dz \right]^2.$$

Рисунки 6—8 иллюстрируют поведение дисперсии $D_z = D(z^*)$ оценки параметра z . Так, на рис. 6 изображена зависимость $D_z(N)$ при $\mu = 10$. Кривая 1 на этом рисунке построена при $m = 1/2$, кривая 2 — при $m = 5$, кривая 3 — при $m = 10$. На рис. 7 изображена зависимость $D_z(m)$ при $\mu = 10$. Кривая 1 построена при $N = 5$, кривая 2 — при $N = 10$, кривая 3 — при $N = 10$. Наконец, на рис. 8 приведена зависимость $D_z(\mu)$ при $m = 1/2$. Кривая 1 построена при $N = 10$, кривая 2 — при $N = 30$, а кривая 3 — при $N = 50$. Анализ рис. 6—8 показывает следующее. Точность оценки параметра z возрастает с ростом параметра m , при малых m дисперсия оценки D_z максимальна и слабо зависит от числа отсчетов N . Увеличение параметра μ (уменьшение интервала корреляции при

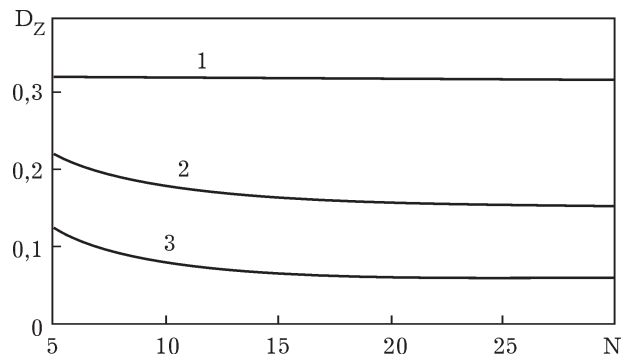


Рис. 6. Зависимость дисперсии оценки параметра z , характеризующего глубину замираний радиосигнала, от числа отсчетов огибающей

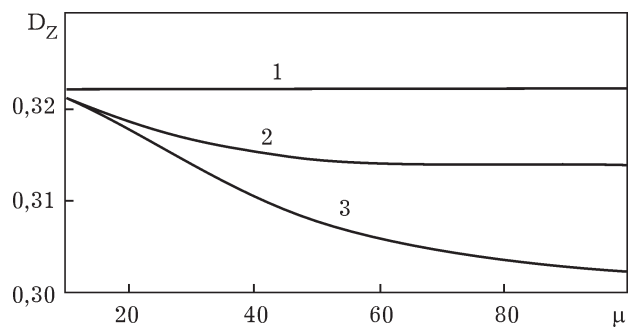


Рис. 8. Зависимость дисперсии оценки параметра z от параметра, характеризующего количество интервалов корреляции на интервале наблюдения

постоянном интервале наблюдения) влияет на дисперсию оценки z^* значительно меньше, чем при оценке Ω^* (ср. рис. 5 и рис. 8).

Таким образом, в работе рассмотрены и проанализированы достаточно простые алгоритмы оценки параметров распределения Накагами. Получены точные выражения для коэффициента корреляции процесса с распределением Накагами. Исследовано влияние количества отсчетов и величины интервала корреляции (при постоянном интервале наблюдения) на точность оценки рассматриваемых параметров. Полученные результаты представляют собой обобщение известных результатов по анализу свойств релейских замираний и могут быть использованы для повышения помехоустойчивости систем радиосвязи КВ и УКВ диапазонов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Калинин А.И., Черенкова С.Л. Распространение радиоволн и работа радиолиний. — М.: Связь, 1971. — 240 с.
2. Долуханов М.П. Распространение радиоволн. — М.: Связь, 1972. — 336 с.
3. Финк Л.М. Теория передачи дискретных сообщений. — М.: Сов. радио, 1970. — 728 с.
4. Маковеева М.М., Шинаков Ю.С. Системы связи с подвижными объектами. — М.: Радио и связь, 2002. — 440 с.
5. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. — М.: Наука, 1979. — 832 с.
6. Комарович В.Ф., Сосунов В.Н. Случайные радиопомехи и надежность КВ связи. — М.: Связь, 1977. — 136 с.
7. Сучилин В.И., Радько Н.М. Повышение эффективности частотной адаптации путем учета различий в глубине замираний радиосигнала между частотно-разнесенными радиолиниями // Теория и техника радиосвязи. — 2002.
8. Кендалл М., Стюарт А. Статистические выводы и связи. — М.: Наука, 1973. — 900 с.
9. Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские процессы. — М.: Радио и связь, 1977. — 488 с.
10. Губарев В.В. Вероятностные модели. Ч. I и II. — Новосибирск, 1992. — 422 с.
11. Куликов Е.И. Методы измерения случайных процессов. — М.: Радио и связь, 1986. — 272 с.
12. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. — М.: Радио и связь, 1982. — 624 с.