УДК 517.956.3

ФОРМУЛА ПРОДОЛЖЕНИЯ НАЧАЛЬНЫХ ДАННЫХ В РЕШЕНИИ ДАЛАМБЕРА ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ НА ОТРЕЗКЕ С КРАЕВЫМ УСЛОВИЕМ ТРЕТЬЕГО РОДА*

© 2004 Ф. О. Найдюк, В. Л. Прядиев

Воронежский государственный университет

В работе выводится формула для продолжения начальных данных в представлении решения смешанной задачи для одномерного волнового уравнения на отрезке при наличии краевого условия третьего рода. Эта формула содержит конечное число алгебраических операций, элементарных функций, квадратур и сдвигов независимого аргумента начальных данных. В качестве следствия получается формула суммы тригонометрического ряда специального вида, определенного на всей вещественной оси.

В настоящей работе выводится формула для продолжения начальных данных в представлении решения смешанной задачи для одномерного волнового уравнения на отрезке при наличии краевого условия третьего рода. Эта формула содержит конечное число алгебраических операций, элементарных функций, квадратур и сдвигов независимого аргумента начальных данных.

В качестве следствия получается формула суммы тригонометрического ряда специального вида, определенного на всей вещественной оси. Приводятся также некоторые примеры задач, сводимых к смешанной задаче для волнового уравнения на отрезке с краевым условием третьего рода.

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t) \ (0 < x < l, t > 0) \\ u(0,t) = 0, u_x(l,t) + k\, u(l,t) = 0 \ (t > 0), \\ u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = 0 \ (0 \le x \le l) \end{cases} \quad (1)$$

в которой l и k — фиксированные положительные числа, а φ — дважды непрерывно дифференцируемая на $[0;l]$ функция, удовлетворяющая условиям: $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(l) + k\varphi(l) = 0$; решение $u(x,t)$ ищется в классе вещественнозначных дважды непрерывно дифференцируемых на $(0;l)\times(0;+\infty)$ функций, первые производные которых непрерывны на $[0;l]\times[0;+\infty)$; u_x и u_t — производные u по x и t соответственно, $u_{xx} = (u_x)_x$, $u_{tt} = (u_t)_t$. Кроме того, будем предполагать далее, что $\varphi''(0) = 0$, — иначе решение задачи (1) из объявленного класса функций не существует (см., например, в [1] гл. IV, § 2, стр. 54).

Выписывая решение (1) в форме Даламбера, придем к представлению:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\big(\tilde{\varphi}(x+t) + \tilde{\varphi}(x-t)\big), \quad (2)$$

в котором $\tilde{\varphi}$ есть дважды непрерывно дифференцируемое продолжение φ с $[0;l]$ на $\mathbf{R}$, подчиненное условиям: $\tilde{\varphi}(-x) = -\tilde{\varphi}(x)$ и $(\tilde{\varphi}' + k\,\tilde{\varphi})(l+x) = -(\tilde{\varphi}' + k\,\tilde{\varphi})(l-x)$ $(x \in \mathbf{R})$, конечно, если такое продолжение φ существует; последнее соотношение можно заменить (с учетом первого) на $(\tilde{\varphi}' + k\tilde{\varphi})(x) = -(\tilde{\varphi}' - k\tilde{\varphi})(x-2l)$ $(x \in \mathbf{R})$. Другими словами, $\tilde{\varphi}$ в (2) — это нечетная дважды непрерывно дифференцируемая функция, сужение которой на $[-l;+\infty)$ является решением уравнения

$$\tilde{\varphi}'(x) + \tilde{\varphi}'(x-2l) + k\tilde{\varphi}(x) - k\tilde{\varphi}(x-2l) = 0 \quad (x \ge l), \quad (3)$$

удовлетворяющим начальному условию

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} -\varphi(-x) & \text{при } -l \le x \le 0 \\ \varphi(x) & \text{при } 0 \le x \le l \end{cases}. \quad (4)$$

Основная цель настоящей работы состоит в получении формулы, выражающей $\tilde{\varphi}$ через φ с помощью конечного числа алгебраических операций, элементарных функ-

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 02-01-00307 и 01-01-00418), Минобразования РФ (КЦ СПбГУ) (грант Е02-1.0-46), Программы «Университеты России» (проект УР.04.01.004) и Президента РФ (грант на поддержку ведущих научных школ, № НШ-1643.2003.1).

ций, квадратур и сдвигов независимого аргумента у функции φ. Такого рода формула наверняка окажется полезной при численном решении задачи (1). Актуальность такой формулы несомненна и для исследования соответствующей задачи управляемости (см., например, [2] и [3]).

Для достижения этой цели можно пытаться использовать различные методы решения задачи (3), (4). Использование преобразования Лапласа дает представление $\tilde{\varphi}$ в виде контурного интеграла, а вычисление последнего посредством суммирования вычетов приводит к представлению $\tilde{\varphi}$ в виде ряда (см., например, [4], теорему 5.5). Теорема смещения была бы эффективна, если бы начальное данное в (4) имело специальный вид (по этому поводу см. там же, комментарий в конце § 4.7), но в данном случае это не так. Наконец, представление $\tilde{\varphi}$ в виде действительного определенного интеграла (см., например, [4], теорему 5.4) содержит фундаментальное решение, которое если и можно предъявить в конструктивном виде, то, пожалуй, только воспользовавшись методом последовательного интегрирования (методом шагов). Именно по этим причинам в настоящей работе для достижения объявленной цели выбран метод шагов, несмотря на его трудоемкость.

2. Решение задачи (3), (4) последовательным интегрированием. Прежде всего отметим, что решение задачи (3), (4) существует, единственно и принадлежит $C^2[-l;+\infty)$ — достаточно применить теорему 5.1 из [4] и учесть, что $\varphi \in C^2[0;l]$ и $\varphi(0)=0$, $\varphi''(0)=0$ и $\varphi'(l)+k\,\varphi(l)=0$.

Если умножить уравнение (3) на e^{kx} и проинтегрировать от $(2n-1)l$ до x $(\in[(2n-1)l;(2n+1)l))$, $n\in\mathbf{N}$, то для функции $\psi(x)=e^{kx}\tilde{\varphi}(x)$ получим соотношение:

$$\psi(x)=\psi((2n-1)l)+ \\ +\int\limits_{(2n-1)l}^{x}\left[k\tilde{\varphi}(s-2l)e^{ks}-\tilde{\varphi}'(s-2l)e^{ks}\right]ds,$$

для $x\in[(2n-1)l;(2n+1)l)$, $n\in\mathbf{N}$. Интегрируя последнее слагаемое по частям, получаем

$$\psi(x)=\psi((2n-1)l)-A\psi(x-2l)+ \\ +A\psi((2n-3)l)+(2kA)\int\limits_{(2n-1)l}^{x}\psi(s-2l)ds \qquad (5)$$

для $x\in[(2n-1)l;(2n+1)l)$, $n\in\mathbf{N}$ (обозначение: $A=e^{2kl}$).

Включение $x\in[(2n-1)l;(2n+1)l)]$ равносильно равенству $n=[(x+l)/(2l)]$ (здесь квадратные скобки означают взятие целой части числа), поэтому далее мы будем считать, что в равенстве (5) $x\ge l$, а $n=n(x)\overset{\text{def}}{=}[(x+l)/(2l)]$.

Лемма 1. *Существуют последовательность конечных наборов многочленов* $\{\{R_i^n(x)\}_{i=0}^{n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ $(\deg R_i^n=i)$ *и последовательность многочленов* $\{Q^n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ $(\deg Q^n=n-1)$ *такие, что*

$$\psi(x)=(-A)^n\psi(x-2nl)+(2kA)^n\sum_{i=0}^{n-1}R_i^n(x)\times \\ \times\int\limits_{(2n-1)l}^{x}t^{n-i-1}\psi(t-2nl)dt+Q^n(x), \qquad (6)$$

где $n=n(x)$ *есть целая часть числа* $(x+l)/(2l)$.

Доказательство проведем методом математической индукции по n.

Справедливость (6) при $n(x)=1$ следует из справедливости (5) при $n(x)=1$, если положить $R_0^1(x)\equiv 1$, $Q^1(x)\equiv 0$.

Допустим теперь, что представление (6) справедливо при $n(x)=m$ (т. е. при $x\in[(2m-1)l;(2m+1)l)$, где $m\in\mathbf{N}$).

Тогда соотношение (5) при $x\in[(2m+1)l;(2m+3)l)$ примет вид (подставляем вместо $\psi(s-2l)$ ее представление в виде (6), интегрируем по частям, выполняем подходящую замену переменной интегрирования и перегруппировываем слагаемые):

$$\psi(x)=(2kA)^{m+1}\Bigg[\left(-\frac{1}{2k}\right)\sum_{i=0}^{m-1}R_i^m(x-2l)\times \\ \times\int\limits_{(2m+1)l}^{x}(t-2l)^{m-i-1}\psi(t-2(m+1)l)dt+ \\ +\sum_{i=0}^{m-1}\int R_i^m(x-2l)dx\int\limits_{(2m+1)l}^{x}(t-2l)^{m-i-1}\psi(t-2(m+1)l)dt- \\ -\sum_{i=0}^{m-1}\int\limits_{(2m+1)l}^{x}\int R_i^m(t-2l)dt(t-2l)^{m-i-1}\psi(t-2(m+1)l)dt+ \\ +\left(-\frac{1}{2k}\right)^m\int\limits_{(2m+1)l}^{x}\psi(t-2(m+1)l)dt\Bigg]+ \\ +(2kA)^m\sum_{i=0}^{m-1}R_i^m((2m+1)l)\int\limits_{(2m-1)l}^{(2m+1)l}t^{m-i-1}\psi(t-2ml)dt+ \\ +Q^m((2m+1)l)-AQ^m(x-2l)+$$

$$+AQ^m((2m-1)l)+(2kA)\int\limits_{(2m+1)l}^{x}Q^m(s-2l)ds,$$

где $\int R_i^m(\tau-2l)d\tau$ — некоторая первообразная многочлена $R_i^m(\tau-2l)$, которую далее мы будем считать обнуляющейся в точке $\tau=2l$. Отсюда следует теперь справедливость (6) при $x\in[(2m+1)l;(2m+3)l)$ — достаточно многочлены $R_i^{m+1}(x)$ определить соотношением

$$\sum_{i=0}^{m}R_i^{m+1}(x)\int\limits_{(2m+1)l}^{x}t^{m-i}\psi(t-2(m+1)l)dt=$$
$$=\left(-\frac{1}{2k}\right)\sum_{i=0}^{m-1}R_i^m(x-2l)\int\limits_{(2m+1)l}^{x}(t-2l)^{m-i-1}\times$$
$$\times\psi(t-2(m+1)l)dt+\sum_{i=0}^{m-1}\int R_i^m(x-2l)dx\times$$
$$\times\int\limits_{(2m+1)l}^{x}(t-2l)^{m-i-1}\psi(t-2(m+1)l)dt-$$
$$-\sum_{i=0}^{m-1}\int\limits_{(2m+1)l}^{x}\left(\int R_i^m(t-2l)dt\cdot(t-2l)^{m-i-1}\times\right.$$
$$\left.\times\psi(t-2(m+1)l)\right)dt+$$
$$+\left(-\frac{1}{2k}\right)^m\int\limits_{(2m+1)l}^{x}\psi(t-2(m+1)l)dt \tag{7}$$

и положить

$$Q^{m+1}(x)=(2kA)^m\sum_{i=0}^{m-1}R_i^m((2m+1)l)\times$$
$$\times\int\limits_{(2m-1)l}^{(2m+1)l}t^{m-i-1}\psi(t-2ml)dt+$$
$$+Q^m((2m+1)l)-A\,Q^m(x-2l)+$$
$$+A\,Q^m((2m-1)l)+(2kA)\int\limits_{(2m+1)l}^{x}Q^m(s-2l)ds. \tag{8}$$

То, что (7) позволяет определить многочлены $R_i^{m+1}(x)$ через многочлены $R_i^m(x)$ (однозначность такого определения не обсуждаем), можно усмотреть, преобразовав правую часть (7): раскрыв по формуле бинома Ньютона степени $(t-2l)$ и сгруппировав затем получившиеся слагаемые по множителям $\int\limits_{(2m+1)l}^{x}t^{m-i}\psi(t-2(m+1)l)\,dt$.

Лемма доказана.

Замечание. В дальнейшем будем полагать, что многочлен $R_i^{m+1}(x)$ определяется из (7) через многочлены $R_i^m(x)$ именно способом, указанным в конце доказательства леммы 1.

Лемма 2. *Коэффициенты* $b_r^{m,i}$ *многочленов* $R_i^m(x)=b_i^{m,i}x^i+b_{i-1}^{m,i}x^{i-1}+\ldots+b_1^{m,i}x+b_0^{m,i}$ *вычисляются по формулам:*

$$b_{i-q}^{m,i}=\frac{(-1)^{m-i-1}C_m^q}{(m-i-1)!(i-q)!}\left(-\frac{1}{2k}\right)^q$$
$$\left(q=\overline{0,m-1},\ i=\overline{q,m-1}\right). \tag{9}$$

Доказательство. Выведем рекуррентные соотношения, связывающие коэффициенты $b_p^{m+1,j}$ с коэффициентами $b_r^{m,i}$. Выражение в правой части (7) после раскрытия степеней бинома $(t-2l)$ (в том числе, и в многочлене $\int R_i^m(t-2l)\,dt$) и приведения подобных по $\int\limits_{(2m+1)l}^{x}t^p\psi(t-2(m+1)l)\,dt$ примет вид:

$$\left(-\frac{1}{2k}\right)\sum_{p=0}^{m-1}\sum_{i=0}^{m-1-p}R_i^m(x-2l)C_{m-i-1}^p(-2l)^{m-p-i-1}\times$$
$$\times\int\limits_{(2m+1)l}^{x}t^p\psi(t-2(m+1)l)\,dt+$$
$$+\sum_{p=0}^{m-1}\sum_{i=0}^{m-1-p}\int R_i^m(x-2l)\,dx\cdot C_{m-i-1}^p(-2l)^{m-p-i-1}\times$$
$$\times\int\limits_{(2m+1)l}^{x}t^p\psi(t-2(m+1)l)\,dt-$$
$$-\sum_{p=0}^{m-1}\sum_{i=0}^{m-p-1}\sum_{j=0}^{i}C_{m-i+j}^p\frac{b_j^{m,i}}{j+1}(-2l)^{m-i+j-p}\times$$
$$\times\int\limits_{(2m+1)l}^{x}t^p\psi(t-2(m+1)l)dt-\sum_{p=1}^{m}\sum_{i=m-p}^{m-1}\sum_{j=p-(m-i)}^{i}C_{m-i+j}^p\times$$
$$\times\frac{b_j^{m,i}}{j+1}(-2l)^{m-i+j-p}\int\limits_{(2m+1)l}^{x}t^p\psi(t-2(m+1)l)\,dt+$$
$$+\left(-\frac{1}{2k}\right)^m\int\limits_{(2m+1)l}^{x}\psi(t-2(m+1)l)\,dt.$$

Теперь уже видно, что (7) будет выполнено, если, во-первых, $R_0^{m+1}(x)=-\sum\limits_{i=0}^{m-1}\frac{b_i^{m,i}}{i+1}$, во-вторых, при $p=\overline{1,m-1}$

$$R_{m-p}^{m+1}(x)=\left(-\frac{1}{2k}\right)\sum_{i=0}^{(m-1)-p}R_i^m(x-2l)C_{m-i-1}^p(-2l)^{m-i-1-p}+$$
$$+\sum_{i=0}^{(m-1)-p}\left(\int R_i^m(x-2l)\,dx\cdot C_{m-i-1}^p(-2l)^{m-i-1-p}\right)-$$
$$-\sum_{i=0}^{(m-1)-p}\sum_{j=0}^{i}C_{m-i+j}^p\frac{b_j^{m,i}}{j+1}(-2l)^{m-i+j-p}-$$
$$-\sum_{i=m-p}^{m-1}\sum_{j=p-(m-i)}^{i}C_{m-i+j}^p\frac{b_j^{m,i}}{j+1}(-2l)^{m-i+j-p} \qquad (10)$$

и, в-третьих,

$$R_m^{m+1}(x)=\left(-\frac{1}{2k}\right)\sum_{i=0}^{m-1}R_i^m(x-2l)(-2l)^{m-i-1}+$$
$$+\sum_{i=0}^{m-1}\int R_i^m(x-2l)\,dx\cdot(-2l)^{m-i-1}- \qquad (11)$$
$$-\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{i}\frac{b_j^{m,i}}{j+1}(-2l)^{m-i+j}+\left(-\frac{1}{2k}\right)^m.$$

Раскрывая в этих соотношениях степени бинома $(x-2l)$ в $R_i^m(x-2l)$ и группируя по степеням x, получим рекуррентные соотношения, связывающие коэффициенты многочленов $R_j^{m+1}(x)$ и $R_i^m(x)$ (ниже всюду $\mu=-2l$):

$$b_0^{m+1,0}=-\sum_{i=0}^{m-1}\frac{b_i^{m,i}}{i+1},$$

$$b_0^{m+1,m-p}=\left(-\frac{1}{2k}\right)\sum_{i=0}^{m-p-1}\sum_{j=0}^{i}C_{m-i-1}^p b_j^{m,i}\mu^{m-i+j-p-1}+$$
$$+\sum_{i=0}^{m-p-1}\sum_{j=0}^{i}C_{m-i-1}^p\tfrac{b_j^{m,i}}{j+1}\mu^{m-p-i+j}-\sum_{i=0}^{m-p-1}\sum_{j=0}^{i}C_{m-i+j}^p\tfrac{b_j^{m,i}}{j+1}\times$$
$$\times\mu^{m-i+j-p}-\sum_{i=m-p}^{m-1}\sum_{j=p-(m-i)}^{i}C_{m-i+j}^p\tfrac{b_j^{m,i}}{j+1}\mu^{m-i+j-p}$$
$$(p=\overline{1,m-1}),$$

$$b_q^{m+1,m-p}=\left(-\frac{1}{2k}\right)\sum_{i=q}^{m-p-1}\sum_{j=q}^{i}C_j^qC_{m-i-1}^p b_j^{m,i}\mu^{m-i+j-q-1}+$$
$$+\sum_{i=q-1}^{m-p-1}\sum_{j=q-1}^{i}C_{j+1}^qC_{m-i-1}^p\tfrac{b_j^{m,i}}{j+1}\mu^{m-p-i+j-q}$$
$$(p=\overline{1,m-1},q=\overline{1,m-p-1}),$$

$$b_{m-p}^{m+1,m-p}=\frac{b_{m-p-1}^{m,m-p-1}}{m-p}$$
$$(p=\overline{1,m-1}),$$

$$b_0^{m+1,m}=\left(-\tfrac{1}{2k}\right)^m+\left(-\tfrac{1}{2k}\right)\sum_{p=m-1}^{1}\mu^p\sum_{j=0}^{p}b_j^{m,m-1-p+j}+$$
$$+\left(-\tfrac{1}{2k}\right)b_0^{m,m-1},$$

$$b_q^{m+1,m}=\left(-\tfrac{1}{2k}\right)\sum_{i=q}^{m-1}\sum_{j=q}^{i}b_j^{m,i}C_j^q\mu^{m-1-q-i+j}+$$
$$+\sum_{i=q-1}^{m-1}\sum_{j=q-1}^{i}\tfrac{b_j^{m,i}}{j+1}C_{j+1}^q\mu^{m-q-i+j}\quad(q=\overline{1,m-1}),$$

$$b_m^{m+1,m}=\frac{b_{m-1}^{m,m-1}}{m}C_{(m-1)+1}^m.$$

Непосредственно проверяется, что подстановка (9) в полученные рекуррентные соотношения обращает их в верные равенства (детали проверки мы опускаем ввиду их громоздкости).

Лемма доказана.

Лемма 3. *Многочлен $Q^n(x)$ представим в виде:*

$$Q^n(x)=\sum_{j=1}^{n-1}(2kA)^j\sum_{i=0}^{j-1}R_i^j(x)\int_{(2j-1)l}^{(2j+1)l}t^{j-i-1}\psi(t-2jl)\,dt. \qquad (12)$$

Доказательство проведем методом математической индукции по n. Справедливость (10) при $n=1$ очевидна, при $n=2$ – следует из (8) (при $m=1$), если учесть, что $Q^1(x)\equiv 0$ и $R_0^1(x)\equiv 1$.

Пусть теперь представление (12) верно при $n=m$. Подставим представление многочлена $Q^m(x)$ в виде (12) в правую часть (8) и сгруппируем подобные слагаемые правой части в получившемся представлении $Q^{m+1}(x)$: сначала по степеням j множителей $(2kA)^j$, $j=\overline{1,m}$, а затем в каждой из m сумм при множителях $(2kA)^j$ — по множителям вида $\int_{(2j-1)l}^{(2j+1)l}t^{j-i-1}\psi(t-2jl)\,dt$, $i=\overline{0,j-1}$.

В итоге получим:

$$Q^{m+1}(x)=\sum_{j=1}^{m}(2kA)^j\sum_{i=0}^{j-1}\Bigg[R_i^j((2m+1)l)+$$
$$+\sum_{p=0}^{i-1}C_{j-p-2}^{i-p-1}\mu^{i-p-1}\Bigg\{\int_{(2m+1)l}^{x}R_p^{j-1}(s-2l)\,ds-$$
$$-\frac{1}{2k}R_p^{j-1}(x-2l)+\frac{1}{2k}R_p^{j-1}((2m-1)l)\Bigg\}\Bigg]\times$$
$$\times\int_{(2j-1)l}^{(2j+1)l}t^{j-i-1}\psi(t-2jl)\,dt.$$

И остается показать, что

$$R_i^j(x) = R_i^j((2m+1)l) + \\ +\sum_{p=0}^{i-1} C_{j-p-2}^{i-p-1}\mu^{i-p-1}\left\{\int\limits_{(2m+1)l}^{x} R_p^{j-1}(s-2l)\,ds - \right. \\ \left. -\frac{1}{2k}R_p^{j-1}(x-2l) + \frac{1}{2k}R_p^{j-1}((2m-1)l)\right\}. \qquad (13)$$

Справедливость (13) при $i=0$ следует из того, что $R_0^j(x) \equiv R_0^j((2m+1)l)$ – так как $\deg R_0^j = 0$. Если же $i = \overline{1, j-2}$, то в силу (10) (если положить там $m = j-1$ и $m - p = i$) выполнено равенство

$$R_i^j(x) - R_i^j((2m+1)l) = \sum_{q=0}^{i-1}\left[C_{j-q-2}^{j-1-i}\mu^{i-q-1} \times \right. \\ \times\left\{\left(-\frac{1}{2k}\right)\cdot\left(R_q^{j-1}(x-2l) - R_q^{j-1}((2m-1)l)\right) + \right. \\ \left.\left. + \int\limits_{(2m+1)l}^{x} R_q^{j-1}(s-2l)\,ds\right\}\right],$$

что совпадает с (13), поскольку $C_{j-q-2}^{j-1-i} = C_{j-q-2}^{i-q-1}$. Наконец, в силу (11)

$$R_{j-1}^j(x) - R_{j-1}^j((2m+1)l) = \\ = \sum_{q=0}^{j-2}\mu^{j-q-2}\left[\left(-\frac{1}{2k}\right)\cdot\left(R_q^{j-1}(x-2l) - R_q^{j-1}((2m-1)l)\right) + \right. \\ \left. + \int\limits_{(2m+1)l}^{x} R_q^{j-1}(s-2l)\,ds\right],$$

что совпадает с (13) при $i = j-1$.

Лемма доказана.

Замечание В силу леммы 2 имеем:

$$R_i^j(x) = \sum_{q=0}^{i} b_q^{j,i} x^q = \sum_{q=0}^{i}\tfrac{(-1)^{j-i-1}C_j^{i-q}}{(j-i-1)!q!}\left(-\tfrac{1}{2k}\right)^{i-q} x^q = \\ = \tfrac{(-1)^{j-1}}{(j-i-1)!(2k)!}\sum_{q=0}^{i}\left(\frac{(-1)^q C_j^{i-q}}{q!}(2kx)^q\right),$$

т.е. $R_i^j(x) = \dfrac{1}{(2k)!}\mathfrak{R}_i^j(y)\Big|_{y=2kx}$,

где

$$\mathfrak{R}_i^j(y) = \frac{(-1)^{j-1}}{(j-i-1)!}\sum_{q=0}^{i}\frac{(-1)^q C_j^{i-q}}{q!}y^q.$$

Многочлены $\mathfrak{R}_i^j(y)$ при этом не зависят ни от одного из параметров l, k и $\varphi(x)$ задачи (1). Это, по-видимому, означает возможность посредством табулирования многочленов $\mathfrak{R}_i^j(x)$ снять традиционные проблемы численного решения задачи вида (1).

Такой же результат получится, если с самого начала в задаче (1) выполнить замену переменных: $\tilde{x} = kx$, $\tilde{t} = kt$, которая сводит исследование задачи к случаю $k=1$.

Собирая теперь воедино результаты лемм 1—3, приходим к следующему заключению.

Теорема 1. *Функция $\tilde{\varphi}$ из представления (2) решения задачи (1) есть дважды непрерывно дифференцируемая нечетная функция, совпадающая с φ на $[0;l]$, причем на любом отрезке вида $[(2n-1)l;(2n+1)l]$ ($n \in \mathbf{N}$) она представима в виде конечной суммы:*

$$\tilde{\varphi}(x) = (-1)^n\varphi_1(x-2nl) + \\ +(2k)^n\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\mathfrak{R}_i^n(2kx)}{(2k)^i}\int\limits_{(2n-1)l}^{x} t^{n-i-1}e^{k(t-x)}\varphi_1(t-2nl)\,dt + \\ +\sum_{j=1}^{n-1}(2k)^j\sum_{i=0}^{j-1}\frac{\mathfrak{R}_i^j(2kx)}{(2k)^i}\int\limits_{(2j-1)l}^{(2j+1)l} t^{j-i-1}e^{k(t-x)}\varphi_1(t-2jl)\,dt, \qquad (14)$$

где $\mathfrak{R}_i^j(y) = \frac{(-1)^{j-1}}{(j-i-1)!}\sum\limits_{q=0}^{i}\frac{(-1)^q C_j^{i-q}}{q!}y^q$,

$$\varphi_1(x) = \begin{cases}\varphi(x), & 0 \le x \le l\\ -\varphi(-x), & -l \le x \le 0\end{cases}.$$

3. Суммирование по синусам с частотами, равными собственным частотам колебаний в задаче (1). Неожиданное следствие получается из результатов предыдущего параграфа, если, вернувшись к задаче (3), (4), решить ее с помощью преобразования Лапласа. А именно, применяя теорему 5.5 из [4], получим, что решение задачи (3), (4) представимо в виде ряда:

$$\tilde{\varphi}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} Res\left[\frac{e^{xz}p(z)}{h(z)}; iy_n\right](x > -l), \qquad (15)$$

где

$$p(z) = -2\varphi(l)\mathrm{ch}(lz) + \int\limits_{-l}^{l}\left[\tilde{\varphi}'(x) + k\tilde{\varphi}(x)\right]e^{-zx}dx,$$
$$h(z) = z + ze^{-2lz} + k - ke^{-2lz},$$

здесь i — мнимая единица, а y_n — корни уравнения $y = -k\cdot\mathrm{tg}(l\,y)$, занумерованные в произвольном порядке; при этом ряд (15) сходится равномерно на любом отрезке $[a;b] \subset (-l;+\infty)$. Выражая p только через φ (т. е. посредством интегрирования по частям избавляясь от присутствия φ' в выражении для p) и находя затем вычеты в (15), придем (беря во внимание также нечетность $\tilde{\varphi}$) к представлению функции $\tilde{\varphi}$ в виде ряда, сужение которого на $[0;l]$ есть ряд Фурье функции φ по собственным функциям задачи, порождаемой задачей (1):

$$\tilde{\varphi}(x) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin(\omega_m x) \quad (x \in \mathbf{R}),$$

где

$$b_m = \frac{2(k^2 + \omega_m^2)}{k + l(k^2 + \omega_m^2)} \cdot \int_0^l \varphi(s) \sin(\omega_m s)\, ds \quad (m = \overline{1,\infty}),$$

а $\{\omega_m\}_{m=1}^{\infty}$ — возрастающая последовательность всех положительных корней уравнения $\omega = -k \cdot \mathrm{tg}(l\omega)$.

Таким образом, с учетом теоремы 1, получаем следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть $f(x) \in C^2[0;l]$ и $f(0) = 0$ и $f''(0) = 0$. Пусть k — положительное число, удовлетворяющее равенству $f'(l) + kf(l) = 0$, а $\{b_m\}_{m=1}^{\infty}$ — последовательность чисел, определяемая равенством*

$$b_m = \frac{2(k^2 + \omega_m^2)}{k + l(k^2 + \omega_m^2)} \cdot \int_0^l f(s) \sin(\omega_m s)\, ds \quad (m = \overline{1,\infty}),$$

в котором $\{\omega_m\}_{m=1}^{\infty}$ — возрастающая последовательность всех положительных корней уравнения $\omega = -k \cdot \mathrm{tg}(l\omega)$. Тогда ряд $\sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin(\omega_m x)$ сходится равномерно на любом отрезке вещественной прямой, причем его сумма $s(x)$ есть дважды непрерывно дифференцируемая нечетная функция, совпадающая на $[0,l]$ с $f(x)$, а при $x > l$ определяемая равенством:

$$s(x) = (-1)^n f_1(x - 2nl) +$$
$$+(2k)^n \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\Re_i^n(2kx)}{(2k)^i} \int_{(2n-1)l}^{x} t^{n-i-1} e^{k(t-x)} f_1(t - 2nl)\, dt +$$
$$+\sum_{j=1}^{n-1} (2k)^j \sum_{i=0}^{j-1} \frac{\Re_i^j(2kx)}{(2k)^i} \int_{(2j-1)l}^{(2j+1)l} t^{j-i-1} e^{k(t-x)} f_1(t - 2jl)\, dt,$$

где $n = n(x)$ есть целая часть от $(x + l)/(2l)$, а

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \le x \le l \\ -f(-x), & -l \le x \le 0 \end{cases}.$$

4. Случай краевого условия 2-го или 3-го рода на левом конце.

Теорема $1'$. *Пусть $u(x,t)$ — решение задачи $(1')$, получающейся из задачи (1) заменой условия $u(0,t) = 0$ на условие $u_x(0,t) = 0$ и соответствующей заменой требований $\varphi(0) = 0$ и $\varphi''(0) = 0$ (на функцию φ) на одно требование: $\varphi'(0) = 0$. Тогда $u(x,t) = \frac{1}{2}(\hat{\varphi}(x+t) + \hat{\varphi}(x-t))$, где $\hat{\varphi}(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемая четная функция, совпадающая на $[0;l]$ с $\varphi(x)$ и на любом отрезке вида $[(2n-1)l;(2n+1)l]$ ($n \in \mathbf{N}$) представимая в виде конечной суммы:*

$$\hat{\varphi}(x) = \varphi_2(x - 2nl) +$$
$$+(-2k)^n \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\Re_i^n(2kx)}{(2k)^i} \int_{(2n-1)l}^{x} t^{n-i-1} e^{k(t-x)} \varphi_2(t - 2nl)\, dt +$$
$$+\sum_{j=1}^{n-1} (-2k)^j \sum_{i=0}^{j-1} \frac{\Re_i^j(2kx)}{(2k)^i} \int_{(2j-1)l}^{(2j+1)l} t^{j-i-1} e^{k(t-x)} \varphi_2(t - 2jl) dt, \tag{14'}$$

в которой $\Re_i^j(y)$ — многочлены, определяемые так же, как в теореме 1,

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} \varphi(x), & 0 \le x \le l \\ \varphi(-x), & -l \le x \le 0 \end{cases}.$$

Доказательство этой теоремы практически не отличается от доказательства теоремы 1, по причине чего и не приводится здесь. Заодно отметим, что представление $(14')$ влечет утверждение, аналогичное теореме 2.

Прежде чем перейти к рассмотрению смешанной задачи с двумя краевыми условиями 3-го рода, договоримся об обозначении

$$(l; k_1, k; \varphi(x))$$

для задачи, которая получается из задачи (1) заменой условия $u(0,t) = 0$ на условие $u_x(0,t) - k_1 u(0,t) = 0$ ($k_1 > 0$) и соответствующей заменой требований $\varphi(0) = 0$ и $\varphi''(0) = 0$ (на функцию φ) одним требованием $\varphi'(0) - k_1\varphi(0) = 0$. При этом будем допускать как варианты $k_1 = 0$ и/или $k = 0$, означающие краевые условия 2-го рода в точках $x = 0$ и/или $x = l$ (при условии $\varphi'(0) = 0$ и/или $\varphi'(l) = 0$), так и варианты $k_1 = +\infty$ и/или $k = +\infty$, понимая последние как краевые условия 1-го рода в $x = 0$ и/или $x = l$ – здесь уже при дополнительном условии $\varphi(0) = 0$, $\varphi''(0) = 0$ и/или, соответственно, $\varphi(l) = 0$, $\varphi''(l) = 0$.

Рассмотрим теперь задачу $(l; k, k; \varphi(x))$, в которой $k \in (0; +\infty)$. Представляя функцию $\varphi(x)$ в виде $\varphi(x) = \alpha(x) + \beta(x)$, где

$$\alpha(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(l-x)}{2}, \beta(x) = \frac{\varphi(x) + \varphi(l-x)}{2},$$

придем к следующему, непосредственно проверяемому, заключению.

Теорема 3. *Пусть $u(x,t)$ есть решение задачи $(l; k, k; \varphi(x))$, в которой $k \in (0; +\infty)$. Тогда*

1) его сужение на $[0; l/2] \times \mathbf{R}$ равно сумме решений задач $(l/2; k, 0; \beta(x))$ и $(l/2; k, +\infty; \alpha(x))$;

2) $u(l-x,t)$ (при $x \in [0; l/2]$) равна сумме решений задач $(l/2; k, 0; \beta(x))$ и $(l/2; k, +\infty; -\alpha(x))$.

Как видим, теорема 3 позволяет описать решение задачи $(l; k, k; \varphi(x))$ с помощью теорем 1 и $1'$.

В качестве иллюстрации дальнейших возможностей, которые дают теоремы 1 и $1'$, приведем описание решения еще одной задачи:

$$\begin{cases} u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t) \quad (0 < x < l/2, t > 0) \\ v_{xx}(x,t) = v_{tt}(x,t) \quad (l/2 < x < l, t > 0) \\ u(l/2,t) = v(l/2,t), \quad v_x(l/2,t) - u_x(l/2,t) = 2ku(l/2,t) \\ \qquad (t > 0) \\ u_x(0,t) - ku(0,t) = 0, \quad v_x(l,t) + kv(l,t) = 0 \quad (t > 0) \\ u(x,0) = \varphi(x) \quad (0 \le x \le l/2), \\ \qquad v(x,0) = \varphi(x) \quad (l/2 \le x \le l) \\ u_t(x,0) = 0 \quad (0 \le x \le l/2), \quad v_t(x,0) = 0 \quad (l/2 \le x \le l) \end{cases}, \tag{16}$$

где $k > 0$, а u и v ищутся в классе вещественно значных и дважды непрерывно дифференцируемых функций (соответственно, на $[0; l/2] \times \mathbf{R}$ и на $[l/2; l] \times \mathbf{R}$).

Теорема 4. *Пусть $u(x,t)$ и $v(x,t)$ — решения задачи (16). Пусть $\alpha(x) = \dfrac{\varphi(x) - \varphi(l-x)}{2}$, $\beta(x) = \dfrac{\varphi(x) + \varphi(l-x)}{2}$. Тогда $u(x,t)$ есть сумма решений задач $(l/2; k, +\infty; \alpha(x))$ и $(l/2; k, k; \beta(x))$, а $v(l-x,t)$ есть сумма решений задач $(l/2; k, +\infty; -\alpha(x))$ и $(l/2; k, k; \beta(x))$.*

Доказательство этой теоремы сводится к непосредственной проверке.

Как видим, решение задачи (16) тоже допускает описание при помощи теорем 1 и $1'$ (через теорему 3).

Замечание. Класс задач, допускающих описание решений в форме линейной комбинации решений задач вида $(l; k_1, k_2; \varphi(x))$, где $k_1 \in \{0; +\infty\}$ или $k_2 \in \{0; +\infty\}$, по-видимому, достаточно велик — по крайней мере, авторам известно более десятка примеров таких задач (конечно, не имеются ввиду тривиальные случаи функции φ); описание одного из примеров содержится в [5]. Однако исчерпывающего описания такого класса задач авторам не известно.

5. Заключение. Помимо представленных в этой работе аналитических представлений решений задач (1) и $(1')$, ценных самих по себе, и помимо задачи, обозначенной в последнем замечании, а также вопросов, порождаемых теоремой 2 (о суммировании тригонометрических рядов специального вида) у теорем 1 и $1'$ есть еще один важный аспект — вычислительный. Эти теоремы могут быть положены в основу создания принципиально новой вычислительной схемы, обеспечивающей построение решений задач (1) и $(1')$ (и задач, сводимых к ним) при достаточно больших значениях t с любой, наперед заданной, точностью, при существенной экономии вычислительных ресурсов, по сравнению с известными схемами.

Авторы выражают признательность руководителям семинаров профессору Ю. В. Покорному (семинар по качественной теории краевых задач, Воронежский госуниверситет) и доктору физ.-мат. наук И. Я. Новикову (семинар «Современные проблемы математики», Воронежский госуниверситет) за предоставленную возможность выступить с сообщениями о результатах, приведенных в данной работе, а также участникам обоих семинаров (прежде всего, доцентам С. М. Ситнику и И. П. Половинкину) за проявленный интерес, полезные замечания и советы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Соболев С.Л.* Уравнения математической физики. М.-Л.: Гос. издательство технико-теоретической литературы, 1950. — 424 с.

2. *Тихомиров В.В.* Волновое уравнение с граничным управлением при упругом закреплении. I // Дифференциальные уравнения, Т. 38, № 3, С. 393—403.

3. *Тихомиров В.В.* Волновое уравнение с граничным управлением при упругом закреплении. II // Дифференциальные уравнения, Т. 38, № 4, С. 529—537.

4. *Беллман Р., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967. — 548 с.

5. *Найдюк Ф. О., Прядиев В. Л.* Краевое условие третьего рода в задаче на графе // Современные методы теории краевых задач: Материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения − XIV». — Воронеж: Воронеж. гос. ун-т, 2003. — С. 96—97.