УДК 517.956.2

НЕРАВЕНСТВО ХАРНАКА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ НА СТРАТИФИЦИРОВАННОМ МНОЖЕСТВЕ

© 2004 С. В. Беседина

Воронежский государственный университет

В работе рассматривается замкнутое множество $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, составленное из многогранников. На этом множестве вводится аналог эллиптического оператора дивергентного типа. Основным результатом является аналог классического неравенства Харнака. Доказательство неравенства опирается на теорему о среднем и аналог функции Грина для рассматриваемого множества.

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Результаты, приведенные в этой работе, допускают обобщение на случай эллиптического уравнения на так называемом стратифицированном множестве. Однако, чтобы не перегружать изложение формальными определениями, ограничимся частным случаем стратифицированного множества, на котором видны все характерные особенности нашего подхода. А именно, будем считать, что Ω — связное подмножество $\mathbb{R}^n$, составленное из многогранников (стратов) различных размерностей, примыкающих друг к другу по типу симплексного комплекса. Напомним что это означает. Через σ_{kj} обозначим k-мерный многогранник с номером j (нумерация многогранников ведется автономно по каждой размерности). Тогда основное требование состоит в том, чтобы граница страта σ_{kj} состояла из стратов меньшей размерности.

Более точно стратифицированным множеством следовало бы называть тройку $(\Omega, \Sigma, \varphi)$, где Ω — связное подмножество $\mathbb{R}^n$, Σ — набор его подмножеств (стратов), а φ — отображение, задающее способ «связки» Ω из элементов системы Σ. В данной работе стратификация Σ считается фиксированной, поэтому называем Ω стратифицированным, явно не указывая его стратификацию.

На Ω определим так называемую стратифицированную меру μ по формуле:

$$\mu(\omega) = \sum_{\sigma_{kj}} \mu_k(\omega \cap \sigma_{kj}), \tag{1}$$

где μ_k — мера Лебега на σ_{kj}, а формула (1) применяется только к таким ω, что пересечение $\omega \cap \sigma_{kj}$ измеримы по Лебегу. Множество таких ω образует σ-алгебру. Интеграл по мере μ определяется как интеграл Лебега. Легко видеть, что для суммируемых функций мы имеем:

$$\int_{\Omega} f d\mu = \sum_{j,k} \int_{\sigma_{kj}} f d\mu_k.$$

Для постановки краевых задач удобно разбить множество Ω на части. А именно, через $\Omega_0 \subset \Omega$ обозначим любое связное, открытое подмножество Ω (в отношении Ω, индуцированной стандартной топологией $\mathbb{R}^n$), составленное из стратов, и такое, что $\bar{\Omega}_0 = \Omega$. Хотя случай $\Omega_0 = \Omega$ формально не исключается, будем все же предполагать $\Omega_0 \neq \Omega$; в противном случае результат этой работы тривиален. Разность $\Omega \setminus \Omega_0$ обозначим $\partial\Omega$, это топологическая граница Ω_0.

Векторное поле $\vec{F}$ назовем касательным к Ω_0, если его сужение на каждый страт является касательным к этому страту. Пусть $X \in \sigma_{k-1i}$. Дивергенция поля $\vec{F}$ в такой точке определяется по формуле:

$$\nabla \vec{F} = \sum_{\sigma_{kj} \succ \sigma_{k-1i}} \vec{\nu} \vec{F}_{kj}(X) + \nabla_{k-1} \vec{F}(X), \tag{2}$$

*Работа выполнена при поддержке РФФИ: грант № 01-01-00697.

где $\sigma_{kj} \succ \sigma_{k-1i}$ означает примыкание σ_{kj} к σ_{k-1i} (иными словами $\sigma_{kj} \subset \sigma_{k-1i}$), $\vec{v}$ единичная нормаль к σ_{k-1i}, направленная внутрь страта, по которому в данный момент идет суммирование. Запись $\vec{F}\big|_{kj}(X)$ означает продолжение по непрерывности поля $\vec{F}$ с σ_{kj} в точку *X*.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Множество $\vec{F}$, на которых мы по формуле (2) определяем $\nabla\vec{F}$, обозначим $C^1_\sigma(\Omega_0)$ — пространство функций, таких что их сужение на σ_{ki} имеет непрерывные частные производные первого порядка, кроме того они допускают продолжение по непрерывности для любого $\sigma_{k-1i} \prec \sigma_{kj}$. Через $C^2(\Omega_0)$ обозначим множество функций $\Omega \to R$, непрерывных на Ω_0 и таких, что продолжение сужений u на стратах образуют поля класса $C^2(\Omega_0)$. Тогда можно определить выражение вида

$$\Delta_p u = \nabla(p\nabla u).$$

В этой работе *p* считается так называемой стратифицированной константой (сужение ее на любой страт является постоянной функцией). Решение уравнения $\Delta_p u = \nabla(p\nabla u)$ класса $C^2(\Omega_0)$ назовем *p*-гармонической функцией.

Основная цель работы состоит в получении аналога классического неравенства Харнака для *p*-гармонических функций.

В данной работе мы рассматриваем случай, когда $p > 0$ на стратах максимальной размерности (будем в дальнейшем обозначать ее *d*) и *p*=0, когда размерность страта меньше *d*. При введении таких ограничений на стратифицированную константу оператор $\Delta_p u$ сведется к

$$p_i \Delta u = 0, X \in \sigma_{dj}, \quad (3)$$

$$\Delta_p u(x) = \sum_{\sigma_{dj} \succ \sigma_{d-1l}} p_j (\vec{\nu}\nabla u)\big|_{k_j}(x), X \in \sigma_{d-1l}, \quad (4)$$

где ν_j — нормаль к σ_{d-1l} направленная внутрь σ_{dj}.

На стратах меньшей размерности дифференциальных соотношений нет, а имеется лишь условие непрерывности.

3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ТЕОРЕМЫ

При доказательстве неравенства Харнака понадобятся теорема о среднем на рассматриваемом множестве и аналог функции Грина. Прежде чем переходить к формулировкам этих теорем покажем, каким образом будет выглядеть шар на Ω, а также определим некоторое подобие координат (Ω, вообще говоря, не является многообразием и мы не можем ввести на нем систему координат). Для задания локальных координат сначала определим какие-нибудь ортогональные координаты $x^1, \ldots, x^{d-1}$ на σ_{d-1i}, т.е. в общей экваториальной плоскости всех σ_{dj}, отвечающих стратам $\sigma_{dj} \succ \sigma_{d-1i}$, а затем для каждого σ_{dj} дополним их еще одной координатной осью x^d, ортогональной к σ_{d-1i}. Недоразумений с x^d возникать не будет, так как из контекста будет понятно, о какой из координатных осей идет речь.

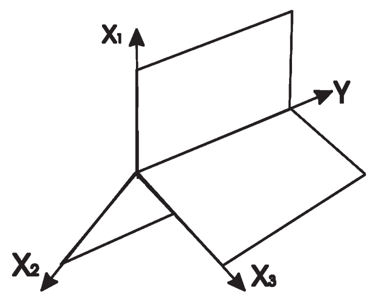

Рис. 1. Пример локальных координат на стратифицированном множестве

При введении координат подобным образом производная по нормали из (4) будет совпадать с частной производной $\frac{\partial u}{\partial x_i}$.

Определение 3.1. *Стратифицированным шаром с центром в точке* ζ *и радиусом* R *будем называть множество*

$$B_R(\zeta) = \{x : x \in \Omega, \rho(\zeta, x) < R\}.$$

На рассматриваемом множестве шар может иметь достаточно необычный вид. Если ζ лежит в страте размерности *d* и $R < \rho(\zeta, \partial\sigma_{dj})$, то имеем дело с обычным шаром. Если центр лежит в стратах размерности, меньшей *d* и $R < \rho(\zeta, \partial\sigma_{ki})$, то шар представляет собой объединение нескольких «лепестков». В случае, когда $R > \rho(\zeta, \partial\sigma_{dj})$, шар имеет достаточно сложный вид. Поэтому

Определение 3.2. *Будем называть стратифицированный шар простым, если его радиус меньше расстояния от ценра шара до стратов, замыкания которых не содержат* ζ.

В дальнейшем мы будем рассматривать только простые шары. На рисунке 2 приведен пример простого шара в R^3.

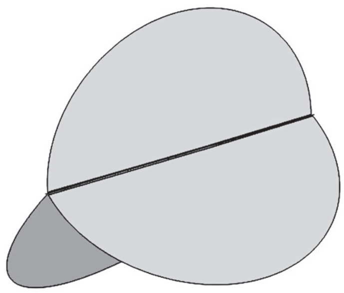

Рис 2. Простой стратифицированный шар

Теперь, когда определено понятие шара на рассматриваемом множестве, сформулируем теорему о среднем.

Теорема 3.1. Теорема о среднем. *Пусть $B_R(\zeta)$ — простой стартифицированный шар, $u(x)$ — p-гармоническая функция, тогда справедливо следующее равенство:*

$$u(\zeta) = \frac{1}{\sum\limits_{B_{iR}(\zeta)} p_i \mu(\partial B_{iR}(\zeta))} \int\limits_{\partial B_R(\zeta)} u(x) p\, ds_R, \quad (5)$$

где $p = p_i$, если $X \in \sigma_{di}$.

Замечание 3.1. *Если центр шара лежит в σ_{dj}, то теорема ничем не отличается от классической.*

Для рассматриваемого случая обосновать неравенство Харнака для p-гармонических функций, опираясь только на теорему о среднем, как это делается в классическом случае, нельзя. Главным препятствием служит ограничение на радиус рассматриваемых шаров. Этот радиус должен быть достаточно мал, если центр шара лежит вблизи стратов размерности, меньшей d. Поэтому докажем «сферический» вариант неравенства Харнака для простого шара произвольного радиуса. Для этого выпишем фундаментальное решение. Заметим, что оно найдено только в стратах размерности d и $d-1$. Это связано с тем, что $p = 0$ на всех стратах размерности, меньшей d, и на стратах размерности, меньшей $d-1$ дифференциальных соотношений нет. Выпишем формулу Пуассона для простого стратифицированного шара. Для этого нам понадобится аналог функции Грина на рассматриваемом множестве. Для простого шара с центром в σ_{dj} она совпадает с классической. Поэтому остановимся на случае когда центр шара лежит на стратах размерности $d-1$. Для простоты поместим начало локальных координат в центр шара. Обозначим через $K(x;y)$ классическую функцию Грина задачи Дирихле в d-мерном шаре $B_R(0)$ из $\mathbb{R}^d$. Считая, что $y^d \geq 0$, с помощью этой функции определим в стратифицированном простом шаре $B_R(0)$ функцию $\hat{G}(X,Y)$ следующим образом:

$$\hat{G}(X,Y) = \begin{cases} \dfrac{p_l + P_l}{2p_l} K(x,y) + \dfrac{p_l - P_l}{2p_l} K(\hat{x},y), & x, y \in B_l, \\ K(\hat{x},y), & x \in B_j (j \neq l), y \in B_l, \end{cases} \quad (6)$$

где $\hat{x}$ получается из x заменой x^d на $-x^d$, а P_l — сумма всех $p_j (j \neq l)$, соответствующих всем $\sigma_{dj} \succ \sigma_{d-1i}$. Полагаем $P_l = 0$, если к σ_{d-1i} примыкает только один d-мерный страт. Положим также $P = P_l + p_l$.

Теорема 3.2. $G(X,Y) = \frac{2}{P}\hat{G}(X,Y)$ является фундаментальным решением оператора Δ_p в шаре $B_R(0)$.

Теперь мы можем выписать формулу Пуассона:

$$u(X) = -\int\limits_{\partial B_R(\zeta)} p\phi(Y) \frac{\partial G(X,Y)}{\partial \nu} d\mu, \quad (7)$$

где $p = p_i$ на σ_{di}.

4. НЕРАВЕНСТВО ХАРНАКА

Теорема 4.1. *Пусть u — неотрицательная на Ω_o p-гармоническая функция и $B_R(\zeta) \subset \Omega_0$ — правильный шар. $\zeta \in \sigma_{di}$ или $\zeta \in \sigma_{d-1i}$, $d(\Omega) = d$. Тогда при $\rho < R$ и некоторых не зависящих от u констант C_1 и C_2 имеем*

$$\begin{aligned} C_1 \frac{(R-\rho)R^{m-2}}{(R+\rho)^{m-1}} u(\zeta) \leq u(X) \leq \\ \leq C_2 \frac{(R+\rho)R^{m-2}}{(R-\rho)^{m-1}} u(\zeta) \end{aligned} \quad (8)$$

для любого $X \in B_R(\zeta)$, удаленного от X на расстояние ρ.

Доказательство.

Рассмотрим простой шар $B(\zeta, r)$ для $\rho < r < R$:

$$u(X) = -\int\limits_{\partial B_r(\zeta)} pu(Y) \frac{\partial G(X,Y)}{\partial \nu} d\mu.$$

Функция $G(X,Y)$ определена в (6), где $K(x,y)$ — классическая функция Грина. Записав ее в сферических координатах, получим следующую оценку:

$$\frac{1}{r\omega_n}\frac{r^2-\rho^2}{(r+\rho)^m} \le \frac{\partial K}{\partial \nu} \le \frac{1}{r\omega_n}\frac{r^2-\rho^2}{(r-\rho)^m},$$

где $\rho = |X-\zeta|$.

Если $x \in B_r(\zeta)$, то и $\tilde{x} \in B_r(\zeta)$, следовательно, для $\frac{\partial K(x,y)}{\partial \nu}$ и $\frac{\partial K(\tilde{x},y)}{\partial \nu}$ оценка одна и та же. Исходя из вида $G(X,Y)$, имеем следующую оценку:

$$\frac{2}{P}\frac{1}{r\omega_n}\frac{r^2-\rho^2}{(r+\rho)^m} \le \frac{\partial G(X,Y)}{\partial \nu} \le \frac{2}{P}\frac{1}{r\omega_n}\frac{r^2-\rho^2}{(r-\rho)^m}.$$

Воспользовавшись формулой Пуассона, запишем неравенство в виде:

$$\frac{2(r^2-\rho^2)}{Pr\omega_n(r+\rho)^m}\int\limits_{\partial B_r(\zeta)} pu(\xi)d\mu \le u(X) \le$$
$$\le \frac{2(r^2-\rho^2)}{Pr\omega_n(r-\rho)^m}\int\limits_{\partial B_r(\zeta)} pu(\xi)d\mu.$$

Применив теорему о среднем, получим:

$$\frac{2(r^2-\rho^2)}{Pr\omega_n(r+\rho)^m}\sum_{\partial B_i} p_i\mu(\partial B_i)u(\zeta) \le u(X) \le$$
$$\le \frac{2(r^2-\rho^2)}{Pr\omega_n(r-\rho)^m}\sum_{\partial B_i} p_i\mu(\partial B_i)u(\zeta).$$

Учитывая, что $\min p_i \le p_i \le \max p_i$, а также то, что $\sum_i \mu(\partial B_i) = \frac{\omega_m r^{n-1}}{2}k$, где k — число лепестков шара, запишем неравенство в виде:

$$\frac{2(r^2-\rho^2)}{Pr\omega_n(r+\rho)^m}\min p_i\,\frac{k\omega_n r^{m-1}}{2}u(\zeta) \le u(X) \le$$
$$\le \frac{2(r^2-\rho^2)}{Pr\omega_n(r-\rho)^m}\max p_i\,\frac{k\omega_n r^{n-1}}{2}u(\zeta).$$

Переходя к пределу при $r \to R$, получим

$$\min p_i\,\frac{k(R-\rho)R^{m-2}}{P(R+\rho)^{m-1}}u(\zeta) \le u(X) \le$$
$$\le \max p_i\,\frac{k(R+\rho)R^{m-2}}{P(R-\rho)^{m-1}}u(\zeta).$$

Обозначив через $C_1 = \min p_i \frac{k}{P}$, а через $C_2 = \max p_i \frac{k}{P}$, перепишем неравенство в виде

$$C_1\frac{(R-\rho)R^{m-2}}{(R+\rho)^{m-1}}u(\zeta) \le u(X) \le C_2\frac{(R+\rho)R^{m-2}}{(R-\rho)^{m-1}}u(\zeta).$$

Таким образом, теорема доказана.

В случае когда $d=2$, можно получить более общее неравенство.

Теорема 4.2. *Пусть ω — компактное подмножество $\Omega_0, d(\Omega_0)=2$. Тогда существует такая константна C, что для любой неотрицательной p-гармонической функции u выполняется неравенство*

$$\max_{X\in\omega} u(X) \le C\min_{X\in\omega} u(X). \qquad (9)$$

Замечание 4.1. *Для рассматриваемого случая, когда $d(\omega)=2$, неравенство Харнака запишется в виде*

$$C_1\frac{(R-\rho)}{(R+\rho)}u(\zeta) \le u(X) \le C_2\frac{(R+\rho)}{(R-\rho)}u(\zeta).$$

Докажем теперь общее неравенство Харнака. Отметим, что для стратов размерности 0 у нас нет аналогов функции Грина и формулы Пуассона. Следовательно, для шаров с центром в σ_{0j} сферический вариант неравенства Харнака также отсутствует. Поэтому докажем сначала общее неравенство не на всем множестве Ω, а на его подмножестве, которое строится специальным образом. Для этого введем в рассмотрение множество ω_0^ε — покрытие стратов размерности не 0 шарами радиуса ε, центры шаров лежат на стратах соответствующей размерности. Пример такого множества изображен на риунке 3.

И рассмотрим теперь не все множество, а $\omega \setminus \omega_0^\varepsilon$. На рассматриваемом множестве для любого простого шара будет выполняться сферический вариант неравенства Харнака. Тогда, покрыв его простыми шарами, мы получим, что любые две точки множества можно соединить цепочкой шаров, для которых справедливо сферическое неравенство. То есть для любых двух точек X_0, Y_0 можно построить следующую цепочку неравенств:

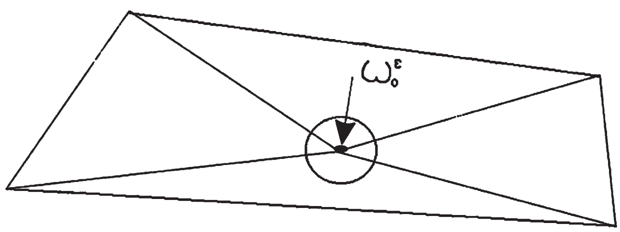

Рис. 3

$$u(X) \le C_{21} \frac{(R-\rho)}{(R+\rho)} u(\zeta) \le u(\zeta_1) \le$$

$$\le C_{21} \frac{(R-\rho)}{(R+\rho)} u(\zeta_2) \le ...C_{q1} \frac{(R-\rho)}{(R+\rho)} u(Y).$$

Таким образом, существует константа C, обеспечивающая выполнение неравенства Харнака.

Теперь покажем, что и для всего множества ω будет выполняться это же неравенство. Для любого шара из покрытия ω_0^ε будет выполнена теорема о среднем. И, как следствие из нее, будет выполняться принцип максимума.

Теорема 4.3. *Если p-гармоническая функция u непрерывна в $\bar{K}$ (K— некоторое компактное подмножество), тогда максимум и минимум достигаются на границе*

$$\max_K u(X) \le \max_{\partial K} u(X),$$
$$\min_{\partial K} u(X) \le \min_K u(X).$$

Таким образом, максимум и минимум на $\omega \setminus \omega_1^\varepsilon$ будет совпадать с макимумом и минимумом на ω, и неравенство будет выполняться и для всего множества с той же константой.

Замечание 4.2. *Приведенная выше схема доказательства неравенства Харнака для прстранств размерности, большей 3, не подходит, так как возникает ряд сложностей, связанных с тем, что шарами приходится покрывать все страты размерности, меньшей $d-1$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Беседина С.В. Пенкин О.М.* Метод Перрона для эллиптического уравнения на стратифицированном множестве //Междунар. конф. по дифференциальным уравнениям и динамическим системам., Владимир., 2002., С. 33—34.

2. *Гилбарг Д., Трудингер. Н.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. — М.: Наука, 1989, — 464 с.

3. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. — М.: Мир, 1964, — 830 с.

4. *Пенкин О.М.* О принципе максимума для эллиптического уравнения на стратифицированном множестве // Дифференц. уравн. — 1998. — Т. 34. — № 10. — С. 1433—1434.

5. *Пенкин О.М.* О принципе максимума для эллиптического уравнения на двумерном клеточном комплексе//Докл. РАН. — 1997. — Т. 352. — № 4. — С. 462—465.

6. *Петровский И.Г.* Лекции об уравнениях с частными производными. — М.: ГИФМЛ., 1961. — 400 с.

7. *Хейман У. Кеneди П.* Субгармонические функции. — М.: Мир., 1980. — 304 с.

8. *John F.* Partial Differential Eqation. Springer Verlag, 1986, 250 p.