УДК 519.85

ПОСТРОЕНИЕ СЕТИ НА МНОЖЕСТВЕ ПАРЕТО

© 2004 Ю. В. Бугаев

Воронежская государственная технологическая академия

Предлагается метод построения сети на множестве параметров логических сверток, с помощью которой составляется конечная аппроксимация множества Парето задачи непрерывной многокритериальной оптимизации.

ВВЕДЕНИЕ

Сложные задачи многокритериальной оптимизации, возникающие на практике, решаются обычно в два этапа. На первом происходит построение некоторого конечного набора эффективных альтернатив (конечная аппроксимация множества Парето), из которых на следующем этапе с помощью неформальных методов выбирают оптимальное решение. Известным подходом к решению задачи первого этапа является параметризация множества P Парето-оптимальных решений. Суть подхода заключается в построении отображения на множество эффективных точек некоторого множества L простой геометрии. При этом конечная сеть на L (множество $L(h)$) с помощью тех или иных сверток векторного критерия отображается в конечную сеть на множестве Парето.

Часто L либо включено, либо близко к множеству

$$\Lambda\{\lambda \in R^{m} \mid \lambda_j \geq 0; \sum_{j=1}^{m} \lambda_j = 1\},$$

где m — число критериев задачи. Подобная параметризация достаточно полно исследована (см. например [1—4]). В данной работе предлагается в качестве L использовать множество другой структуры. Такой подход позволяет построить практически неизбыточную сеть Парето-оптимальных решений при заданных показателях ее густоты. А именно, будем рассматривать множество весов λ, заданное условием

$$\Gamma = \begin{Bmatrix} \lambda \in R^m \mid 0 < \alpha \leq \lambda_i \leq \beta, \\ i = 1,..m; \ \ \min \lambda_i = \alpha \end{Bmatrix}. \tag{1}$$

Обозначим $Y(\varepsilon) \subset P$ — искомую сеть на множестве Парето. В качестве меры ее густоты будем использовать максимальное расстояние между соседними точками. То есть потребуем выполнения неравенства

$$\max_x \min_y \left\{ \|x - y\| \mid x, y \in Y(\varepsilon) \right\} \leq \varepsilon. \tag{2}$$

В качестве метода построения сети будем использовать поточечную минимизацию логических сверток

$$\begin{aligned} \varphi_1(\lambda, y) &= \max_i \{y_i(x) - \lambda_i\}; \\ \varphi_2(\lambda, y) &= \max_i \{y_i(x) / \lambda_i\}; \\ \varphi_3(\lambda, y) &= \max_i \{y_i(x)\lambda_i\}. \end{aligned} \tag{3}$$

1. УСЛОВИЯ НЕПРЕРЫВНОСТИ ЭФФЕКТИВНЫХ РЕШЕНИЙ ПО ПАРАМЕТРУ

Исследуем условия непрерывной зависимости Парето-оптимальных решений от параметра λ при произвольной структуре множества параметров и любой применяемой свертке критериев.

Пусть X, V, L — множества определения, значений векторного критерия и параметров λ соответственно и $\varphi(\lambda, y)$ — произвольная функция, определенная и непрерывная на произведении $L \times V$ и при любом λ возрастающая по отношению «$>$» на V [5], т.е. обладающая следующим свойством: для любых $u, v \in V$ если $u_i > v_i$ для всех i, то $\varphi(\lambda, u) > \varphi(\lambda, v)$. Очевидно, все свертки (3) обладают этим свойством.

Без ограничения общности будем считать, что каждый критерий $y_i(x)$ желательно минимизировать. Обозначим $Y^*(\lambda) \subset V$ — множество глобальных минимумов функции

$\varphi(\lambda, y)$. Как известно [5], если $\varphi(\lambda, y)$ обладает упомянутым свойством, то $Y^*(\lambda)$ включено в множество слабо-эффективных оценок. Достаточным условием оптимальности по Парето точки $y^0 \in Y^*(\lambda)$ является

$$y^0 = \arg\min\{\omega(y) \mid y \in Y^*(\lambda)\}, \qquad (4)$$

где $\omega(y)$ — произвольная функция, возрастающая по отношению «$\geq$».

Определим на V функцию выбора, которая на каждом предъявлении $Y^*(\lambda)$ определяет единственную Парето-оптимальной точку. Например, выбор может быть реализован посредством соотношения (4) и некоторых дополнительных условий, если (4) недостаточно для однозначной идентификации. Подробно о функциях выбора см. например [6].

Таким образом, можно построить однозначное отображение $f: L \to V$, которое каждому $\lambda \in L$ ставит в соответствие некоторую точку $f(\lambda) \in Y^*(\lambda) \cap P(V)$, и тем самым решает задачу параметризации множества Парето.

Достаточное условие непрерывности решения по параметру определяется следующей леммой.

Лемма 1. Пусть $V \subset R^m$ — замкнутое множество, и пусть функция $\varphi(\lambda, y)$ определена и непрерывна на произведении $L \times V$ и при любом λ возрастает по отношению «$>$» на V. Тогда отображение f непрерывно в точке λ, если

$$\{f(\lambda)\} = Y^*(\lambda) \cap [P(V)], \qquad (5)$$

где $[P(V)]$ — замыкание множества $P(V)$.

Доказательство. Предположим противное, т.е. условие (5) выполнено, но f при некотором $\lambda = \lambda^0$ терпит разрыв. Это означает, что $\lim\limits_{\lambda \to \lambda^0} f(\lambda) = y^1 \neq f(\lambda^0) = y^0$. Поскольку $f(\lambda)$ при любом λ принадлежит $P(V)$, то $y^1 \in [P(V)]$. Так как V замкнуто, то $y^1 \in V$ и, следовательно, значение $\varphi(\lambda^0, y^1)$ определено.

Сравним $\varphi(\lambda^0, y^1)$ и $\varphi(\lambda^0, y^0)$. С одной стороны $f(\lambda)$ является точкой минимума $\varphi(\lambda, y)$ и, следовательно, $\varphi(\lambda, f(\lambda)) \leq \varphi(\lambda, y^0)$ при $\lambda \neq \lambda^0$, а значит, по свойству предела $\varphi(\lambda^0, y^1) \leq \varphi(\lambda^0, y^0)$. С другой стороны $y^0 \in Y^*(\lambda^0)$ и поэтому должно быть $\varphi(\lambda^0, y^1) \geq \varphi(\lambda^0, y^0)$. Следовательно, $\varphi(\lambda^0, y^1) = \varphi(\lambda^0, y^0)$. Это означает, что $y^1 \in Y^*(\lambda^0) \cap [P(V)]$, т.е. условие (5) нарушено, поскольку $Y^*(\lambda^0) \cap [P(V)]$ содержит другие элементы кроме $f(\lambda^0)$. Получаем противоречие, доказывающее лемму.

Сравнивая условие (5) непрерывности эффективного решения по параметру с известным аналогичным условием для свертки φ_3, изложенном в [7], несложно обнаружить, что (5) менее жестко.

2. СВОЙСТВА СЕТИ НА МНОЖЕСТВЕ Г

Рассмотрим логические свертки (3). Представим их в виде $\varphi(\lambda, y) = \max\limits_i \xi(\lambda_i, y_i)$, где выражение $\xi(\lambda_i, y_i)$, определяющее конкретную формулу из (3), назовем моделью свертки. Непосредственно из формул $\xi(\lambda_i, y_i)$ вытекают следующие их свойства:

1) $\xi(\lambda_i, y_i)$ монотонно возрастает по y_i при любом λ;

2) $\xi(\lambda_i, y_i)$ монотонно убывает для φ_1 и φ_2 и возрастает для φ_3 по λ_i при любом y.

Пусть $L = \Gamma$. Основной особенностью такой параметризации является возможность независимого варьирования каждого весового коэффициента λ_i при фиксированных остальных компонентах весов. Пусть $\lambda^0 \in \Gamma$ — произвольный весовой вектор и $\xi(\lambda_i^0, y_i)$ — модель некоторой свертки из (3). Будем предполагать, что выполнены условия леммы 1. Тогда множество $Y^*(\lambda) \cap P(V)$ при каждом λ также состоит из единственного элемента — $f(\lambda)$, который полностью определяется условием лексикографического минимума (4).

Обозначим $\psi_0(y) = \max\limits_i\{\xi(\lambda_i^0, y_i)\}$ и пусть $w = f(\lambda^0)$. Если в точке w для некоторых i выполняется строгое неравенство $\xi(\lambda_i^0, w_i) < \psi_0(w)$, то при небольшом изменении λ_i^0 значение $\psi_0(w)$ и положение ее точки минимума не изменится. Будем предполагать, что веса λ_i^0 подобраны так, что при некотором $\delta > 0$ для всех i выполняется неравенство

$$\xi(\lambda_i^0, w_i) \leq \psi_0(w) < \xi(\lambda_i^0 - \delta, w_i) \qquad (6)$$

если рассматривается свертка φ_1 или φ_2, и неравенство

$$\xi(\lambda_i^0, w_i) \leq \psi_0(w) < \xi(\lambda_i^0 + \delta, w_i).$$

при рассмотрении φ_3. В дальнейшем все выкладки будем выполнять в предположении справедливости (6). Если рассматривать свертку φ_3, то все останется в силе при замене $\lambda_i^0 - \delta$ на $\lambda_i^0 + \delta$.

Обозначим для произвольного $y \in V$ и номера i

$$\psi_i(y) = \max\{\psi_0(y); \xi(\lambda_i^0 - \delta, y_i)\}.$$

В силу (6), точка минимума $\psi_i(y)$ может отличаться от w, следовательно, операция уменьшения λ_i^0 может привести к появлению нового эффективного решения, отличного от w.

Пусть u^i — точка лексикографического минимума $(\psi_i(y);\omega(y))$ на V. Рассматривая варианты варьирования всех весов λ_i^0, введем множество $J(\lambda^0)$ номеров i критериев, для которых выполняется равенство

$$\xi(\lambda_i^0-\delta,u_i^i)=\psi_i(u^i).$$

Лемма 2. Пусть множество V замкнуто и для отображения $f:\Gamma\to V$ условие (5) справедливо для всех λ, лежащих в δ-окрестности вектора λ^0 при некотором $\delta>0$. Пусть $w=f(\lambda^0)$ и i — номер критерия, для которого выполняется (6) с тем же δ. Тогда $i\in J(\lambda^0)$.

Доказательство. В силу леммы 1, $f(\lambda)$ непрерывно в окрестности λ^0.

В этих условиях предположим противное, что при некотором i, для которого справедливо условие (6), имеет место строгое неравенство

$$\xi(\lambda_i^0-\delta,u_i^i)<\psi_i(u^i), \tag{7}$$

которое будет эквивалентно соотношению

$$\xi(\lambda_i^0-\delta,u_i^i)<\psi_0(u^i).$$

Покажем, что w не совпадает с u^i. Действительно, при $w=u^i$ будет $\psi_0(w)=\psi_0(u^i)$, а из (7) вытекает равенство $\psi_0(u^i)=\psi_i(u^i)$. Значит

$$\psi_0(w)=\psi_i(u^i). \tag{8}$$

Введем в рассмотрение параметр $t\in[0,\delta]$. Тогда, в силу (6), при некотором $t_0\in[0,\delta)$ будет выполняться равенство $\xi(\lambda_i^0-t_0,w_i)=\psi_0(w)$. Отсюда, вследствие свойства 2) моделей сверток, имеем:

$$\psi_0(w)=\xi(\lambda_i^0-t_0,w_i)<$$
$$<\xi(\lambda_i^0-\delta,w_i)=\xi(\lambda_i^0-\delta,u_i^i)<\psi_i(u^i),$$

что противоречит (8). Следовательно, $w\neq u^i$.

При $t\in[0,\delta]$ обозначим $\lambda^t=(\lambda_1^0,\ldots,\lambda_i^0-t,\ldots,\lambda_m^0)$; $y^t=f(\lambda^t)$. Тогда (7) эквивалентно неравенству

$$\xi(\lambda_i^0-\delta,y_i^\delta)<\varphi(\lambda^\delta,y^\delta).$$

В силу непрерывности $f(\lambda)$, можно выбрать t столь близким к δ, что будет справедливо условие

$$\xi(\lambda_i^0-t,y_i^t)<\varphi(\lambda^t,y^t). \tag{9}$$

Введем множество T значений t, при которых выполняется (9).

Возьмем $t_1,t_2\in T$, $t_1<t_2$, и пусть y^1, y^2, λ^1, λ^2 — соответствующие им точки лексикографического минимума $(\varphi(\lambda^t,y);\omega(y))$ и веса, при которых эти минимумы достигаются.

Имеем $\xi(\lambda_i^0-t_1,y_i^1)<\varphi(\lambda^1,y^1)$. Тогда $\varphi(\lambda^1,y^1)=\psi_0(y^1)$. При t_2 достаточно близком к t_1 будет также выполняться соотношение

$$\xi(\lambda_i^0-t_2,y_i^1)<\varphi(\lambda^2,y^1)=\psi_0(y^1).$$

Следовательно $\varphi(\lambda^1,y^1)=\varphi(\lambda^2,y^1)=\psi_0(y^1)$. Аналогично получаем $\varphi(\lambda^1,y^2)=\varphi(\lambda^2,y^2)=\psi_0(y^2)$. Отсюда вытекает, что $\varphi(\lambda^1,y^1)=\varphi(\lambda^2,y^2)$, т.к. любое неравенство приводит к противоречию. Но тогда $y^1=y^2$, в противном случае, в силу единственности $f(\lambda)$, должны одновременно выполняться два неравенства $\omega(y^1)<\omega(y^2)$ и $\omega(y^1)>\omega(y^2)$.

Итак, если t_1, $t_2\in T$ — два достаточно близких значения параметра t, то соответствующие им точки лексикографического минимума $(\varphi(\lambda^t,y);\omega(y))$ совпадают. В частности, если t близко к δ, то $y^t=u^i$.

Так как $w\neq u^i$, в точке u^i не может достигаться минимум при всех t. Выделим множество Θ значений t, при которых $y^t=u^i$. Для него существует граничное значение τ, такое что $t\in\Theta$ при $\delta\geq t>\tau$, а значит $y^t=u^i$, и $t\notin\Theta$ при $t<\tau$, т.е. $y^t\neq u^i$. Тогда, вследствие непрерывности $f(\lambda)$, по свойству предела, $y^\tau=u^i$.

Покажем, что

$$\xi(\lambda_i^0-\tau,u_i^i)=\varphi(\lambda^\tau,u^i). \tag{10}$$

Предположим противное, т.е. $\xi(\lambda_i^0-\tau,u_i^i)<\varphi(\lambda^\tau,u^i)=\varphi(\lambda^\tau,y^\tau)$. Тогда, вследствие непрерывности $f(\lambda)$, при $t<\tau$, и достаточно близком к τ, будет также справедливо неравенство $\xi(\lambda_i^0-t,y^t)<\varphi(\lambda^t,y^t)$. Это означает, что $\tau,t\in T$, и поэтому $y^t=y^\tau=u^i$, что противоречит условию $t<\tau$. Значит, (10) выполняется.

Рассмотрим множество $M=(T\cap\Theta)\setminus\{\tau\}$. Оно содержит по крайней мере точку $t=\delta$ вместе с некоторой окрестностью. Возьмем любое $t\in M$. Тогда $y^t=u^i$ и $\xi(\lambda_i^0-t,y^t)<\varphi(\lambda^t,y^t)$. Отсюда имеем

$$\psi_0(u^i)\leq\varphi(\lambda^\tau,u^i)=\xi(\lambda_i^0-\tau,u^i)<$$
$$<\xi(\lambda_i^0-t,u^i)<\varphi(\lambda^t,u^i).$$

Вследствие последнего неравенства будет $\varphi(\lambda^t, y^t) = \psi_0(u^i)$ — получаем противоречие, доказывающее лемму.

Пусть $\varepsilon > 0$ — параметр, определяющий густоту сети на $P(V)$ (см. (2)), а $\delta > 0$ — шаг изменения координат весовых векторов λ на Γ, который, вообще говоря, зависит от текущего λ. Потребуем, чтобы при заданном ε при каждом текущем $\lambda \in \Gamma$ шаг $\delta = \delta(\lambda)$ выбирался так, чтобы для $y = f(\lambda)$ и всех номеров i выполнялись условия

$$\begin{aligned} &\xi(\lambda_i - \delta, y_i) \le \xi(\lambda_i, y_i + \varepsilon), \\ &\xi(\lambda_i, y_i) \le \xi(\lambda_i + \delta, y_i + \varepsilon) \end{aligned} \tag{11}$$

для сверток φ_1 и φ_2 и

$$\begin{aligned} &\xi(\lambda_i + \delta, y_i) \le \xi(\lambda_i, y_i + \varepsilon), \\ &\xi(\lambda_i, y_i) \le \xi(\lambda_i - \delta, y_i + \varepsilon). \end{aligned}$$

для φ_3. В дальнейшем будем предполагать, что используется свертка φ_1 или φ_2. Для φ_3 выкладки аналогичны.

Лемма 3. Пусть при некотором $\delta > 0$ и λ^0 выполнены условия леммы 2. Пусть также в точках ui, i=1,..., m достигаются лексикографические минимумы функций $\psi_i(y)$ и при $\lambda = \lambda^0$, некотором $\varepsilon > 0$ и том же δ справедливо условие (11). Тогда для номеров i, удовлетворяющих (6), будет $0 \le w_i - u_i^i \le \varepsilon$.

Доказательство. Для доказательства левого неравенства предположим противное, т.е. $u_i^i > w_i$ при некотором i. Имеем по определению:

$$\psi_i(w) = \max\{\psi_0(w); \xi(\lambda_i^0 - \delta, w_i)\};$$

$$\psi_i(u^i) = \max\{\psi_0(u^i); \xi(\lambda_i^0 - \delta, u_i^i)\}.$$

В силу (6) $\psi_0(w) < \xi(\lambda_i^0 - \delta, w_i)$, а вследствие леммы 2, $\psi_i(u^i) = \xi(\lambda_i^0 - \delta, u_i^i)$. Отсюда

$$\psi_i(w) = \xi(\lambda_i^0 - \delta, w_i) < \xi(\lambda_i^0 - \delta, u_i^i) = \psi_i(u^i),$$

т.е. $\psi_i(w) < \psi_i(u^i)$, что невозможно в силу определения u^i.

Докажем правое неравенство. При любом $y \in V$ имеем очевидное соотношение:

$$\psi_0(y) \le \psi_i(y). \tag{12}$$

Отсюда для любого i из $J(\lambda^0)$, в силу (11), с учетом того, что весу $\lambda^\delta = (\lambda_1^0, \ldots, \lambda_i^0 - \delta, \ldots, \lambda_m^0)$ соответствует точка $u^i = f(\lambda^\delta)$, имеем:

$$\xi(\lambda_i^0, u_i^i + \varepsilon) \ge \xi(\lambda_i^0 - \delta, u_i^i) =$$

$$= \psi_i(u^i) \ge \psi_0(u^i) \ge \psi_0(w) \ge \xi(\lambda_i^0, w_i).$$

Следовательно, $u_i^i + \varepsilon \ge w_i$. Лемма полностью доказана.

Среди точек u^i выберем u^s, при которой достигается минимум

$$\psi_s(u^s) = \min_i \psi_i(u^i). \tag{13}$$

Если минимум достигается одновременно в нескольких точках, то среди них выберем ту, для которой $\omega(u^s) \le \omega(u^i)$ для всех i, доставляющих минимум (13).

Лемма 4. Пусть выполнены условия леммы 3 и точка u^s определяется соотношением (13). Тогда для всех номеров $i \in J(\lambda^0)$ справедливо неравенство $u_i^s \ge u_i^i$.

Доказательство. Покажем, что для всех $i \in J(\lambda^0)$ выполняется равенство $\xi(\lambda_i^0 - \delta, u_i^s) = \psi_i(u^s)$. Предположим противное, т.е.

$$\xi(\lambda_i^0 - \delta, u_i^s) < \psi_i(u^s) \tag{14}$$

для некоторого i. Тогда, по определению ψ_i, будет $\psi_0(u^s) = \psi_i(u^s)$. Отсюда:

$$\psi_i(u^i) \le \psi_i(u^s) = \psi_0(u^s) \le \psi_s(u^s), \tag{15}$$

т.е. $\psi_i(u^i) \le \psi_s(u^s)$. Так как, по определению us, строгое неравенство невозможно, то остается допустить, что в (15) имеют место равенства, т.е.

$$\psi_i(u^i) = \psi_i(u^s) = \psi_0(u^s) = \psi_s(u^s).$$

Отсюда, во-первых $\psi_i(u^i) = \psi_i(u^s)$, т.е. либо $u^i = u^s$, и тогда лемма верна, либо обычный минимум $\psi_i(y)$ достигается в двух точках одновременно, и тогда, в силу единственности точки $f(\lambda)$, выполняется строгое неравенство $\omega(u^i) < \omega(u^s)$.

Во-вторых, $\psi_i(u^i) = \psi_s(u^s)$, т.е. $\min_j \psi_j(u^j)$ достигается одновременно при $j = i$ и $j = s$. Тогда, по правилу выбора номера s, должно быть $\omega(u^i) \ge \omega(u^s)$ — получаем противоречие. Следовательно, действительно $\xi(\lambda_i^0 - \delta, u_i^s) = \psi_i(u^s)$. Значит

$$\xi(\lambda_i^0 - \delta, u_i^s) = \psi_i(u^s) \ge \psi_i(u^i) = \xi(\lambda_i^0 - \delta, u_i^i).$$

Отсюда $u_i^s \ge u_i^i$, что и требовалось доказать.

Докажем теперь основное утверждение раздела.

Теорема 1. Пусть выполнены условия леммы 4. Тогда $\max_i |u_i^s - w_i| \le \varepsilon$.

Доказательство. Если максимум достигается при $i = s$, то теорема верна в силу леммы 3. Выберем произвольное $i \ne s$ и предположим противное. Возможны два случая

1) $w_i > u_i^s + \varepsilon$, тогда, согласно второму из неравенств (11), лемме 4 и неравенству (12), имеем:

$$\xi(\lambda_i^0, w_i) > \xi(\lambda_i^0, u_i^s + \varepsilon) \geq \xi(\lambda_i^0, u_i^i + \varepsilon) \geq$$

$$\geq \xi(\lambda_i^0 - \delta, u_i^i) = \psi_i(u^i) \geq \psi_0(u^i) \geq \psi_0(w).$$

Следовательно $\xi(\lambda_i^0, w_i) > \psi_0(w)$, что противоречит определению $\psi_0(w)$.

2) $u_i^s > w_i + \varepsilon$, тогда, согласно первому из неравенств (11), лемме 3 и определению *us*, имеем:

$$\psi_0(u^s) \geq \xi(\lambda_i^0, u_i^s) > \xi(\lambda_i^0, w_i + \varepsilon) \geq$$

$$\geq \xi(\lambda_i^0 - \delta, w_i) \geq \xi(\lambda_i^0 - \delta, u_i^i) = \psi_i(u^i) \geq \psi_s(u^s),$$

т.е. $\psi_0(u^s) > \psi_s(u^s)$, что противоречит (12). Теорема доказана.

Таким образом, найдены условия, при соблюдении которых полученные Парето-оптимальные решения обладают необходимым свойством, определяемым неравенством (2). Из них условие (5) зависит от структуры ограничений и свойств критериев поставленной задачи непрерывной векторной оптимизации. Выполнение условия (6) можно обеспечить в любом случае. Справедливость условия (11) зависит от способа построения сети на множестве параметров Г. Этот способ рассмотрим в следующем разделе.

3. ПОСТРОЕНИЕ СЕТИ НА МНОЖЕСТВЕ Г.

Пусть для всех i значения критериев удовлетворят неравенству $0 < a \leq y_i \leq b$, а веса — $\alpha \leq \lambda_i \leq \beta$. Очевидно, если использовать свертку φ_1, то при $\delta \leq \varepsilon$ неравенства (11) выполняются всегда. Тогда строим сеть с постоянным шагом $\delta = (\beta - \alpha)/k^*$, где k^* — наименьшее целое, удовлетворяющее неравенству $k^* \geq (\beta - \alpha)/\varepsilon$.

При использовании сверток φ_2 и φ_3, несложно убедиться, что условие (11) выполняется при

$$\delta \leq \frac{\lambda_i \varepsilon}{y_i^{\max}}, i = 1, \ldots, m.$$

Тогда должно быть

$$\delta \leq \frac{\lambda_i \varepsilon}{b}, i = 1, \ldots, m. \quad (16)$$

Пусть λ_i^0 — текущее значение весового коэффициента и пусть $\lambda_i^1 = \lambda_i^0 - \delta$. Положим $\delta^0 = \lambda_i^0 \varepsilon / b$. Тогда следующие значения λ_i определяются выражениями:

$$\lambda_i^1 = \lambda_i^0 \left(1 - \frac{\varepsilon}{b}\right), \ldots, \lambda_i^k = \lambda_i^0 \left(1 - \frac{\varepsilon}{b}\right)^k.$$

При $\lambda_i^0 = \beta$ имеем

$$\lambda_i^k = \beta \left(1 - \frac{\varepsilon}{b}\right)^k.$$

Потребуем, чтобы последнее значение λ_i^k было равно α. Отсюда получим максимальное значение $k = k^0$:

$$k^0 = \frac{\ln(\alpha/\beta)}{\ln(1 - \varepsilon/b)}. \quad (17)$$

Для того, чтобы ячейки сети по λ целое число раз укладывались в отрезок $[\alpha, \beta]$, необходимо, чтобы k было минимальным целым, удовлетворяющим неравенству $k \geq k^0$, обозначим его k^*. Тогда реальный шаг сети при текущем $\lambda_i = \beta$ определяется выражением

$$\delta = \delta^* = \beta[1 - (\alpha/\beta)^{1/k^*}]. \quad (18)$$

Отсюда

$$\lambda_i^j = \beta \left(\frac{\varepsilon}{b}\right)^{j/k^*}, j = 0, \ldots, k^*. \quad (19)$$

Например, при $\alpha = 0.5; \beta = 1; b = 1; \varepsilon = 0.1$ имеем: $k^0 = \ln 0.5 / \ln 0.9 = 6.58$. Отсюда $k^* = 7$; $\lambda_i^j = (0.5)^{j/7}$. То есть, в этих условиях при использовании сверток φ_2 или φ_3 имеем следующий набор весовых коэффициентов: $\lambda_i^0 = 1$; $\lambda_i^0 = 1; \lambda_i^1 = 0.905724$; $\lambda_i^2 = 0.820336; \ldots$; $\lambda_i^6 = 0.552045; \lambda_i^7 = 0.5$.

Для построения сети на множестве Г необходимо наложить сеть на каждую (m−1)-мерную грань куба $[\alpha, \beta]^m$ в соответствии с найденными значениями λ_i^j по каждой координате.

Определим число узлов сети. Количество точек по каждой координате равно (k^*+1). Тогда $(k^*+1)^m$ — число узлов сети, заполняющей весь m-мерный куб. Но т.к. Г представляет собой совокупность из m граней, ближайших к началу координат, то от этого числа надо отнять число узлов, заполняющих куб, содержащий k^* точек по каждой координате, т.е. $(k^*)^m$. Окончательно

$$N = (k^* + 1)^m - (k^*)^m.$$

Например, при рассмотренных выше значениях ε, α, β, b при m=3 имеем для φ_2 $N = 169$. Если же использовать свертку φ_1, то при тех же данных получим $k^* = 6$; $N = 127$. Для сравнения, метод, изложенный в [1], при аналогичном показателе густоты сети требует около 900 точек.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нефедов В.Н.* Об аппроксимации множества Парето // Журн. выч. математики и мат. физики. 1984. Т. 24. № 7. С. 993—1007.

2. *Geoffrion A.M.* Bicriterion Mathematical Programming // Operational Research. 1967. V. 15, 1. P. 39—54.

3. *Молдавский М.А.* Оценка равномерности параметризации множества Парето // Автоматизация проектирования в машиностроении. Межвуз. сб. Горький: ГГУ. 1978. С. 176—184.

4. *Попов Н.М.* Об аппроксимации множества Парето методом сверток//Вестник МГУ. Вычислит. матем. и кибернетика. 1982. № 2. С. 35—41.

5. *Подиновский В.В., Ногин В.Д.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач оптимизации. М: Наука. 1982.

6. *Юдин Д.Б.* Вычислительные методы теории принятия решений. М: Наука. 1989.

7. *Краснощеков П.С., Морозов В.В., Федоров В.В.* Декомпозиция в задачах проектирования // Изв. АН СССР. Технич. кибернетика, 1976, № 2. С. 1—17.