ВЕСТНИК ВГУ, Серия физика, математика, 2004, № 1

УДК 517.61

ПРИБЛИЖЕННЫЕ ОБРАЩЕНИЯ В АЛГЕБРАИЧЕСКИХ МНОГОУРОВНЕВЫХ МЕТОДАХ

© 2004 М. Е. Эксаревская

Воронежский государственный университет

В работе рассматриваются вопросы итерационного решения больших разреженных положительно определенных систем. Исследуются методы предобуславливания двухуровневого типа, основанные на блочной факторизации матрицы системы, при этом анализируется возможность использования приближенных обращений подматрицы, относящейся к первому блоку неизвестных. Выводятся оценки числа обусловленности, верные для любого типа аппроксимации дополнения Шура и независящие от использования иерархического базиса. Показано, что двухуровневые методы в сочетании с приближенными обращениями, основанными на модифицированных ILU-методах, являются стабильными. Результаты численно проиллюстрированы для модельной задачи.

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$Au = b, \tag{1.1}$$

возникающую при дискретизации эллиптических дифференциальных уравнений в частных производных. Современные методы решения подобных систем часто направлены на нахождение эффективных алгебраических многоуровневых предобуславливателей [1]. Схема таких методов основана на блочной факторизации матрицы системы:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & \\ A_{21} & S_A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A_{11}^{-1}A_{12} \\ & I \end{pmatrix}, \tag{1.2}$$

где первый блок неизвестных соответствует узлам более мелкой сетки, а второй блок — узлам сетки с большим шагом; $S_A = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ — дополнение Шура для матрицы A. Для получения эффективной схемы решения необходимо выбрать соответствующую разреженную аппроксимацию S, и предобуславливатель запишется следующим образом:

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} A_{11} & \\ A_{21} & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A_{11}^{-1}A_{12} \\ & I \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

Как видно, возможности схемы существенно зависят от спектрального числа обусловленности

$$\kappa(\tilde{B}^{-1}A) = \frac{\lambda_{\max}(\tilde{B}^{-1}A)}{\lambda_{\min}(\tilde{B}^{-1}A)}, \tag{1.4}$$

которое должно быть близко к 1 и быть ограниченным независимо от размера сетки (здесь и далее через $\lambda_{\max}(C)$ и $\lambda_{\min}(C)$ мы будем обозначать наибольшее и наименьшее собственное значение C соответственно).

Можно показать, что

$$\tilde{B}^{-1}A = \begin{pmatrix} I & * \\ & S^{-1}S_A \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

Следовательно, существенный шаг анализа состоит в том, чтобы доказать, что верхняя и нижняя границы спектра $S^{-1}S_A$ есть величины порядка $O(1)$. Такие результаты присутствуют в методах, которые основываются на многосеточных методах с иерархическим базисом [6], а также в некоторых подходах, где S вычисляется в соответствии с процедурой неполного Гауссовского исключения [2].

Предобуславливатель (1.3) требует решения двух систем с A_{11} каждый раз, когда необходимо решать систему с $\tilde{B}$. Некоторые работы немного затрагивают этот вопрос. Ключевым аргументом является то, что матрица A_{11} имеет число обусловленности порядка $O(1)$ [2,4], так что любая подходящая итерационная схема быстро сходится за количество шагов, не зависящее от размера сетки. На практике, однако, стоимость таких внутренних итераций быстро становится слишком большой. Многие работы принимают это во внимание и рассматривают предобуславливатели в форме

$$B = \begin{pmatrix} P & \\ A_{21} & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & P^{-1}A_{12} \\ & I \end{pmatrix}, \tag{1.6}$$

где P^{-1} обозначает используемое приблизительное обращение A_{11}, возможно определенное при помощи небольшого количества шагов некоторой итерационной процедуры. Тогда оценка предобуславливания матрицы A_{11} служит для того, чтобы показать, что достаточно просто определить эффективное приблизительное обращение такое, что спектр $P^{-1}A_{11}$ достаточно близок к 1.

Предобуславливатели в форме (1.6) также возникают в другом семействе алгебраических многоуровневых методов [3,5], где первичный шаг состоит в том, чтобы аппроксимировать A_{11}^{-1} некоторой разреженной матрицей B_{11}. Основная схема предполагает, что дополнение Шура $A_{22} - A_{21}B_{11}A_{12}$ аппроксимированной таким образом матрицы вычисляется точно, хотя некоторые недавние разработки [1] предлагают версии, в которых B_{11} менее разрежена, что ведет к неполной блочной факторизации (6), в которой и A_{11} и дополнение Шура вычисляются приблизительно.

Известно [4], что дополнение Шура S_A является одинаковым как для узловых, так и для иерархических представлений. Следовательно, как видно из (1.5), указанные результаты анализа применимы к (1.3) с точным обращением A_{11} независимо от используемого базиса.

Данный факт, однако, не выполняется в общем случае. В [1] показано, что эквивалентность предобуславливателя (1.6) в обычном узловом базисе по отношению к предобуславливателю в иерархическом базисе может быть восстановлена путем добавления к A_{12} и A_{21} слагаемого, равного $(A_{11} - P)$, умноженного на некоторую интерполяционную матрицу. Так как $(A_{11} - P)$ мало, если используется достаточно близкое приближенное обращение, возникает вопрос необходимости этого дополнительного слагаемого [4]. В настоящей работе выполняется более точный анализ некоторых аспектов этого вопроса.

В разделе 2 приводится простой анализ поведения числа обусловленности, когда P^{-1} является стандартным приближенным обращением A_{11}; главные теоретические результаты доказываются в разделе 3; раздел 4 посвящен результатам численного эксперимента.

2. СТАНДАРТНЫЕ ПРИБЛИЖЕННЫЕ ОБРАЩЕНИЯ

В данном разделе выводится нижняя граница числа обусловленности на основе вычисления коэффициентов Рэлея

$$\overline{r} = \frac{\overline{v}^t A \overline{v}}{\overline{v}^t B \overline{v}}, \quad \underline{r} = \frac{\underline{v}^t A \underline{v}}{\underline{v}^t B \underline{v}},$$

ассоциированных с векторами в форме

$$\overline{v} = \begin{pmatrix} -P^{-1}A_{12}v_2 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} -A_{11}^{-1}A_{12}v_2 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

В результате преобразований можно показать, что

$$\begin{aligned}
\overline{v}^t A \overline{v} &= v_2^t S_A v_2 + \\
&\quad + v_2^t A_{21}(A_{11}^{-1} - 2P^{-1} + P^{-1}A_{11}P^{-1})A_{12}v_2, \\
\overline{v}^t B \overline{v} &= v_2^t S v_2, \\
\underline{v}^t A \underline{v} &= v_2^t S_A v_2, \\
\underline{v}^t B \underline{v} &= v_2^t S v_2 + v_2^t A_{21}(P^{-1} - 2A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1}PA_{11}^{-1})A_{12}v_2.
\end{aligned}$$

Далее, $A_{11}^{-1} - 2P^{-1} + P^{-1}A_{11}P^{-1} = (I - P^{-1}A_{11})^2 A_{11}^{-1}$, откуда, обозначив $\lambda_M = \lambda_{\max}(P^{-1}A_{11})$, получаем для всех w_1

$$\begin{aligned}
& w_1^t(P^{-1} - 2A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1}PA_{11}^{-1})w_1 = \\
&= w_1^t(A_{11}^{-1}P)(P^{-1}A_{11}P^{-1} - 2P^{-1} + A_{11}^{-1})w_1 \\
&\geq \lambda_M^{-1} w_1^t (I - P^{-1}A_{11})^2 A_{11}^{-1} w_1.
\end{aligned}$$

Следовательно, имея

$$q_{v_2} = \frac{v_2^t S_A v_2}{v_2^t S v_2},$$

$$g_{v_2} = \frac{v_2^t A_{21}(I - P^{-1}A_{11})^2 A_{11}^{-1} A_{12} v_2}{v_2^t S_A v_2},$$

получаем

$$\overline{r} = q_{v_2}(1 + g_{v_2}), \quad \underline{r} \leq \frac{1}{q_{v_2}^{-1} + \lambda_M^{-1} g_{v_2}}.$$

Так как $\lambda_{\max}(B^{-1}A) \geq \overline{r}$, $\underline{r} \geq \lambda_{\min}(B^{-1}A)$, отсюда следует, что

$$\kappa(B^{-1}A) \geq (1+g_{v_2})\left(1+\frac{q_{v_2}}{\lambda_M}g_{v_2}\right). \qquad (2.1)$$

Это показывает, что метод может быть стабильным по отношению к использованию приблизительного обращения, только если g_{v_2} ограничено сверху независимо от размера сетки.

Далее, как хорошо известно в дискретных приложениях дифференциальных уравнений в частных производных, S_A спектрально эквивалентно матрице дискретизации по грубой сетке. Следовательно, $v_2^t S_A v_2 = O(h^2)$ для гладких векторов, откуда следует $v_2^t A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}v_2 \simeq v_2^t A_{22} v_2 = O(1)$, когда не используется иерархический базис. Следовательно, g_{v_2} может быть ограничен независимо от размера сетки, только если P^{-1} ведет себя почти как точное обращение для этих гладких векторов, в то время как известно, что обычные сходящиеся разбиения сходятся быстро для грубых векторов [4].

Чтобы проиллюстрировать это, рассмотрим матрицу A, возникающую из стандартной пятиточечной аппроксимации Лапласиана конечными разностями на единичном квадрате на однородной сетке размера h в обоих направлениях, где h выбирается так, что h^{-1} — четное целое число.

Предположим, что P^{-1} есть приближенное обращение, полученное в результате $m \geq 1$ стационарных итераций предобуславливания Якоби, т.е.

$$(I - P^{-1}A_{11}) = (M^{-1}N)^m,$$

где $M = diag(A) = 4I$ и $N = M - A = offdiag(A)$.

В [1] показано, что вектор $v_2^{(\nu\mu)}$, интерполирующий функцию $\sin\nu\pi xh\sin\mu\pi yh$ в узлах грубой сетки, является собственным вектором S_A для $\nu = 1,\ldots,\frac{h^{-1}}{2}-1$, $\mu = 1,\ldots,\frac{h^{-1}}{2}-1$. Соответствующее собственное значение записывается как

$$\lambda_{\nu\mu} = 4\left(\frac{1}{4-2(c_\nu+c_\mu)}+\frac{1}{4-2(c_\nu-c_\mu)}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{4+2(c_\nu-c_\mu)}+\frac{1}{4+2(c_\nu+c_\mu)}\right)^{-1},$$

где $c_\nu = cos\nu\pi h$, $c_\mu = cos\mu\pi h$. Для $\nu = \mu$ получаем более простое выражение

$$\lambda_{\nu\nu} = \frac{8(1-c_\nu^2)}{2-c_\nu^2}.$$

Также легко проверить, что

$$(M^{-1}N)^2(A_{12}v_2^{(\nu\nu)}) = \frac{c_\nu^2}{2}(A_{12}v_2^{(\nu\nu)}).$$

Следовательно, т.к. $A_{22} = 4I$ и $(M^{-1}N)^t = M^{-1}N$,

$$g_{v_2^{(\nu\nu)}} = \left(\frac{c_\nu^2}{2}\right)^m \frac{v_2^{(\nu\nu)t}(A_{22}-S_A)v_2^{(\nu\nu)}}{v_2^{(\nu\nu)t}S_A v_2^{(\nu\nu)}} =$$
$$= \left(\frac{c_\nu^2}{2}\right)^m \frac{c_\nu^2}{2(1-c_\nu^2)},$$

т.е. для $\nu = 1$ получаем

$$g_{v_2(11)}^{(11)} \simeq \left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}\frac{h^{-2}}{\pi^2},$$

что совместно с (2.1) показывает, что $\kappa(B^{-1}A) \geq O(h^{-4})$ за исключением случаев, когда с уточнением сетки увеличивается значение m.

3. ГРАНИЦЫ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Получим оценки верхней и нижней границ спектра $B^{-1}A$. Единственными ограничениями будут являться:

$$v_1^t P v_1 \leq v_1^t A_{11} v_1,\ \forall v_1 \qquad (3.1)$$

и

$$v_2^t A_{21}P^{-1}A_{12}v_2 \leq$$
$$\leq (1-\xi)v_2^t A_{22}v_2 + \xi v_2^t A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}v_2,\ \forall v_2 \qquad (3.2)$$

для некоторого $\xi < 1$. Это относительно слабое ограничение, т.к. ξ может быть отрицательным но, тем не менее, достаточным для того, чтобы избежать проблем, проиллюстрированных в предыдущем разделе. В самом деле, каким бы ни было $v_2^t A_{22}v_2 = (1+O(h^2))v_2^t A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}v_2$, из (3.1) и (3.2) следует, что

$$v_2^t A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}v_2 \leq v_2^t A_{21}P^{-1}A_{12}v_2 \leq$$
$$\leq (1+(1-\xi)O(h^2))v_2^t A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}v_2,$$

т.е. P^{-1} должно вести себя почти как точное обращение.

Лемма. *Пусть*

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} P & \\ A_{21} & S \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & P^{-1}A_{12} \\ & I \end{pmatrix} \qquad (3.3)$$

являются неотрицательными матрицами такими, что A_{11} *обратима.*

Предположим, что

$$\beta v_1^t A_{11} v_1 \le v_1^t P v_1 \le v_1^t A_{11} v_1, \quad \forall v_1 \ne 0 \qquad (3.4)$$

для некоторого β *такого, что* $0 < \beta < 1$, *и что*

$$\begin{aligned} &\eta v_2^t (A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}) v_2 \le v_2^t S v_2 \le \\ &\le \zeta v_2^t (A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}) v_2, \quad \forall v_2 \end{aligned} \qquad (3.5)$$

для некоторых η, ζ *таких, что* $0 \le \eta \le 1 \le \zeta$.

Если

$$\begin{aligned} &v_2^t A_{21} P^{-1} A_{12} v_2^t \le \\ &\le (1-\xi) v_2^t A_{22} v_2 + \xi v_2^t A_{21} A_{11}^{-1} A_{12} v_2, \quad \forall v_2 \end{aligned} \qquad (3.6)$$

для некоторого $\xi < 1$, *тогда*

$$v^t B v \ge \gamma v^t A v, \quad \forall v, \qquad (3.7)$$

где γ *— наименьший корень многочлена*

$$\gamma^2 - \gamma(\eta + 1 - \xi + \beta\xi) + \beta\eta;$$

и

$$\alpha v^t A v \ge v^t B v, \quad \forall v, \qquad (3.8)$$

где α *— наибольший корень многочлена*

$$\alpha^2 - \alpha(\zeta + 1 - \xi + \beta\xi) + \beta\zeta.$$

Кроме того,

$$\gamma \ge \frac{\eta\beta}{\eta + 1 - \xi(1-\beta)} \qquad (3.9)$$

и

$$\alpha \le \zeta\left(1 + \frac{(1-\beta)(1-\xi)}{\xi - \beta}\right), \qquad (3.10)$$

и дополнительно выполняется

$$\gamma \ge \begin{cases} \eta\beta, & \xi \ge \eta \\ \eta(\beta - \sqrt{(1-\beta)(1-\xi)}), & 0 \le \xi \le \eta. \end{cases} \qquad (3.11)$$

Доказательство. Определим семейство многочленов второго порядка

$$P_a(t) = t^2 - t(a + 1 - \xi + \xi\beta) + a\beta,$$

где $a > 0$. Так как $P_a(a) = -a(1-\beta)(1-\xi) < 0$ и $P_a(\beta) = -\beta(1-\xi)(1-\beta) < 0$, $P_a(t)$ имеет два положительных корня $t_1 < \min(\beta, a) \le t_1 < \min(\beta, a) \le \max(\beta, a) < t_2$, откуда следует, что γ и α существуют, положительны и удовлетворяют условию

$$\gamma < \min(\eta, \beta) < 1 \le \zeta < \alpha. \qquad (3.12)$$

Далее, легко проверить, что

$$\begin{aligned} \gamma &= \eta - \frac{\gamma(1-\beta)(1-\xi)}{\beta - \gamma}, \\ \alpha &= \zeta + \frac{\alpha(1-\beta)(1-\xi)}{\alpha - \beta}. \end{aligned} \qquad (3.13)$$

Теперь докажем (3.7). Имеем

$$B - \gamma A = \begin{pmatrix} P - \gamma A_{11} & (1-\gamma) A_{12} \\ (1-\gamma) A_21 & S + A_{21} P^{-1} A_{12} - \gamma A_{22} \end{pmatrix}$$

и, так как $\gamma < \beta$, из (3.4) следует, что $P - \gamma A_{11}$ положительно определена. Следовательно, $B - \gamma A$ — неотрицательно определенная матрица, если таковой является ее дополнение Шура

$$\begin{aligned} S_{B-\gamma A} &= S - \gamma A_{22} + \\ &+ A_{21}(P^{-1} - (1-\gamma)^2 (P - \gamma A_{11})^{-1}) A_{12}. \end{aligned}$$

Далее, из $v_2^t S v_2 \ge \eta v_2^t (A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}) v_2$, $\eta - \gamma > 0$, (3.6) и (3.13) следует, что

$$\begin{aligned} (\eta - \gamma) v_2^t A_{22} v_2 &= \frac{\gamma(1-\beta)(1-\xi)}{\beta - \gamma} v_2^t A_{22} v_2 \ge \\ &\ge \frac{\gamma(1-\beta)}{\beta - \gamma} v_2^t A_{21} (P^{-1} - \xi A_{11}^{-1}) A_{12} v_2. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} v_2^t S_{B-\gamma A} v_2 \ge v_2^t A_{21} \Bigg\{ &\left(1 + \frac{\gamma(1-\beta)}{\beta - \gamma}\right) P^{-1} - \\ -\left(\eta + \frac{\xi\gamma(1-\beta)}{\beta - \gamma}\right) A_{11}^{-1} &- (1-\gamma)^2 (P - \gamma A_{11})^{-1} \Bigg\} A_{12} v_2, \end{aligned}$$

и, используя (3.13), чтобы сократить η,

$$\begin{aligned} v_2^t S_{B-\gamma A} v_2 &\ge v_2^t A_{21} \Bigg\{ \frac{\beta(1-\gamma)}{\beta - \gamma} P^{-1} - \frac{\gamma(1-\gamma)}{\beta - \gamma} A_{11}^{-1} - \\ &- (1-\gamma)^2 (P - \gamma A_{11})^{-1} \Bigg\} A_{12} v_2 = \\ &= \frac{1-\gamma}{\beta - \gamma} v_2^t A_{21} P^{-\frac{1}{2}} \{ \beta I - \gamma X^{-1} - \\ &- (1-\gamma)(\beta - \gamma)(I - \gamma X)^{-1} \} P^{-\frac{1}{2}} A_{12} v_2, \end{aligned}$$

где $X = P^{-\frac{1}{2}} A_{11} P^{-\frac{1}{2}}$. Так как X — симметричная положительно определенная матрица,

$$f(X) = \beta I - \gamma X^{-1} - (1-\gamma)(\beta - \gamma)(I - \gamma X)^{-1}$$

будет неотрицательно определенной, если $f(\lambda) \geq 0$ для всех $\lambda \in \sigma(X) \subset [1, \beta^{-1}]$. Тогда из этого следует (3.7), так как

$$f(\lambda) = (1-\gamma\lambda)^{-1}((1-\gamma\lambda)(\beta-\gamma\lambda^{-1}) -$$
$$-(1-\gamma)(\beta-\gamma)) = (1-\gamma\lambda)^{-1}(1-\lambda^{-1})(1-\beta\lambda).$$

Доказательство (3.8) аналогично:

$$\alpha A - B = \begin{pmatrix} \alpha A_{11} - P & (\alpha-1)A_{12} \\ (\alpha-1)A_{21} & \alpha A_{22} - S - A_{21}P^{-1}A_{12} \end{pmatrix}$$

и, так как $\alpha > 1$, из (3.4) следует, что $\alpha A_{11} - P$ положительно определена. Следовательно, $\alpha A - B$ — неотрицательно определенная матрица, если таковой является ее дополнение Шура

$$S_{\alpha A - B} =$$
$$= \alpha A_{22} - S - A_{21}(P^{-1} + (\alpha-1)^2(\alpha A_{11} - P)^{-1})A_{12}.$$

Далее, из $v_2^t S \leq \zeta v_2^t (A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})v_2$, $\alpha - \zeta > 0$, (3.6) и (3.13) следует, что

$$(\alpha-\zeta)v_2^t A_{22} v_2 = \frac{\alpha(1-\beta)(1-\xi)}{\alpha-\beta} v_2^t A_{22} v_2 \geq$$
$$\geq \frac{\alpha(1-\beta)}{\alpha-\beta} v_2^t A_{21}(P^{-1} - \zeta A_{11}^{-1})A_{12}v_2,$$

откуда

$$v_2^t S_{\alpha A-B} v_2 \geq v_2^t A_{21} \left\{ \left(\frac{\alpha(1-\beta)}{\alpha-\beta} - 1 \right) P^{-1} + \right.$$
$$\left. + \left(\zeta - \frac{\xi\alpha(1-\beta)}{\alpha-\beta} \right) A_{11}^{-1} - (\alpha-1)^2(\alpha A_{11} - P)^{-1} \right\} A_{12} v_2 =$$
$$= \frac{\alpha-1}{\alpha-\beta} v_2^t A_{21} P^{-\frac{1}{2}} \{ -\beta I - \alpha X^{-1} -$$
$$-(\alpha-1)(\alpha-\beta)(\alpha X - I)^{-1} \} P^{-\frac{1}{2}} A_{12} v_2.$$

Обозначив

$$g(X) = -\beta I + \alpha X^{-1} - (\alpha-1)(\alpha-\beta)(\alpha X - I)^{-1},$$

получим

$$g(\lambda) = (\alpha\lambda - 1)^{-1}((\alpha\lambda-1)(-\beta + \alpha\lambda^{-1}) -$$
$$-(\alpha-1)(\alpha-\beta)) = \alpha(\alpha\lambda-1)^{-1}(1-\lambda^{-1})(1-\beta\lambda),$$

которая неотрицательна для всех $\lambda \in [1, \beta^{-1}]$, откуда следует (3.8).

Наконец, (3.10) выполняется в силу (3.13), беря во внимание, что $\alpha > \zeta$ и тот факт, что $\frac{x}{x-\beta}$ является убывающей функцией от x для $x > \beta$. Формула (3.9) выводится из выражения $\gamma(\eta + 1 - \xi(1-\beta)) - \beta\eta = \gamma^2 > 0$. Выражение (3.11) доказывается, если проверить, что обе величины

$$P_\eta(\eta\beta) = \eta\beta(\xi - \eta)(1-\beta),$$
$$P_\eta\left(\eta(\beta - \sqrt{(1-\beta)(1-\xi)})\right) =$$
$$-\eta(1-\beta)(\xi(1-\eta) + (1-\beta)(\eta-\xi)) +$$
$$+\eta\sqrt{(1-\beta)(1-\xi)}(1 - \eta\beta + (\eta-\xi)(1-\beta))$$

неотрицательны при условии, что $\xi \geq \eta$ и $\eta \geq \xi \geq 0$ соответственно.

Теорема. *Для симметричных матриц*

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & A_{12} \\ A_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \tag{3.14}$$

при условии существования двусторонних оценок вида

$$0 < \beta A_{11} \leq B_{11} \leq A_{11} \qquad \beta_1 A_{22} \leq B_{22} \leq \beta_2 A_{22}$$

для некоторых $\beta, \beta_1 \in (0,1)$, $\beta \geq 1$ *справедливо следующее утверждение:*

$$0 < \alpha_1 A \leq B \leq \alpha_2 B \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 > 0. \tag{3.15}$$

Доказательство. Доказательство теоремы вытекает непосредственно из результатов полученной выше леммы.

4. ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Для иллюстрации теоретических исследований в настоящей работе был выполнен численный эксперимент. В данном эксперименте в качестве матрицы A была выбрана матрица, возникающая при пятиточечной дискретизации конечными разностями Лапласиана на единичном квадрате на сетке с равномерным шагом h в обоих направлениях, где h выбиралось таким образом, чтобы h^{-1} было четным целым числом.

Рассматриваются двухуровневые предобуславливатели в форме (1.6), где второй блок формируется для узлов сетки с шагом $2h$, а S взято равным матрице, связанной с дискретизацией Лапласиана на этой грубой сетке.

В качестве P мы рассматриваем предобуславливатели, основанные на простой точечной факторизации A_{11} без заполнения и с натуральным упорядочиванием соответствующих узлов. Были включены два варианта: MILU-факторизация [4], для которой P и A_{11} имеют одинаковые строчные суммы, и ILU-факторизация, для которой матрица ошибок $A_{11}-P$ имеет нулевую диагональ.

Результаты демонстрируют стабильность двухсеточного метода при использовании MILU-предобуславливателя для A_{11}. С другой стороны, полученные результаты для ILU-предобуславливателей достаточно плохи, хотя P является хорошим предобуславливателем для матрицы A_{11} самой по себе.

Для полноты эксперимента было также выполнено несколько тестов для масштабированных ILU-предобуславливателей, т.е. предолбуславливателей $P=cP_{ILU}$, где c выбирается по следующему принципу.

1) $c=\lambda_{\max}(P_{ILU}^{-1}A_{11})$, в соответствии с некоторыми теоретическими результатами для иерархических конечных элементов [6], которые требуют выполнения $v_1^t P v_1 \geq v_1^t A_{11} v_1$, $\forall v$.

2) $c=\lambda_{\min}(P_{ILU}^{-1}A_{11})$, чтобы удовлетворить обратному условию $v_1^t P v_1 \leq v_1^t A_{11} v_1$, $\forall v$.

3) $c=\lambda_{\min}(P_{ILU}^{-1}A_{11})+0.03$ и $c=\lambda_{\min}(P_{ILU}^{-1}A_{11})-0.03$, что является попыткой реализовать второй вариант, но при условии грубой оценки собственных значений.

Результаты эксперимента показывают, что $c=\lambda_{\min}(P_{ILU}^{-1}A_{11})$ является единственным подходящим вариантом.

Также, для случая, когда P является MILU-факторизацией A_{11}, экспериментальные значения собственных значений $B^{-1}A$ достаточно хорошо согласуются с соответствующими теоретическими оценками, доказанными в теореме.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Беркович Л.М.* Факторизация и преобразования дифференциальных уравнений. Методы и приложения / Беркович Л.М.//М.: РХД, 2002. — 464 с.

2. *Ильин В.П.* Методы неполной факторизации для решения алгебраических систем.//М.: Наука, 1995. — 286 с.

3. *Ларин М.Р.* Алгебраический многоуровневый итерационный метод неполной факторизации для стилтьесовых матриц// ЖВМиМФ, 1998, Т. 38, № 7, С. 1059—1074.

4. *Axelsson O.* Iterative Solution Methods, University Press, Cambridge,1994.

5. *Axelsson O., Vassilevski P.S.* Algebraic multilevel preconditioning methods, II., SIAM J. Numer. Anal., 27 (1990), P. 1569—1590.

6. *Bank R.E.* Hierarchical bases and the finite element method, Acta Numerica, 5 (1996), P. 1—43.