УДК 621.3.015.4

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМЫ ДВУХ СВЯЗАННЫХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КОНТУРОВ ВТОРЫМ МЕТОДОМ ЛЯПУНОВА

© 2004 В. В. Белоглазов, Н. Д. Бирюк

Воронежский государственный университет

Системы связанных контуров широко применяются в радиосвязи. Если они включают в себя нелинейные элементы, то параметры контуров изменяются во времени. В таких случаях возникает проблема исследования системы на устойчивость. Ниже на примере системы связанных контуров с взаимноиндуктивной связью в линейном приближении предложена методика анализа устойчивости вторым методом Ляпунова, получены достаточные условия устойчивости конкретной системы.

Системы двух связанных контуров часто применяются в радиофизике, радиотехнике и радиосвязи. Если в состав контуров входят нелинейные элементы, то некоторые параметры контуров (емкость, индуктивность, активное сопротивление) могут изменяться во времени, тогда имеем систему двух связанных параметрических контуров. Иногда такая система специально реализуется, например, в двухконтурном параметрическом усилителе. В зависимости от типа связи между контурами, такие системы разделяются на виды. Бывают системы связанных контуров с взаимоинтуктивными, внешне- и внутрииндуктивными, внешне- и внутриемкостными, внешне- и внуртикондуктивными связями. Все они описываются похожими системами обыкновенных дифференциальных уравнений. В случае параметрических контуров в линейном приближении возникает задача об устойчивости. Если система устойчива (асимптотически устойчива), то свободный процесс невозрастающий (убывающий). Если система неустойчива, то свободный процесс возрастающий. Весьма часто требуется гарантия, что система устойчива. Тогда нужно получить достаточные условия устойчивости. В таких случаях целесообразно применять второй метод Ляпунова [1], но для этого необходимо построить функцию Ляпунова. Как известно, рекомендаций по выбору такой функции в теории устойчивости не содержится. Ниже предлагается решение соответствующей задачи с учетом радиофизической специфики.

Сосредоточимся на рассмотрении одной весьма распространенной системы связанных контуров — с взаимоиндуктивной связью (рис. 1).

Будем предполагать, что все параметры системы (емкости, индуктивности, взаимоиндуктивность, активные сопротивления и проводимости) изменяются во времени по любым непрерывно дифференцируемым законам, независимо от протекающих токов. При таком допущении получается линейная задача. Параметры считаются положительными, за исключением взаимоиндуктивности M, которая может быть либо положительной, либо отрицательной, но не может быть знакопеременной. Анализ начинается с вывода математического уравнения, которому удовлетворяет свободный процесс. Первый (для токов) и второй (для напряжений) законы Кирхгофа позволяют получить в дан-

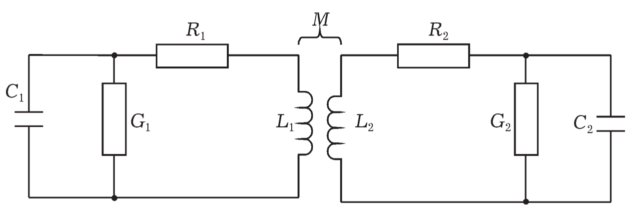

Рис. 1. Система связанных контуров с взаимоиндуктивной связью

ном случае систему четырех обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Для составления такой системы нужно выбрать четыре функции процесса, через которые выражаются все напряжения и токи системы. Такие функции процесса принято называть определяющими. Здесь возможны варианты. Традиционно принято в качестве определяющих функций выбирать заряды конденсаторов и магнитные потоки индуктивностей. Такой подход вполне приемлем, но обладает тем недостатком, что заряды и магнитные потоки в радиофизике имеют меньшее значение, чем напряжения и токи. Поэтому здесь выбраны другие определяющие функции: напряжения конденсаторов и токи индуктивностей. Уравнения для этих двух систем определяющих функций получаются разными, но примерно равноценными. Практика показывает, что уравнения должны быть нормированными, в которых все переменные и множители при них безразмерные. С этой целью введем постоянные, положительные размерные, масштабные делители U_M, i_M, t_M, имеющие размерности соответственно напряжения, тока и времени. Ими можно распорядиться произвольно и это повышает гибкость анализа. В качестве независимого переменного выбираем безразмерное время $\tau = t / t_M$, а зависимых — безразмерные напряжения конденсаторов и токи индуктивностей $x_1 = U_{C_1} / U_M$, $x_2 = i_{L_1} / i_M$, $x_3 = i_{L_2} / i_M$ $x_4 = U_{C_2} / U_M$.

Тогда свободный процесс системы удовлетворяет векторному уравнению

$$\frac{d}{d\tau}\mathbf{x} = \mathbf{A}(\tau)\mathbf{x}\,, \qquad (1)$$

где $\mathbf{x} = colon(x_1, x_2, x_3, x_4)$, $\mathbf{A}(\tau) = \{a_{ij}(\tau)\}$, $i, j = 1, 2, 3, 4$.

В явном виде элементы матрицы представляются следующим образом:

$$a_{13} = a_{14} = a_{41} = a_{42} = 0,$$

$$a_{11} = -\left(\frac{t_M G_1}{C_1} + \frac{d\ln C_1}{d\tau}\right),$$

$$a_{22} = -\frac{1}{1-k^2}\,\frac{t_M R_1 + \dot{L}_1 - k_2\dot{M}}{L_1},$$

$$a_{33} = -\frac{1}{1-k^2}\,\frac{t_M R_2 + \dot{L}_2 - k_1\dot{M}}{L_2},$$

$$a_{44} = -\left(\frac{t_M G_2}{C_2} + \frac{d\ln C_2}{d\tau}\right),$$

$$a_{12} = -\frac{t_M}{rC_1}, \quad a_{21} = \frac{1}{1-k^2}\,\frac{t_M r}{L_1},$$

$$a_{23} = -\frac{1}{1-k^2}\,\frac{\dot{M} - k_2(t_M R_2 + \dot{L}_2)}{L_1},$$

$$a_{24} = a_{31} = -\frac{k}{1-k^2}\,\frac{t_M r}{\sqrt{L_1 L_2}},$$

$$a_{32} = -\frac{1}{1-k^2}\,\frac{\dot{M} - k_1(t_M R_1 + \dot{L}_1)}{L_2},$$

$$a_{34} = -\frac{1}{1-k^2}\,\frac{t_M r}{L_2}, \quad a_{43} = \frac{t_M}{rC_2}.$$

Здесь $r = \dfrac{U_M}{i_M}$ — нормирующее сопротивление, $k = \dfrac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$, $k_1 = \dfrac{M}{L_1}$, $k_2 = \dfrac{M}{L_2}$ — коэффициенты связи, точка сверху означает производную по τ.

Нужно получить достаточное условие устойчивости векторного уравнения (1), такое условие гарантирует ограниченность решения этого уравнения и тогда свободный процесс нашей физической системы не будет возрастать. Если удастся найти достаточное условие асимптотической устойчивости, то свободный процесс будет убывающим.

Согласно второму методу Ляпунова [1], в случае устойчивости уравнения (1), существует положительно определенная функция $V(\mathbf{x}) > 0$ (при $\mathbf{x} = 0$ обязательно $V = 0$) такая, что ее полная производная в силу (1) неположительна, т.е. $\dfrac{dV}{d\tau} \le 0$. Если при этом выполняется строгое неравенство $\dfrac{dV}{d\tau} < 0$, то система (1) асимптотически устойчива. В реальных физических системах чаще требуется асимптотическая устойчивость. При конкретном анализе возникает главная трудность, как выбрать функцию Ляпунова. Как правило, однозначного решения нет.

Выберем функцию Ляпунова в виде

$$V = \alpha_1^2 x_1^2 + \alpha_2^2 x_2^2 + \alpha_3^2 x_3^2 + \alpha_4^2 x_4^2\,, \qquad (2)$$

где α_i, $i = 1, 2, 3, 4$ — непрерывно дифференцируемые функции безразмерного времени τ.

В процессе анализа они будут конкретизированы.

Согласно основной теореме Ляпунова, представим полную производную функции V:

$$\frac{dV}{d\tau} = \frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{\partial V}{\partial x_1}\frac{dx_1}{d\tau} + \\ + \frac{\partial V}{\partial x_2}\frac{dx_2}{d\tau} + \frac{\partial V}{\partial x_3}\frac{dx_3}{d\tau} + \frac{\partial V}{\partial x_4}\frac{dx_4}{d\tau}. \qquad (3)$$

Здесь вторые множители в слагаемых справа берутся из уравнения (1). В нашем случае

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} = 2\alpha_1\dot{\alpha}_1 x_1^2 + 2\alpha_2\dot{\alpha}_2 x_2^2 + 2\alpha_3\dot{\alpha}_3 x_3^2 + 2\alpha_4\dot{\alpha}_4 x_4^2,$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = 2\alpha_1^2 x_1, \quad \frac{\partial V}{\partial x_2} = 2\alpha_2^2 x_2,$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_3} = 2\alpha_3^2 x_3, \quad \frac{\partial V}{\partial x_4} = 2\alpha_4^2 x_4.$$

Используя эти выражения, а также (1), представим полную производную функции Ляпунова в развернутом виде

$$\frac{dV}{d\tau} = -2\alpha_1^2\left(\frac{t_M G_1}{C_1} + \frac{d\ln C_1}{d\tau} - \frac{\dot{\alpha}_1}{\alpha_1}\right)x_1^2 - \\ -2\alpha_2^2\left(\frac{1}{1-k^2}\frac{t_M R_1 + \dot{L}_1 - k_2\dot{M}}{L_1} - \frac{\dot{\alpha}_2}{\alpha_2}\right)x_2^2 - \\ -2\alpha_3^2\left(\frac{1}{1-k^2}\frac{t_M R_2 + \dot{L}_2 - k_1\dot{M}}{L_2} + \frac{d\ln C_1}{d\tau} - \frac{\dot{\alpha}_3}{\alpha_3}\right)x_3^2 - \\ -2\alpha_4^2\left(\frac{t_M G_2}{C_2} + \frac{d\ln C_2}{d\tau} - \frac{\dot{\alpha}_4}{\alpha_4}\right)x_4^2 + \\ +2t_M\left(\alpha_2^2\frac{1}{1-k^2}\frac{r}{L_1} - \alpha_1^2\frac{1}{rC_1}\right)x_1x_2 - \\ -2\alpha_3^2\frac{k}{1-k^2}\frac{t_M r}{\sqrt{L_1L_2}}x_1x_3 - \\ -\frac{2}{1-k^2}\left[\alpha_2^2\frac{\dot{M} - k_2\left(t_M R_2 + \dot{L}_2\right)}{L_1} + \right. \\ \left. +\alpha_3^2\frac{\dot{M} - k_1\left(t_M R_1 + \dot{L}_1\right)}{L_2}\right]x_2x_3 + \\ +2t_M\left(\alpha_4^2\frac{1}{rC_2} - \alpha_3^2\frac{1}{1-k^2}\frac{r}{L_2}\right)x_3x_4. \qquad (4)$$

Как видно, полная производная представляет собой квадратичную форму, в четырех первых слагаемых справа содержатся квадраты неизвестных функций $x_i (i = 1,\dots,4)$, а в остальных четырех — перекрестные произведения $x_i x_j (i, j = 1,\dots,4)$. Именно последние мешают получить нужное для асимптотической устойчивости неравенство

$$\frac{dV}{d\tau} < 0, \qquad (5)$$

Поэтому целесообразно уменьшить число этих слагаемых. Приравняв нулю выражение в круглых скобках при x_1x_2, а также при x_3x_4, аннулируем эти слагаемые. Для этого должны выполняться равенства

$$\alpha_1^2 = \alpha_2^2\frac{r^2}{1-k^2}\frac{C_1}{L_1} = \frac{\alpha_2^2}{1-k^2}\frac{r^2}{\rho_1^2}, \quad \alpha_4^2 = \frac{\alpha_3^2}{1-k^2}\frac{r^2}{\rho_2^2}.$$

Здесь характеристическое сопротивление первого и второго контура обозначены соответственно через $\rho_1 = \sqrt{\dfrac{L_1}{C_1}}$, $\rho_2 = \sqrt{\dfrac{L_2}{C_2}}$.

Положим далее $\alpha_2 = \alpha_3 = 1$ и, таким образом, конкретизируем введенные в функцию Ляпунова (2) функции безразмерного времени

$$\alpha_1^2 = \frac{1}{1-k^2}\frac{r^2}{\rho_1^2}, \alpha_2^2 = \alpha_3^2 = 1, \alpha_4^2 = \frac{1}{1-k^2}\frac{r^2}{\rho_1^2}. \qquad (6)$$

Таким способом в функции Ляпунова (2) здесь устранен произвол

$$V = \frac{1}{1-k^2}\frac{r^2}{\rho_1^2}x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \frac{1}{1-k^2}\frac{r^2}{\rho_1^2}x_4^2. \qquad (7)$$

Это дает возможность и полную производную (4) функции Ляпунова представить в более удобном для анализа виде,

$$\frac{dV}{d\tau} = \\ = -\frac{2}{1-k^2}\frac{r^2}{\rho_1^2}\left[\frac{t_M G_1}{C_1} + \frac{d\ln C_1}{d\tau} - \frac{r^2}{2}\frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{1-k^2}\frac{1}{\rho_1^2}\right)\right]x_1^2 - \\ -\frac{2}{1-k^2}\frac{t_M R_1 + \dot{L}_1 - k_2\dot{M}}{L_1}x_2^2 - \\ -\frac{2}{1-k^2}\frac{t_M R_2 + \dot{L}_2 - k_1\dot{M}}{L_2}x_3^2 - \\ -\frac{2}{1-k^2}\frac{r^2}{\rho_2^2}\left[\frac{t_M G_2}{C_2} + \frac{d\ln C_2}{d\tau} - \frac{r^2}{2}\frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{1-k^2}\frac{1}{\rho_2^2}\right)\right]x_4^2 -$$

$$-\frac{2k}{1-k^2}\frac{t_M r}{\sqrt{L_1L_2}}x_1x_3-\frac{2}{1-k^2}\left[\frac{\dot M-k_2(t_M R_2+\dot L_2)}{L_1}+\right.$$

$$\left.+\frac{\dot M-k_1(t_M R_1+\dot L_1)}{L_2}\right]x_2x_3+\frac{2k}{1-k^2}\frac{t_M r}{\sqrt{L_1L_2}}x_2x_4=(\mathbf{Bx},\mathbf{x}).$$

Известно, что любую квадратичную форму можно представить в виде скалярного произведения двух векторов $\mathbf{Bx}$ и $\mathbf{x}$, где $\mathbf{B}$ — вполне определенная для данной квадратичной формы, симметричная матрица. В нашем случае структуру этой матрицы удобно представить в клеточном виде

$$\mathbf{B}=\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline -b_{11} & 0 & -b_{13} & 0\\ \hline 0 & -b_{22} & b_{23} & b_{13}\\ \hline -b_{13} & b_{23} & -b_{33} & 0\\ \hline 0 & b_{13} & 0 & -b_{44}\\ \hline\end{array}$$

$$b_{11}=\frac{2}{1-k^2}\frac{r^2}{\rho_1^2}\left[\frac{t_M G_1}{C_1}+\frac{d\ln C_1}{d\tau}-\frac{r^2}{2}\frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{1-k^2}\frac{1}{\rho_1^2}\right)\right],$$

$$b_{22}=\frac{2}{1-k^2}\frac{t_M R_1+\dot L_1-k_2\dot M}{L_1},$$

$$b_{33}=\frac{2}{1-k^2}\frac{t_M R_2+\dot L_2-k_1\dot M}{L_2},$$

$$b_{44}=\frac{2}{1-k^2}\frac{r^2}{\rho_2^2}\left[\frac{t_M G_2}{C_2}+\frac{d\ln C_2}{d\tau}-\frac{r^2}{2}\frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{1-k^2}\frac{1}{\rho_2^2}\right)\right],$$

$$b_{13}=\frac{2k}{1-k^2}\frac{t_M r}{\sqrt{L_1L_2}},$$

$$b_{32}=\frac{2}{1-k^2}\left[\frac{\dot M-k_2(t_M R_2+\dot L_2)}{L_1}+\frac{\dot M-k_1(t_M R_1+\dot L_1)}{L_2}\right].$$

Теперь условие устойчивости можно представить в виде неравенства

$$(\mathbf{Bx},\mathbf{x})\le 0, \qquad (8)$$

а условие асимптотической устойчивости — в виде строгого неравенства

$$(\mathbf{Bx},\mathbf{x})<0. \qquad (9)$$

В первом случае матрица $\mathbf{B}$ носит название отрицательно полуопределенной, во втором — отрицательно определенной. Известны условия как отрицательной полуопределенности, так и отрицательной определенности. Первые оказываются сложными по сравнению со вторыми. Кроме того, вторые в приложениях важнее первых, т.к. они дают гарантии затухания свободного процесса. Поэтому ограничимся случаем (9).

Необходимыми и достаточными условиями отрицательной определенности матрицы являются условия Сильвестра [2], наложенные на главные миноры этой матрицы. Применительно к симметричной матрице четвертого порядка они имеют вид

$$\Delta_1<0,\ \Delta_2>0,\ \Delta_3<0,\ \Delta_4>0.$$

В нашем случае эта система неравенств следующая

$$\Delta_1=-b_{11}<0,$$

$$\Delta_2=b_{11}b_{22}>0,$$

$$\Delta_3=-b_{11}b_{22}b_{33}+b_{13}^2b_{22}+b_{11}b_{23}^2<0,$$

$$\Delta_4=-b_{44}\Delta_3>0.$$

Эта система неравенств является достаточным условием асимптотической устойчивости векторного дифференциального уравнения (1). Это означает, что при их выполнении свободные процессы в системе связанных контуров с переменными параметрами (рис. 1) могут быть только затухающими.

Заметим, что разработанный здесь метод исследования применим и к другим системам двух связанных параметрических контуров. Все они представляются векторными уравнениями типа (1). У некоторых из них, как в данном случае, матрица $\mathbf{A}$ — четвертого порядка, у других — матрица пятого порядка, что, однако, не является препятствием для предложенного здесь метода.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967. — 472 с.

2. *Рублев А.Н.* Линейная алгебра. — М.: Высшая школа, 1968. — 384 с.