УДК 62-50

СИНТЕЗ МОДАЛЬНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

© 2004 А. В. Дылевский, Г. И. Лозгачев

Воронежский государственный университет

Предлагается метод синтеза модальных регуляторов, обеспечивающих заданное распределение полюсов и части нулей передаточной функции замкнутой системы. Процедура синтеза регулятора осуществляется непосредственно по передаточной функции замкнутой системы. Рассматриваемый метод сводится к делению полиномов.

ВВЕДЕНИЕ

В задачах синтеза систем управления одним из основных вопросов является модальное управление, т.е. обеспечение заданного распределения нулей и полюсов передаточной функции замкнутой системы [1, 2, 3].

В [4] для непрерывного полностью управляемого и наблюдаемого объекта рассматривается метод синтеза передаточной функции регулятора по передаточной функции замкнутой системы. Метод сводится к поиску общего решения неопределенной системы линейных алгебраических уравнений и позволяет в классе дробно-рациональных передаточных функций для заданного характеристического многочлена получить все множество реализуемых регуляторов, обеспечивающее заданное распределение не только полюсов, как в [3], но и части нулей передаточной функции замкнутой системы. В [5] предлагается метод синтеза передаточной функции модального регулятора как для непрерывного, так и для дискретного объекта. Этот метод сводится к корневому методу решения системы полиномиальных уравнений и позволяет для объекта с невырожденной передаточной функцией синтезировать множество регуляторов, обеспечивающих заданное распределение полюсов и части нулей передаточной функции замкнутой системы.

Настоящая статья посвящена синтезу модальных систем управления как для дискретных, так и для непрерывных объектов. Предлагаемый метод дает возможность проектировать не только свободное, но и вынужденное движение замкнутой системы управления, учитывая априорную информацию о задающих воздействиях и внешних возмущениях. Класс реализуемых модальных регуляторов, полученный с помощью рассматриваемого в данной статье метода, включает множество регуляторов, полученных в [4, 5]. При этом для устойчивого объекта синтез модальных регуляторов значительно упрощается. Предлагаемый метод может быть легко запрограммирован и успешно применяться для проектирования на ЭВМ систем управления с заданным качеством переходных процессов (например, в пакете Matlab).

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Обозначим через $\mathcal{R}_n$ множество алгебраических многочленов степени n над полем действительных чисел.

Для заданной передаточной функции объекта управления

$$W(p) = \frac{B(p)}{A(p)},\ A(p) \in \mathcal{R}_m,\ B(p) \in \mathcal{R}_l,\ m \ge l, \quad (1)$$

и заданного полинома $D(p) \in \mathcal{R}_n$ требуется определить передаточную функцию реализуемого регулятора

$$V(p) = \frac{S(p)}{R(p)} \quad (2)$$

так, чтобы передаточная функция замкнутой системы управления, структурная схема которой изображена на рис. 1, удовлетворяла следующему условию:

$$\Phi(p) = \frac{Q(p)}{D(p)}, \quad \deg Q \le \deg D, \quad (3)$$

где $Q(p)$ — алгебраический многочлен, у которого k свободных коэффициентов. Об-

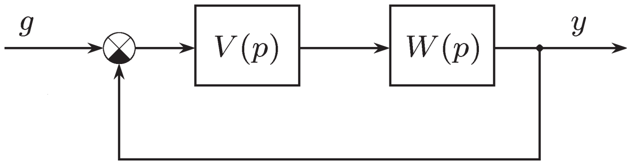

Рис. 1

щий вид многочлена $Q(p)$ будет выписан ниже. Свободные коэффициенты могут принимать произвольные значения и влияют на распределение только нулей передаточной функции $\Phi(p)$.

Замечание 1. *Рассматриваемая система управления может быть как непрерывной, так и дискретной.*

2. ОПИСАНИЕ МЕТОДА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

По структурной схеме, представленной на рис. 1, учитывая формулы (1), (2) и осуществляя элементарные преобразования, находим

$$\Phi(p) = \frac{B(p)S(p)}{B(p)S(p) + A(p)R(p)}. \tag{4}$$

Отсюда, принимая во внимание условие (3), получаем систему полиномиальных уравнений относительно $S(p)$ и $R(p)$

$$\begin{aligned} B(p)S(p) &= Q(p), \\ B(p)S(p) + A(p)R(p) &= D(p). \end{aligned} \tag{5}$$

Очевидно, что при известном $S(p)$ многочлен $Q(p)$ полностью определен. Таким образом, для решения поставленной задачи требуется решить следующее полиномиальное уравнение:

$$B(p)S(p) + A(p)R(p) = D(p). \tag{6}$$

Для того чтобы многочлен $Q(p)$ имел k свободных коэффициентов, решение уравнения (6) будем искать в виде

$$\begin{aligned} S(p) &= S_0(p) + A(p)C(p), \\ R(p) &= R_0(p) - B(p)C(p), \end{aligned} \tag{7}$$

где произвольный полином $C(p) \in \mathcal{R}_{k-1}$ имеет k свободных коэффициентов, а многочлены $S_0(p)$ и $R_0(p)$ являются решением полиномиального уравнения

$$B(p)S_0(p) + A(p)R_0(p) = D(p). \tag{8}$$

Замечание 2. *Если* $k = 0$, *то полагаем* $C(p) \equiv 0$.

Введем в рассмотрение функцию

$$\chi_{ml} = \begin{cases} 1, & m > l, \\ 0, & m = l. \end{cases}$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Если многочлены* $A(p) \in \mathcal{R}_m$ *и* $B(p) \in \mathcal{R}_l$, $m \geq l$, *взаимно простые, то для любого полинома* $D(p) \in \mathcal{R}_n$, $n \geq 2m - \chi_{ml}$, *существует единственная пара многочленов* $S_0(p) \in \mathcal{R}_{m-1}$ *и* $R_0(p) \in \mathcal{R}_{n-m}$, *являющаяся решением полиномиального уравнения (8).*

Доказательство. Обозначим через $\lambda_i \in \mathbb{C}$, $i = \overline{1, \mu}$, различные корни кратности ν_i многочлена $A(p)$, $\sum_{i=1}^{\mu} \nu_i = m$. По условию теоремы

$$B(\lambda_i) \neq 0 \quad \forall i = \overline{1, \mu}. \tag{9}$$

Тогда, дифференцируя ρ_i раз ($\rho_i = \overline{0, \nu_i - 1}$) уравнение (8), получаем следующую интерполяционную задачу:

$$[B(p)S_0(p)]_{p=\lambda_i}^{(\rho_i)} = D^{(\rho_i)}(\lambda_i), \tag{10}$$

или, что тоже,

$$S_0^{(\rho_i)}(\lambda_i) = \left[\frac{D(p)}{B(p)}\right]_{p=\lambda_i}^{(\rho_i)}. \tag{11}$$

Поскольку все λ_i различны и справедливо неравенство (9), то, как показано в [6], существует единственный полином $S_0(p)$ степени $(m-1)$, удовлетворяющий условию (11). При этом $S_0(p)$ представляет собой интерполяционный многочлен Эрмита. Так как условие (10) выполняется, то многочлен $D(p) - B(p)S_0(p)$ единственным способом делится без остатка на многочлен $A(p)$, то есть

$$R_0(p) = \frac{D(p) - B(p)S_0(p)}{A(p)}, \tag{12}$$

причем $\deg R_0 = n - m$.

Докажем теперь, что коэффициенты многочленов $S_0(p)$ и $R_0(p)$ являются действительными числами. В самом деле, полиномиальное уравнение (8) можно представить в виде линейной системы алгебраических уравнений с вещественными коэффициентами, в которой неизвестными являются коэффициенты многочленов $S_0(p)$ и $R_0(p)$. Решением такой системы могут быть только действительные числа. Однако выше было показано, что пара многочленов $S_0(p)$ и

$R_0(p)$ является единственным решением уравнения (8), а значит и соответствующей линейной системы. Теорема доказана.

Следствие 1. *Из теоремы 1 и равенства (7) непосредственно следует, что*

$$V(p) = \frac{S(p)}{R(p)} = \frac{S_0(p) + A(p)C(p)}{R_0(p) - B(p)C(p)}, \qquad (13)$$

$$\Phi(p) = \frac{Q(p)}{D(p)} = \frac{B(p)[S_0(p) + A(p)C(p)]}{D(p)}. \quad (14)$$

При этом многочлены $S_0(p)$ и $R_0(p)$ не зависят от $C(p)$.

Следствие 2. *Из теоремы 1 и формулы Эрмита [6] следует, что*

$$S_0(p) = \frac{1}{2\pi j}\int_\Gamma \frac{A(s) - A(p)}{A(s)(s-p)}\frac{D(s)}{B(s)}ds, \qquad (15)$$

где Γ — контур, содержащий все корни λ_i многочлена $A(p)$.

Нетрудно заметить, что задача распределения k $(k \ge 1)$ нулей передаточной функции замкнутой системы $\Phi(p)$ сводится к решению полиномиального уравнения

$$A(p)C(p) + M(p)N(p) = S_0(p)$$

относительно неизвестных $C(p)$ и $N(p)$. Здесь многочлен $M(p) \in \mathcal{R}_k$ определяет распределение k нулей передаточной функции замкнутой системы $\Phi(p)$, $N(p) \in \mathcal{R}_{m-1}$ — некоторый многочлен, который может быть найден при известном $C(p)$ с помощью следующей формулы:

$$N(p) = \frac{S_0(p) - A(p)C(p)}{M(p)}.$$

Теорема 2. *Передаточные функции регулятора (13) и замкнутой системы (14) всегда реализуемы, если выполняется неравенство*

$$n \ge 2m + k - \chi_{ml}. \qquad (16)$$

Доказательство. Условие реализуемости передаточной функции регулятора (13) определяется неравенством

$$\deg R \ge \deg S. \qquad (17)$$

Если неравенство (16) справедливо, то согласно теореме 1 имеем $\deg R_0 = n - m > \deg BC = l + k - 1$ и $\deg S_0 = m - 1 \le m - 1 + k = \deg S$. Поэтому $\deg R = n - m$ и $\deg S = m - 1 + k$. Таким образом, условие (16) гарантирует выполнение неравенства (17).

Условие реализуемости передаточной функции замкнутой системы (14) имеет вид

$$\deg D \ge \deg Q. \qquad (18)$$

При выполнении неравенства (16), принимая во внимание соотношение $m \ge l$, получаем

$$\deg D = n \ge 2m + k - \chi_{ml} \ge$$
$$\ge m + k - 1 + l = \deg Q \quad \forall k \ge 0,$$

т.е. условие (18) выполняется. Теорема доказана.

Замечание 3. *Следует особо отметить, что для $m = l$ вместо условия реализуемости (16) можно рассмотреть условие*

$$n \ge 2m + k - 1. \qquad (19)$$

В этом случае только при некотором (единственном) наборе коэффициентов многочлена $C(p) = C^*(p)$ передаточная функция регулятора становится нереализуемой, т.е. существует бесконечное множество реализуемых регуляторов, решающих поставленную задачу.

3. ПРАКТИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА СИНТЕЗА МОДАЛЬНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Для практического синтеза модальных систем управления и проверки взаимной простоты многочленов можно использовать алгоритм Евклида, который заключается в последовательном делении полиномов:

$$\begin{aligned}
&A(p) = B(p)P_0(p) + Z_1(p), && 0 < \deg Z_1 < \deg B,\\
&B(p) = Z_1(p)P_1(p) + Z_2(p), && 0 < \deg Z_2 < \deg Z_1,\\
&Z_1(p) = Z_2(p)P_2(p) + Z_3(p), && 0 < \deg Z_3 < \deg Z_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&Z_{l-2}(p) = Z_{l-1}(p)P_{l-1}(p) + Z_l(p), && 0 \le \deg Z_l < \deg Z_{l-1},\\
&Z_l(p) = q.
\end{aligned} \qquad (20)$$

Многочлены $A(p)$ и $B(p)$ являются взаимно простыми тогда и только тогда, когда $q = \mathrm{const} \ne 0$. Если это условие выполнено, то, как показано в [3], $S_0(p)$ есть остаток от деления $\frac{(-1)^l}{q}N_l(p)D(p)$ на $A(p)$, где многочлен $N_l(p)$ определяется с помощью следующего рекуррентного соотношения:

$$\begin{cases} N_{i+1}(p) = N_i(p)P_i(p) + N_{i-1}(p), i = \overline{0, l-1},\\ N_{-1}(p) = 0, N_0(p) = 1. \end{cases} \qquad (21)$$

Соответствующий полином $R_0(p)$ можно получить делением непосредственно из формулы (12).

Замечание 4. *Если* $l = 0$, *т.е.* $B(p) = \text{const}$, *тогда* $Z_1(p) = B(p) = q$ *и* $S_0(p)$ *есть остаток от деления* $\dfrac{D(p)}{q}$ *на* $A(p)$.

Таким образом, алгоритм синтеза модальных регуляторов сводится к процедуре деления полиномов и может быть легко запрограммирован на ЭВМ.

4. РЕДУЦИРОВАННЫЙ МЕТОД СИНТЕЗА МОДАЛЬНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Рассмотрим метод, позволяющий упростить процедуру синтеза передаточной функции модального регулятора в том случае, когда многочлен $A(p) \in \mathcal{R}_m$ содержит своим множителем некоторый полином $H(p) \in \mathcal{R}_r$ [7]. С этой целью представим многочлены $A(p)$, $S_0(p)$ и $D(p)$ в виде произведений $A(p) = \hat{A}(p)H(p)$, $S_0(p) = \hat{S}_0(p)H(p)$ и $D(p) = \hat{D}(p)H(p)$, где $\hat{A}(p) \in \mathcal{R}_{m-r}$, $\hat{S}_0(p) \in \mathcal{R}_{m-r-1}$ и $\hat{D}(p) \in \mathcal{R}_{n-r}$. Тогда полиномиальное уравнение (8) приобретает следующий вид:

$$B(p)\hat{S}_0(p) + \hat{A}(p)R_0(p) = \hat{D}(p). \qquad (22)$$

Таким образом, получаем алгебраическую систему, состоящую из $(m-r)$ уравнений относительно неизвестных коэффициентов многочлена $\hat{S}_0(p)$, вместо m уравнений в (8). Кроме того, для разрешимости полиномиального уравнения (22) в условиях теоремы 1 следует требовать взаимной простоты многочленов $B(p)$ и $\hat{A}(p)$, а не $B(p)$ и $A(p)$. Условия реализуемости модального регулятора

$$V(p) = \frac{S(p)}{R(p)} = \frac{[\hat{S}_0(p) + \hat{A}(p)C(p)]H(p)}{R_0(p) - B(p)C(p)}$$

и передаточной функции замкнутой системы

$$\Phi(p) = \frac{Q(p)}{D(p)} = \frac{[\hat{S}_0(p) + \hat{A}(p)C(p)]H(p)B(p)}{\hat{D}(p)H(p)}$$

определяется неравенством (16).

Заметим, что если $m - r = m_r < l$, то рассмотренный в предыдущем пункте метод применять нельзя. В этом случае следует использовать модификацию алгоритма Евклида

$$B(p) = \hat{A}(p)P_0(p) + Z_1(p), \quad 0 < \deg Z_1 < \deg \hat{A},$$
$$\hat{A}(p) = Z_1(p)P_1(p) + Z_2(p), \quad 0 < \deg Z_2 < \deg Z_1,$$
$$Z_1(p) = Z_2(p)P_2(p) + Z_3(p), \quad 0 < \deg Z_3 < \deg Z_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$Z_{m_r-2}(p) =$$
$$= Z_{m_r-1}(p)P_{m_r-1}(p) + Z_{m_r}(p), \quad 0 \le \deg Z_{m_r} < \deg Z_{m_r-1},$$
$$Z_{m_r}(p) = q.$$

Полиномы $\hat{A}(p)$ и $B(p)$ являются взаимно простыми тогда и только тогда, когда $q = \text{const} \neq 0$. При выполнении этого условия многочлен $\hat{S}_0(p)$ есть остаток от деления $\dfrac{(-1)^{m_r+1}}{q} N_{m_r}(p)\hat{D}(p)$ на $\hat{A}(p)$. Здесь полином $N_{m_r}(p)$ может быть найден с помощью рекуррентной формулы

$$\begin{cases} N_{i+1}(p) = N_i(p)P_i(p) + N_{i-1}(p), \quad i = \overline{0, m_r - 1}, \\ N_{-1}(p) = 1, \quad N_0(p) = 0. \end{cases} \qquad (23)$$

5. СИНТЕЗ СЛЕДЯЩИХ СИСТЕМ ПРИ ЗАДАННЫХ КЛАССАХ ЗАДАЮЩИХ И ВОЗМУЩАЮЩИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

Рассмотрим задачу построения следящей системы, блок-схема которой представлена на рис. 2. Следуя принципу поглощения [8], классы задающих воздействий $g(t)$ и внешних возмущений $f(t)$ системы автоматического управления будем описывать соответствующими дифференциальными (разностными) уравнениями

$$L_1(\sigma)g(t) = 0, \quad L_2(\sigma)f(t) = 0, \qquad (24)$$

с произвольными начальными условиями. Здесь $L_1(\sigma)$, $L_2(\sigma)$ — некоторые алгебраические многочлены от σ; σ — либо оператор дифференцирования ($\sigma f(t) = df(t)/dt$,

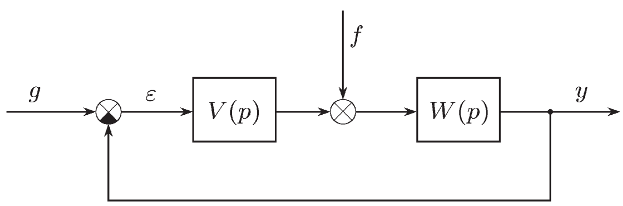

Рис. 2

непрерывный случай), либо оператор опережения ($\sigma f(i) = f(i+1)$, дискретный случай). Конкретные представители классов задающих и возмущающих воздействий определяются начальными условиями уравнений (24).

Для повышения качества управления синтезируем передаточную функцию регулятора, использующего полезную информацию о задающих воздействиях и внешних возмущениях. Метод построения регулятора без особых трудностей сводится к описанной выше процедуре синтеза модальных регуляторов. Действительно, рассмотрим расширенный объект с передаточной функцией

$$W^*(p) = \frac{B(p)}{A(p)L(p)} = \frac{B(p)}{A^*(p)}, \qquad (25)$$

где $L(p) = L_1(p)L_2(p) \in \mathcal{R}_\mu$, $L_i(p) \in \mathcal{R}_{\mu_i}$, $i = \overline{1,2}$, $\mu = \mu_1 + \mu_2$.

Для расширенного объекта (25) полиномиальное уравнение (8) принимает вид

$$B(p)S_0(p) + A^*(p)R_0(p) = D(p), \qquad (26)$$

где $A^*(p) = A(p)L(p) \in \mathcal{R}_{m^*}$, $m^* = m + \mu$. Отметим, что полином $D(p)$ естественно выбирать устойчивым.

Замечание 5. *Так как предлагаемые в данной статье методы синтеза модальных систем управления рассматриваются применительно к непрерывным и дискретным объектам, то устойчивым многочленом (многочленом Гурвица) условимся называть полином, корни которого находятся строго в левой полуплоскости комплексной переменной (непрерывный случай), или, если все корни этого многочлена лежат на комплексной плоскости внутри единичного круга с центром в начале координат (дискретный случай).*

Если многочлены $B(p) \in \mathcal{R}_l$ и $A^*(p) \in \mathcal{R}_{m^*}$, $m^* \geq l$, взаимно простые, то, как следует из теорем 1 и 2, для любого многочлена $D(p)$, $n \geq 2m + \mu - \chi_{ml}$, существует единственная пара многочленов $S_0(p) \in \mathcal{R}_{m^*-1}$ и $R_0(p) \in \mathcal{R}_{n-m^*}$, являющихся решением полиномиального уравнения (26). При этом передаточная функция регулятора для исходного объекта (1) примет вид

$$V(p) = \frac{S(p)}{R(p)} = \frac{S_0(p) + A(p)L(p)C(p)}{[R_0(p) - B(p)C(p)]L(p)}, \qquad (27)$$

где, как и ранее, $C(p) \in \mathcal{R}_{k-1}$ — произвольный полином.

Заметим, что при известном $S_0(p)$ для нахождения $R_0(p)$ можно воспользоваться формулой

$$R_0(p)L(p) = \frac{D(p) - B(p)S_0(p)}{A(p)}.$$

Условие реализуемости передаточной функции регулятора (27) и передаточной функции замкнутой системы (14) задается следующим неравенством:

$$n \geq 2m + \mu + k - \chi_{ml}. \qquad (28)$$

Далее ограничимся рассмотрением непрерывного случая и покажем, что ошибка регулирования $\varepsilon(t)$ стремится к нулю при $t \to \infty$. По структурной схеме, представленной на рис. 2, находим изображение по Лапласу для ошибки

$$E(p) = \mathcal{L}\{\varepsilon(t)\} = \\ = \frac{G(p)}{1 + V(p)W(p)} - \frac{W(p)}{1 + V(p)W(p)} F(p), \qquad (29)$$

где $G(p) = \mathcal{L}\{g(t)\}$, $Y(p) = \mathcal{L}\{y(t)\}$. Отсюда, принимая во внимание равенства (1) и (27), получаем

$$E(p) = \frac{A(p)R(p)}{D(p)} G(p) + \frac{B(p)R(p)}{D(p)} F(p). \qquad (30)$$

Так как имеют место дифференциальные уравнения (24), то

$$L_1(p)G(p) = G_0(p), \quad L_2(p)F(p) = F_0(p), \qquad (31)$$

где коэффициенты многочленов $G_0(p) \in \mathcal{R}_{\mu_1 - 1}$ и $F_0(p) \in \mathcal{R}_{\mu_2 - 1}$ определяются значениями $g^{(i)}(0)$, $i = \overline{1, \mu_1 - 1}$ и $f^{(j)}(0)$, $j = \overline{1, \mu_2 - 1}$ соответственно. С учетом равенств (31) формула (30) примет вид

$$E(p) = \frac{(R_0(p) - B(p)C(p))(A(p)L_2(p)G_0(p)}{D(p)} + \\ + \frac{B(p)L_1(p)F_0(p))}{D(p)}.$$

Так как полином $D(p)$ является устойчивым, то $\varepsilon(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Дискретный случай рассматривается аналогично.

6. ПРИМЕР

Для неминимально-фазового объекта

$$W(p)=\frac{2-p}{p^2-4p+3} \qquad (32)$$

найдем передаточную функцию реализуемого регулятора $V(p)$. В рассматриваемом случае

$$B(p)=-p+2, l=1,\ A(p)=p^2-4p+3, m=2.$$

Очевидно, что неравенство $m\ge l$ выполнено. Применяя алгоритм Евклида (20), получаем $P_0(p)=2-p$, $Z_1(p)=q=-1$. Таким образом, многочлены $A(p)$ и $B(p)$ являются взаимно простыми. По формулам (21) находим

$$N_1(p)=N_0(p)P_0(p)+N_{-1}(p)=-p+2.$$

Из условия реализуемости (16) получаем ограничение на степень желаемого характеристического многочлена $D(p)$ замкнутой системы: $n\ge 2m+k-1=3+k$. Положим $k=0$ и $n=3$. Пусть

$$D(p)=(p+1)(p+2)(p+3)=p^3+6p^2+11p+6.$$

Согласно п. 3 полином $S_0(p)$ есть остаток от деления $\dfrac{(-1)}{q}N_1(p)D(p)$ на $A(p)$, т.е. $S_0(p)=96-72p$. Применяя формулу (12), находим $R_0(p)=p-62$.

Итак, передаточные функции регулятора $V(p)$ и замкнутой системы $\Phi(p)$ согласно формулам (13), (14) имеют соответственно вид

$$V(p)=\frac{24(4-3p)}{p-62},\ \Phi(p)=\frac{24(3p-4)(p-2)}{(p+1)(p+2)(p+3)}.$$

Пусть теперь $k=1$, $n=4$ и

$$\begin{gathered}D(p)=(p+1)(p+2)(p+3)(p+4),\\ C(p)=c_0,\end{gathered} \qquad (33)$$

где c_0 — произвольное вещественное число. Так как $N_1(p)=2-p$, то $S_0(p)=-480p+600$ и $R_0(p)=p^2+14p-392$. Окончательно получаем

$$V(p)=\frac{600-480p+c_0(p^2-4p+3)}{p^2+14p-392-c_0(2-p)},$$

$$\Phi(p)=\frac{(c_0p^2-4(120+c_0)p+3(200+c_0))(2-p)}{(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)}. \qquad (34)$$

Коэффициент c_0 может принимать произвольные значения. В частности, при $c_0=-196$ получаем

$$V(p)=\frac{-196p^2+304p+12}{(p-182)p},$$

$$\Phi(p)=\frac{(-196p^2+304p+12)(2-p)}{(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)}.$$

Таким образом, замкнутая система имеет астатизм 1-го порядка.

Для объекта (32) синтезируем теперь регулятор с помощью метода, описанного в [4]. Отметим, что этот метод применим, если $n\ge 2m$. Пусть $n=4$ и $D(p)$ имеет вид (33). В этом случае

$$\Phi(p)=\frac{q_0p^4+q_1p^3+q_2p^2+q_3p+q_4}{p^4+10p^3+35p^2+50p+24}=\frac{Q(p)}{D(p)}.$$

Для определения коэффициентов q_i, а также многочленов $S(p)$ и $R(p)$ составляем систему уравнений

$$\frac{D(p)-Q(p)}{A(p)}=R(p)+\frac{R_{\text{ост}}(p)}{A(p)}, R_{\text{ост}}(p)=0,$$

$$\frac{Q(p)}{B(p)}=S(p)+\frac{S_{\text{ост}}(p)}{B(p)}, S_{\text{ост}}(p)=0.$$

Имеем

$$S(p)=-q_0p^3-(2q_0+q_1)p^2-(4q_0+2q_1+q_2)p-$$
$$-(8q_0+4q_1+2q_2+q_3),$$
$$R(p)=(1-q_0)p^2+(14-4q_0-q_1)p+$$
$$+(88-13q_0-4q_1-q_2),$$

где

$$16q_0+8q_1+4q_2+2q_3+q_4=0,$$
$$-40q_0-13q_1-4q_2-q_3+360=0,$$
$$39q_0+12q_1+3q_2-q_4-240=0.$$

Решая эту систему алгебраических уравнений при дополнительном равенстве $q_0=0$, вытекающем из условия реализуемости регулятора $\deg S\le\deg R$, находим $q_2=480-6q_1$, $q_3=11q_1-1560$, $q_4=1200-6q_1$. В результате окончательно получаем

$$V(p)=\frac{-q_1p^2-4(120-q_1)p+3(200-q_1)}{p^2+(14-2q_1)p+2(q_1-196)},$$

$$\Phi(p)=$$
$$=\frac{q_1p^3+6(80-q_1)p^2+(11q_1-1560)p+6(200-q_1)}{(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)}. \qquad (35)$$

Нетрудно проверить, что при $c_0 = -q_1$ формулы (34) и (35) эквивалентны.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье разработан метод синтеза класса модальных регуляторов для дискретных и непрерывных объектов в одноконтурных системах управления. Предлагаемый метод дает возможность проектировать не только свободное, но и вынужденное движение замкнутой системы управления, учитывая априорную информацию о задающих воздействиях и внешних возмущениях. Метод сводится к делению полиномов и может быть легко запрограммирован. Рассматриваемый метод может применяться для синтеза робастных и оптимальных систем управления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Grimble M.J., Kucera V*. Polynomial Methods for Control Systems Design, Springer, London, 1996. 260 p.

2. *Кузовков Н.Т*. Модальное управление и наблюдающие устройства. М.: Машиностроение, 1976. 184 с.

3. *Волгин Л.Н*. Оптимальное дискретное управление динамическими системами. М.: Наука, 1986. 240 с.

4. *Лозгачев Г.И*. Синтез модальных регуляторов по передаточной функции замкнутой системы // Автоматика и телемеханика. 1995. № 5. С. 49—55.

5. *Дылевский А. В., Лозгачев Г. И*. Синтез линейных систем управления с заданным характеристическим полиномом // Известия АН. Теория и системы управления, 2003. № 4. С. 17—20.

6. *Уолш Дж.Л*. Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области. М.: Иностранная литература, 1961. 508 с.

7. *Лозгачев Г.И*. Построение модальных регуляторов для одноконтурных и многосвязных систем // Автоматика и телемеханика. 2000. № 12. С. 15—21.

8. *Вишняков А.Н. Цыпкин Я. З*. Синтез модальных дискретных систем управления // Автоматика и телемеханика. 1993. № 7. С. 86—94.