УДК 517.925.52

О ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ СТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ОБЛАДАЮЩЕЙ НАПРАВЛЯЮЩЕЙ ФУНКЦИЕЙ

© 2004 В. К. Евченко

Воронежский государственный университет

В работе изучается поведение всех решений автономной системы нелинейных дифференциальных уравнений, обладающей направляющей функцией. Приводится простое достаточное условие существования ограниченного решения.

Рассмотрим стационарную систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x), \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор с компонентами $x_1, \ldots, x_n$; отображение $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ имеет непрерывные по совокупности переменных компоненты $f_1(x_1, \ldots, x_n), \; \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n)$. Заметим, что мы не предполагаем выполнения требования единственности и нелокальной продолжимости решений системы (1), что исключает прямое использование теории динамических систем [3].

Стационарные системы возникают во многих важных механических и физических задачах. Изучение качественной картины поведения решений таких систем занимает особое место в общей теории дифференциальных уравнений, связано с именами известных математиков (А. Пуанкаре, И. Бендиксон, Дж. Д. Биркгоф, В. В. Немыцкий, В. В. Степанов и др.).

Наша цель заключается в описании поведения решений системы (1), при условии существования у системы (1) направляющей функции (определение см. ниже) [2], [4]. Дело в том, что сам метод направляющих функций был предложен М. А. Красносельским и А. И. Перовым в 1958 году [2] для доказательства существования периодических и ограниченных решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений. В этом случае направляющие функции служат для отыскания периодических и ограниченных решений нелинейных систем дифференциальных уравнений. В настоящей же работе речь идет о применении направляющих функций для изучения поведения всех решений стационарной системы, а также приводится достаточное условие существования ограниченного решения такой системы.

Заметим, что чисто внешне метод направляющих функций напоминает метод функций Ляпунова в теории устойчивости (или, скорее, метод функций Красовского-Барбашина, если речь идет об устойчивости в целом), а сами направляющие функции похожи на функции Ляпунова. Исследования показали, что в случае направляющей функции, зависящей от времени t, эти методы тесно переплетаются [1]. Но, если функции Ляпунова служат для изучения вопросов устойчивости решений, то мы ведем речь об исследовании поведения всех решений стационарной системы.

Прежде чем перейти к непосредственному изложению полученных результатов, введем в рассмотрение обозначения и определения, которые потребуются нам в дальнейшем.

Пусть K произвольное ограниченное замкнутое множество из $\mathbb{R}^n$, которое мы считаем непустым и дополнение к которому обозначим через $G : G = \mathbb{R}^n \setminus K$. Ясно, что G неограниченное открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Отметим, что границы множеств совпадают, то есть $\partial K = \partial G$, причем $\partial G = \bar{G} \setminus G$.

Пусть $u(x)$ есть непрерывная по совокупности переменных функция, заданная на замкнутом множестве $\bar{G}$, то есть $u : \bar{G} \to \mathbb{R}$.

Пусть функция $u(x)$ непрерывно дифференцируема по совокупности переменных на открытом множестве G. Тогда функцию $u(x)$ будем называть *направляющей функцией* для стационарной системы (1), если выполнено условие

$$(grad\, u(x), f(x)) > 0, \; x \in G. \tag{2}$$

Согласно условию (2), в точках x открытого множества G, имеем $grad\, u(x) \neq 0$ и $f(x) \neq 0$. Первое неравенство означает, что в G нет ни локальных минимумов, ни локальных максимумов функции $u(x)$. Второе неравенство говорит о том, что стационарные точки системы (1) — если они есть — могут находится только в множестве K. (Напомним, что точка $x_0 \in \mathbb{R}^n$ называется *стационарной* (или *точкой покоя*), если $f(x_0) = 0$).

Обозначим

$$m = \min_{x \in \partial K} u(x), \;\; M = \max_{x \in \partial K} u(x), \tag{3}$$

это возможно, в силу компактности ∂K. Очевидно, что $m \le M$. Построим замкнутое множество

$$F = K \cup \{x \in G : m \le u(x) \le M\}. \tag{4}$$

Отметим, что множество F представляет особый интерес при изучении вопроса о существовании ограниченных решений у системы (1). Но об этом позднее.

Пусть t_0 произвольное фиксированное число, $x(t)$ любое решение системы (1), удовлетворяющее начальному условию $x(t_0) = x_0$; а (α, β) — максимальный промежуток существования решения $x(t)$, $\alpha < t_0 < \beta$.

Теорема 1. *Пусть точка* $x_0 \,\overline{\in}\, F$. *Тогда, если* $u(x_0) > M$, *то*

$$\begin{gathered} x(t) \,\overline{\in}\, F \text{ при } t_0 \le t < \beta, \\ \text{причем } \|x(t)\| \to +\infty \text{ при } \beta > t \to \beta; \end{gathered} \tag{5}$$

если $u(x_0) < m$, *то*

$$\begin{gathered} x(t) \,\overline{\in}\, F \text{ при } \alpha < t \le t_0, \\ \text{причем } \|x(t)\| \to +\infty \text{ при } \alpha < t \to \alpha. \end{gathered} \tag{6}$$

Предположим, естественно, что такие точки x_0, о которых говорится в условиях теоремы 1 существуют.

Доказательство. Первое утверждение в (5) непосредственно вытекает из того факта, что функция $u(t) \equiv u(x(t))$ непрерывна при тех t, при которых решение $x(t)$ лежит в G, и возрастает при этих значениях времени в силу условия (2).

Второе утверждение в (5) очевидно, если β конечное число [6]. Пусть $\beta = +\infty$ и второе утверждение в (5) места не имеет. Это означает, что существуют такие число $d > 0$ и последовательность $t_k \to +\infty$, для которых $\|x(t_k)\| \le d$. Без ограничения общности можно считать, что $x(t_k) \to y_0$, причем $y_0 \in G$ и $y_0 \,\overline{\in}\, F$. Выберем число $\rho > 0$ так, чтобы замкнутый шар B с центром в точке y_0 радиуса ρ целиком лежал в множестве G, т.е. $B \subseteq G$. Будем считать, что для некоторой последовательности $s_k \to +\infty$ имеем $\|x(s_k) - y_0\| > \rho$. Дело в том, что случай $x(t) \to y_0$ при $t \to +\infty$ невозможен, в силу того, что в открытом множестве G не может быть стационарных точек. Без ограничения общности можно считать, что последовательности t_k и s_k согласованы в том смысле, что $t_1 < s_1 < t_2 < s_2 < \ldots$.

Выберем произвольное число δ такое, что $0 < \delta < \rho$ и $\|x(t_k) - y_0\| \le \delta$ при $k \ge k_0$. Тогда существуют такие моменты времени τ_k и σ_k, что

$$\begin{gathered} \|x(\tau_k) - y_0\| = \rho, \\ \|x(t) - y_0\| < \rho \text{ при } \tau_k < t < \sigma_k, \\ \|x(\sigma_k) - y_0\| = \rho. \end{gathered}$$

Пусть $L = \max_{x \in B} \|f(x)\|$, тогда нетрудно получить следующее неравенство

$$\frac{2(\rho - \delta)}{L} \le \sigma_k - \tau_k. \tag{7}$$

В силу условия (2) имеем $\dot{u}(t) > 0$ при $t_0 \le t < +\infty$. Поэтому функция $u(t)$ имеет предел при $t \to +\infty$, причем, в силу своей ограниченности на множестве $\{x \in \mathbb{R}^n, \|x - y_0\| \le \delta\}$, этот предел может быть только конечным числом, т.е. $\lim_{t \to +\infty} u(t) = c$.

С другой стороны,

$$u(\sigma_k) - u(\tau_k) = \int_{\tau_k}^{\sigma_k} \dot{u}(t) dt. \tag{8}$$

Но на замкнутом ограниченном множестве $B \cap \{x \in \bar{G} : c - \varepsilon \le u(x) \le c\}$ согласно (2) непрерывная функция $\dot{u}(x)$ положительна, поэтому можно считать, что

$$\dot{u}(x) \ge \mu > 0. \tag{9}$$

Из (7), (8) и (9) получаем

$$u(\sigma_k) - u(\tau_k) \ge \mu \frac{2(\rho - \delta)}{L}. \tag{10}$$

Пусть $(c >) u(t) \ge c - \varepsilon$ при $t \ge T(\varepsilon)$ тогда, при $\sigma_k > \tau_k > T(\varepsilon)$ имеем $u(\sigma_k) - u(\tau_k) \le \varepsilon$, что согласно (10) дает

$$\varepsilon \geq \mu \frac{2(\rho - \delta)}{L},$$

что невозможно при достаточно малом $\varepsilon > 0$.

Таким образом, утверждение (5) полностью доказано. Аналогично можно показать справедливость утверждения (6).

Из теоремы 1 вытекает следующий важный факт: *если стационарная система (1) имеет определенное на всей оси ограниченное решение, то это решение должно лежать в множестве F при всех t:*

$$x(t) \in F \text{ при } -\infty < t < +\infty. \tag{11}$$

Теорема 2. *Пусть точка $x_0 \in F$. Тогда, если $t_0 \leq t < \beta$, то либо решение $x(t) \in F$ при $t_0 \leq t < \beta$, либо при некотором $t = t_1$, где $t_0 \leq t_1 < \beta$ имеем $x(t) \in F$ при $t_0 \leq t \leq t_1$ и $x(t) \overline{\in} F$ при $t_1 < t < \beta$, при этом $u(x(t_1)) = M$ и $u(x(t)) > M$ при $t_1 < t < \beta$ (далее решение ведет себя согласно теореме 1).*

Если $\alpha < t \leq t_0$, то либо решение $x(t) \in F$ при $\alpha < t \leq t_0$, либо при некотором $t = t_1$, где $\alpha < t_1 \leq t_0$ имеем $x(t) \in F$ при $t_1 \leq t \leq t_0$ и $x(t) \overline{\in} F$ при $\alpha < t < t_1$, при этом $u(x(t_1)) = m$ и $u(x(t)) < m$ при $\alpha < t < t_1$ (далее решение ведет себя согласно теореме 1).

Вновь вернемся к изучению поведения решений с начальными условиями, лежащими вне множества F, но теперь уже в другом направлении времени.

Точка y_0 называется *предельной точкой* траектории $x(t)$ в положительном (отрицательном) направлении, если существует такая последовательность времен $t_k \in (\alpha, \beta)$, что $x(t_k) \to y_0$ при $\beta > t_k \to \beta (\alpha < t_k \to \alpha)$. Совокупность всех предельных точек в положительном (отрицательном) направлении обозначим через D^+ (и соответственно D^-) (по этому поводу см. [6, с. 179]).

Теорема 3. *Пусть точка $x_0 \overline{\in} F$.*

Если $u(x_0) > M$, то либо при некотором $t = t_1$, $\alpha < t_1 < t_0$ решение $x(t)$ попадает в множество F и тогда дальнейшее развитие событий при $\alpha < t < t_1$ происходит согласно теореме 2, либо решение $x(t)$ при всех t из промежутка $\alpha < t \leq t_0$ остается лежащим вне множества F. В этом случае, во-первых, функция $u(t) \equiv u(x(t))$ имеет конечный предел c при $\alpha < t \to \alpha$ и $c \geq M$.

Во-вторых, возможны следующие ситуации:

множество D^- предельных точек траектории $x(t)$, проходящей через точку x_0, пусто, т.е. $D^- = \varnothing$. Тогда $\|x(t)\| \to +\infty$ при $\alpha < t \to \alpha$ (причем α может быть как конечным, так и бесконечным).

множество D^- предельных точек не пусто, т.е. $D^- \neq \varnothing$. Тогда

$$\alpha = -\infty, \tag{12}$$

$$D^- \subseteq \{x \in \partial K, u(x) = M\}, \tag{13}$$

$$D^- \text{ — связное множество,} \tag{14}$$

$$\rho(x(t), D^-) \to 0 \text{ при } t \to -\infty. \tag{15}$$

Если $u(x_0) < m$, то либо при некотором $t = t_1$, $t_0 < t_1 < \beta$ решение $x(t)$ попадает в множество F и тогда дальнейшее развитие событий при $t_1 < t < \beta$ происходит согласно теореме 2, либо решение $x(t)$ при всех t из промежутка $t_0 \leq t < \beta$ остается лежащим вне множества F. В этом случае, во-первых, функция $u(t) \equiv u(x(t))$ имеет конечный предел c при $\beta > t \to \beta$ и $c \leq m$.

Во-вторых, возможны следующие ситуации:

множество D^+ предельных точек траектории $x(t)$, проходящей через точку x_0, пусто, т.е. $D^+ = \varnothing$. Тогда $\|x(t)\| \to +\infty$ при $\beta > t \to \beta$ (причем β может быть как конечным, так и бесконечным).

множество D^+ предельных точек не пусто, т.е. $D^+ \neq \varnothing$. Тогда

$$\beta = +\infty, \tag{16}$$

$$D^+ \subseteq \{x \in \partial K, u(x) = m\}, \tag{17}$$

$$D^+ \text{ — связное множество,} \tag{18}$$

$$\rho(x(t), D^+) \to 0 \text{ при } t \to +\infty. \tag{19}$$

Доказательство. Пусть $x(t) \overline{\in} F$ при $\alpha < t \leq t_0$. Тогда $x(t) \in G$ при указанных значениях времени и потому функция $u(t)$ определена при всех $t \in (\alpha, t_0]$ и является возрастающей. Так как $u(t_0) > M$, то справедливо неравенство $M < u(t) < u(t_0)$. Поэтому возрастающая ограниченная функция $u(t)$ имеет конечный предел при $\alpha < t \to \alpha$.

Если $x(t)$ не имеет предельных точек при $\alpha < t \to \alpha$, то $\|x(t)\| \to +\infty$ при $\alpha < t \to \alpha$, причем $c = \lim\limits_{\alpha < t \to \alpha} u(x(t))$ может быть как больше M, так и равным M.

Пусть предельное множество не пусто. Заметим, что тогда множество D^- является замкнутым, причем этот факт требует доказательства и не может быть перенесен из теории динамических систем [5], в силу отсутствия требования единственности и нелокальной продолжимости решений системы (1).

Отметим, что если решение имеет предельные точки при $\alpha < t \to \alpha$, то, используя локальную теорему Коши-Липшица,- можно показать, что решение определено при всех $-\infty < t \le t_0$ и потому $\alpha = -\infty$.

Покажем, что утверждение (13) справедливо. Отметим, предельные точки траектории $x(t)$, согласно рассуждениям теоремы 1, могут лежать только в множестве F, т.е. $D^- \subseteq F$. Из включения $D^- \subseteq F$, непосредственное вытекает равенство $u(x) = M$, для всех $x \in D^-$. Покажем, что $D^- \subseteq \partial K$. Действительно, пусть y_0 предельная точка, т.е. $y_0 \in D^-$, тогда $y_0 \in F$ и либо $y_0 \in K$, либо $y_0 \in F$, причем $u(y_0) = M$. В первом случае, т.к. $y_0 \in \bar{G}$ и $y_0 \in K$, то $y_0 \in \bar{G} \cap K = \partial K$. Второй случай не может иметь места, в силу того, что множество G не содержит стационарных точек.

Покажем справедливость утверждения (15). Отметим, что из того факта, что $u(t) \to M$ еще не вытекает утверждение (15). Итак, пусть утверждение (15) места не имеет. Тогда существуют такое число $\varepsilon_0 > 0$ и последовательность $s_k \to -\infty$, что $\rho(x(s_k), \partial K) \ge \varepsilon_0$. С другой стороны, существуют $t_k \to -\infty$, для которых $x(t_k) \to y_0$ и $y_0 \in \partial K$, $u(y_0) = M$. Имеем $\rho(x(t_k), \partial K) \to 0$. Так как $\rho(x(t), \partial K)$ есть непрерывная функция, то существуют такие $t_k < \theta_k < s_k$, что $\rho(x(\theta_k), \partial K) = \varepsilon_0$. Ограниченная последовательность $x(\theta_k)$ обладает сходящейся подпоследовательностью; будем считать, что сходится она сама $x(\theta_k) \to z_0$. Т.к. $\theta_k \to -\infty$, то $z_0 \in D^-$,и, значит, $z_0 \in \partial K$ и $u(z_0) = M$. Поэтому $\rho(x(\theta_k), \partial K) \le \|x(\theta_k) - z_0\| \to 0$. Получили противоречие, которое и доказывает утверждение (15).

Аналогично доказывается вторая часть теоремы. Таким образом, теорема 3 полностью доказана.

Далее перейдем к изучению вопроса о существовании ограниченного решения у системы (1).

Заметим, что открытое множество G представимо в виде конечного или счетного объединения своих компонент связности. Так как множество K ограничено, то существует лишь одна (при $n > 1$) неограниченная компонента связности множества G.

Лемма. *Каждая ограниченная компонента связности множества G целиком лежит в множестве F.*

Приведем эту лемму без доказательства.

В силу леммы все компоненты неограниченного открытого множества $E = \mathbb{R}^n \setminus F$ являются неограниченными. Если $x_0 \in E_0$, где E_0 — компонента связности, то, либо $u(x_0) > M$ и $\|x(t)\| \to +\infty$ при $\beta > t \to \beta$, либо $u(x_0) < m$ и $\|x(t)\| \to +\infty$ при $\alpha < t \to \alpha$.

Предположим, что замкнутое множество F ограничено. В этом случае у его дополнения E есть единственная компонента связности. Если на ней $u(x) < m$, то функция $u(x)$ ограничена сверху, если же $u(x) > M$, то функция $u(x)$ ограничена снизу.

Множество F будем называть *инвариантным в положительном (отрицательном) направлении*, если из $x_0 \in F$ вытекает, что $x(t) \in F$ при $t_0 \le t < \beta$ ($\alpha < t \le t_0$), где $x(t)$ любое решение с начальным условием $x(t_0) = x_0$, определенное на максимальном интервале (α, β). Множество F *инвариантно*, если оно инвариантно в отрицательном и в положительном направлении.

Теорема 4. *Пусть F замкнутое множество. Тогда, если $u(x) > M$ при $x \in G \setminus F$, то*

$$\text{если } x_0 \in F, \text{ то } x(t) \in F \text{ при } \alpha < t \le t_0, \tag{19}$$

т.е множество F инвариантно в отрицательном направлении.

Если $u(x) < m$ при $x \in G \setminus F$, то

$$\text{если } x_0 \in F, \text{ то } x(t) \in F \text{ при } t_0 \le t < \beta, \tag{20}$$

т.е. множество F инвариантно в положительном направлении.

Из теоремы 4 вытекает следующее утверждение

Теорема 5. *Пусть замкнутое множество F ограничено, тогда система (1) имеет по крайней мере одно ограниченное решение.*

Следствием этой теоремы является

Теорема 6. *Пусть направляющая функция $u(x)$ для системы (1) такова, что*

$$u(x) \to +\infty \text{ при } \|x\| \to +\infty. \tag{21}$$

Тогда система (1) имеет по крайней мере одно ограниченное решение.

Автор выражает глубокую благодарность А. И. Перову за оказанную помощь в подготовке статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Евченко В.К.* Достаточное условие диссипативности для периодических систем / В. К. Евченко // Воронежская зимняя математическая школа — 2004, Воронеж, 24—28 января 2004 г.: Тез. докл. — Воронеж, 2004. — С. 43—45.

2. *Красносельский М.А.* Об одном принципе существования ограниченных, периодических и почти-периодических решений у систем обыкновенных дифференциальных уравнений / М. А. Красносельский, А. И. Перов // ДАН СССР. — 1958. — Т. 123, № 2. — С. 235—238.

3. *Немыцкий В.В.* Качественная теория дифференциальных уравнений / В. В. Немыцкий, В. В. Степанов. — М.-Л.: Гостехиздат, 1949. — 550 с.

4. *Перов А.И.* Некоторые вопросы качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений: Дис. ... канд. физ.-мат. наук./ А. И. Перов. — Воронеж, 1959. — 129 с.

5. *Петровский И.Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений/ И. Г. Петровский. — М.: Наука, 1964. — 272 с.

6. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения / Ф. Хартман. — М.: Наука, 1970. — 720 с.