УДК 517.98

О ПОЛУГРУППАХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ С СИНГУЛЯРНОСТЬЮ В НУЛЕ*

 А. Г. Баскаков, К. И. Чернышов

Воронежский государственный университет,
Воронежская государственная лесотехническая академия

Проведено описание полугруппы распределений с сингулярностью в нуле, связанной с некоторой вырожденной полугруппой линейных операторов на $(0,\infty)$. При этом существенно используется спектральная теория линейных отношений.

1. ВВЕДЕНИЕ

Статья посвящена описанию условий, при которых сильно непрерывная вырожденная полугруппа линейных операторов $\{T_0(t); t\in\mathbb{R}_+\}$ порождает полугруппу распределений с сингулярностью в нуле.

Пусть X — комплексное банахово пространство, $EndX$ — алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в X.

Определение 1. *Полугруппой операторов называется сильно непрерывная функция $T:(0,\infty)\to EndX$, удовлетворяющая равенству $T(t+s)=T(t)T(s)$ для всех $t,s>0$.*

В работе [1] использовалось понятие полугруппы близкое к определению 1.1, но снабженное дополнительными ограничениями. Понятие полугруппы распределений имеется в [1]—[3], причем в первой из указанных работ содержатся необходимые и достаточные условия, при которых полугруппа операторов является полугруппой распределений. В данной работе изучается аналогичная задача, однако в качестве полугруппы распределений фигурирует более сложный объект. Здесь полугруппа распределений совпадает на $\mathbb{R}_+=[0,\infty)$ с заданной вырожденной полугруппой операторов, что с неизбежностью приводит к определению генератора для полугруппы распределений как линейного отношения (многозначного линейного оператора) на X.

Рассматриваемая задача естественно возникает при изучении ограниченных решений дифференциального включения

$$\dot{x}(t)\in\mathcal{A}x(t)+f(t), t\in\mathbb{R} \qquad (1.1)$$

с линейным отношением $\mathcal{A}$ (определение линейного отношения см. в § 2), а также дифференциального уравнения

$$F\dot{x}(t)=Gx(t)+g(t), t\in\mathbb{R}, \qquad (1.2)$$

в котором $F:D(F)\subset X\to Y, G:D(G)\subset X\to Y$ — линейные операторы, $KerF\neq\{0\}$ (Y − банахово пространство).

Замечание 1. *Задача (1.2) сводится к задаче (1.1) при $\mathcal{A}=F^{-1}G$ (см. [4]).*

В § 3 вводится понятие полугруппы распределений с сингулярностью в нуле и содержатся основные результаты.

Условимся начало, конец доказательства отмечать соответственно знаками ◀,▶.

2. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ОТНОШЕНИЙ

Изложим основные понятия из теории линейных отношений [4], которые будут использованы ниже.

Линейным отношением на X назовем линейное подпространство $\mathcal{A}\subset X\times X$. Совокупность всех замкнутых линейных отношений на X обозначим через $LR(X)$. Подпространство $D(\mathcal{A})=\{x\in X\mid \exists y\in X:(x,y)\in\mathcal{A}\}$ называется *областью определения* $\mathcal{A}\in LR(X)$. Через $\mathcal{A}x$, где $x\in D(\mathcal{A})$, обозначается множество $\{y\in X\mid (x,y)\in\mathcal{A}\}$. Подпространства $KerA=\{x\in D(\mathcal{A})\mid (x,0)\in\mathcal{A}\}$ и $Im\mathcal{A}=\{y\in X\mid \exists x\in D(\mathcal{A}):(x,y)\in\mathcal{A}\}$ называются соответственно *ядром* и *образом* $\mathcal{A}\in LR(X)$. Отметим, что $\mathcal{A}x=y+\mathcal{A}0,\ \forall y\in\mathcal{A}x$.

Если $\mathcal{A}\subset X\times X$ — (линейное) отношение, то отношение $\mathcal{A}^{-1}\subset X\times X$ определя-

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 04-01-00141.

ется равенством $\mathcal{A}^{-1} = \{(y,x) \in X \times X \mid (x,y) \in \in \mathcal{A}\} \in LR(X)$. *Суммой* двух отношений $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset X \times X$ называется подпространство из $X \times X$ вида $\mathcal{A} + \mathcal{B} = \{(x,y) \in X \times X \mid x \in \in D(\mathcal{A}) \cap D(\mathcal{B}),\ y \in \mathcal{A}x + \mathcal{B}x\}$. Каждое отношение $\mathcal{A} \in LR(X)$ является *графиком* многозначного отображения $\tilde{\mathcal{A}} : D(\tilde{\mathcal{A}}) \subset X \to 2^X$, где $D(\tilde{\mathcal{A}}) = D(\mathcal{A})$ и $\tilde{\mathcal{A}}x = \mathcal{A}x$. В дальнейшем они отождествляются, и для их обозначения используется символ $\mathcal{A}$. Таким образом, множество $LO(X)$ линейных замкнутых операторов можно считать включенным в $LR(X)$. Итак, $End X \subset LO(X) \subset LR(X)$.

Сопряженное к $\mathcal{A} \in LR(X)$ отношение $\mathcal{A}^* \in LR(X^*)$, где X^* — сопряженное к X банахово пространство, определяется естественным образом: $\mathcal{A}^* = \{(\eta, \xi) \in X^* \times X^* \mid \xi(y) = = \eta(x),\ \forall (x,y) \in \mathcal{A}\}$.

Отношение $\mathcal{A}$ из $LR(X)$ назовем *непрерывно обратимым*, если $\mathcal{A}^{-1} \in End X$, т.е. $Ker\mathcal{A} = \{0\}$ и $Im\mathcal{A} = X$. *Резольвентным множеством* отношения $\mathcal{A} \in LR(X)$ называется множество $\rho(\mathcal{A})$ всех $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых $(\lambda I - \mathcal{A})^{-1} \in End X$. *Спектром* отношения $\mathcal{A} \in LR(X)$ называется множество $\sigma(\mathcal{A}) = \mathbb{C} \setminus \rho(\mathcal{A})$. Множество $\rho(\mathcal{A})$ открыто, спектр $\sigma(\mathcal{A})$ отношения $\mathcal{A} \in LR(X)$ замкнут.

Определение 2.1. *Отображение*

$$R(\ .\ , \mathcal{A}) : \rho(\mathcal{A}) \to End X,$$

$$R(\lambda, \mathcal{A}) = (\lambda I - \mathcal{A})^{-1}, \lambda \in \rho(\mathcal{A})$$

называется резольвентой отношения $\mathcal{A} \in LR(X)$.

Резольвента отношения $\mathcal{A}$ является псевдорезольвентой в общепринятом смысле (см., например, [5 § 4.8]), причем $\mathcal{A}0 = KerR(\lambda_0, \mathcal{A})$, $D(\mathcal{A}) = ImR(\lambda_0, \mathcal{A}),\ \forall \lambda_0 \in \rho(\mathcal{A})$.

Замечание 2.1. *Если $B \in End X$ — квазинильпотентный оператор, то резольвента отношения B^{-1} имеет вид* $R(\lambda, B^{-1}) = (\lambda I - B^{-1})^{-1} =$

$$= -\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i B^{i+1},\ \lambda \in \mathbb{C}, \text{ т.е. } \sigma(B^{-1}) = \varnothing.$$

Во избежание проблем, связанных с возможной пустотой спектра отношения, далее используется следующее

Определение 2.2. *Расширенным спектром отношения $\mathcal{A} \in LR(X)$ называется подмножество $\tilde{\sigma}(\mathcal{A})$ из расширенной комплексной плоскости $\tilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, которое совпадает с $\sigma(\mathcal{A})$, если выполнены следующие три условия: 1) $\mathcal{A}0 = \{0\}$, т. е. $\mathcal{A} \in LO(X)$; 2) резольвента $R(\ .\ , \mathcal{A})$ оператора $\mathcal{A}$ допускает аналитическое продолжение в точку ∞; 3) $\lim_{|\lambda| \to \infty} R(\lambda, \mathcal{A}) = 0$. В противном случае полагается $\tilde{\sigma}(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A}) \cup \{\infty\}$. Множество $\tilde{\rho}(\mathcal{A}) = \mathbb{C} \setminus \tilde{\sigma}(\mathcal{A})$ называется расширенным резольвентным множеством отношения $\mathcal{A}$.*

Из определения 2.2 и теоремы Лиувилля следует, что если $X \neq \{0\}$, то $\tilde{\sigma}(\mathcal{A}) \neq \varnothing$, $\forall \mathcal{A} \in LR(X)$, причем $\infty \in \tilde{\sigma}(\mathcal{A})$ при $dim\mathcal{A}0 \geq 1$, т. е. когда $\mathcal{A} \in LR(X) \setminus LO(X)$.

Пусть $\mathcal{A}$ — линейное отношение из $LR(X)$, для которого выполнено

Предположение 2.1. *Резольвентное множество отношения $\mathcal{A} \in LR(X)$ непусто.*

В работе [4] изучалась задача Коши

$$\dot{x}(t) \in \mathcal{A}x(t),\ x(0) = x_0 \in D(\mathcal{A}),\ t \in \mathbb{R}_+. \quad (2.1)$$

Решением (2.1) называется дифференцируемая функция $x : \mathbb{R}_+ \to X$, для которой $x(0) = x_0, x(t) \in D(\mathcal{A}),\ \forall t \geq 0$, и которая удовлетворяет включению. *Фазовым пространством* дифференциального включения (2.1) называется замыкание в X множества начальных условий вида $x(0) = x_0 \in D(\mathcal{A})$, для которых существует решение задачи (2.1). Обозначим фазовое пространство через $\Phi(\mathcal{A})$.

Не ограничивая общности, при необходимости можно считать, что $0 \in \rho(\mathcal{A})$, т. е. $\mathcal{A}^{-1} \in End X$. Если $x : \mathbb{R}_+ \to X$ − решение дифференциального включения (2.1) и $0 \in \rho(\mathcal{A})$, то $B = \mathcal{A}^{-1}$ и $x : \mathbb{R}_+ \to X$ является решением дифференциального уравнения

$$B\dot{x} = x. \quad (2.2)$$

С помощью эргодических теорем в [4] формировались подпространства, содержащие в себе фазовое пространство для дифференциальных включений, а затем с помощью некоторых аналогов условий теоремы Хилле−Филлипса−Иосиды−Феллера−Миядеры для линейных отношений строились вырожденные полугруппы линейных ограниченных операторов.

Введем обозначение: $\mathbb{C}_\omega = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid Re\lambda > \omega\} \subset \subset \rho(\mathcal{A})$.

Предположение 2.2. *Существуют такие числа $M > 0, \omega \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N}$, что для всех $\lambda \in \mathbb{C}_\omega$ и всех $n \in \mathbb{N}$ имеют место оценки*

$$\|(R(\lambda, \mathcal{A}))^{mn}\| \leq \frac{M}{(Re\lambda - \omega)^{mn}}. \quad (2.3)$$

В условиях предположения 2.2 введем в рассмотрение ограниченную последовательность операторов из алгебры $EndX$ вида

$$A_n = I - (-\lambda_n R(\lambda_n, \mathcal{A}))^m, \;\; n \in \mathbb{N}, \;\; \lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty \quad (2.4)$$

и замкнутое подпространство

$$\tilde{X} = \{x \in X : \exists \lim_{n\to\infty} A_n x\}.$$

Подпространство $\tilde{X}$ инвариантно относительно всех операторов $R(\lambda, \mathcal{A})$, $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$, значит, оно инвариантно относительно отношения $\mathcal{A}$ и можно рассмотреть сужение $\tilde{\mathcal{A}}$ отношения $\mathcal{A}$ на $\tilde{X}$.

Теорема 2.1. *В условиях предположений 2.1, 2.2 подпространство $\tilde{X}$ допускает разложение в прямую сумму*

$$\tilde{X} = X_0 \oplus X_\infty \quad (2.5)$$

двух замкнутых инвариантных относительно $\mathcal{A}$ подпространств X_0, X_∞, причем $X_0 = \overline{D(\mathcal{A}^m)}$, $X_\infty = \mathcal{A}^m 0$, и соответствующее разложение отношения $\tilde{\mathcal{A}} \in LR(\tilde{X})$

$$\tilde{\mathcal{A}} = A_0 \oplus B^{-1} \quad (2.6)$$

обладает свойствами: $\tilde{\sigma}(B^{-1}) = \{\infty\}, B^m = 0$, $A_0 : D(A_0) \subset X_0 \to X_0$ — линейный замкнутый оператор со спектром $\sigma(A_0) = \sigma(\tilde{\mathcal{A}}) = \sigma(\mathcal{A})$ и с плотной в X_0 областью определения $D(A_0^m)$ оператора A_0^m.

Замечание 2.2. *Разложение (2.5) пространства $\tilde{X}$ осуществляет проектор P_0, определяемый соотношениями*

$$P_0 x = \lim_{n\to\infty}(I - A_n)x = \lim_{n\to\infty}(-\lambda_n R(\lambda_n, \mathcal{A}))^m x, \;\; x \in \tilde{X},$$
$$ImP_0 = X_0, \;\; KerP_0 = X_\infty$$

и не зависящий от выбора последовательности (λ_n) из $\rho(\mathcal{A})$.

Теорема 2.2. *Пусть выполнены предположения 2.1, 2.2. Для того чтобы $\tilde{X} = X$, необходимо и достаточно, чтобы векторы из подпространства $\mathcal{A}^m 0$ разделяли функционалы из подпространства $(\mathcal{A}^*)^m 0$ сопряженного к X банахова пространства X^* ($\mathcal{A}^* \subset X^* \times X^*$ — сопряженное к $\mathcal{A}$ линейное отношение).*

В частности, $\tilde{X} = X$, если выполнено одно из следующих условий:

1) X — рефлексивное банахово пространство;

2) $R(\lambda_0, \mathcal{A}) \in EndX$ — слабо компактный оператор при некотором $\lambda_0 \in \rho(\mathcal{A})$;

3) $dim\mathcal{A}^m 0 = dim(\mathcal{A}^*)^m 0 < \infty$.

Построения фазового пространства $\Phi(\mathcal{A})$ и вырожденных полугрупп линейных операторов проводились в [4] в условиях, когда выполнены предположения 2.1, 2.2 и $dim\mathcal{A}0 \geq 1$, т. е. $\mathcal{A} \in LR(X) \setminus LO(X)$.

Пусть выполнено

Предположение 2.3. *Справедливо равенство $\tilde{X} = X$.*

Теорема 2.3. *Если для линейного отношения $\mathcal{A} \in LR(X)$ выполнены предположения 2.1, 2.2, 2.3 и $dim\mathcal{A}0 \geq 1$, то*

$$\Phi(\mathcal{A}) = \overline{D(\mathcal{A}^m)} = X_0,$$

и существует единственная вырожденная полугруппа операторов $\{T(t); t \geq 0\} \subset EndX$, генератором которой служит отношение $\mathcal{A} \in LR(X)$, определяемое равенствами $\mathcal{A} = A_0$ на X_0, $D(\mathcal{A}) = X_0 \cap D(\mathcal{A})$, $A0 = X_\infty$. Полугруппа $\{T(t); t \geq 0\}$ обладает свойствами:

1) *ее сужение $\{T_0(t); t \geq 0\} \subset EndX_0$ на X_0 является полугруппой класса C_0, и любое решение $x : \mathbb{R}_+ \to X$ задачи (2.1) с $x_0 \in D(A_0) \subset X_0$ имеет вид $x(t) = T_0(t)x_0, t \geq 0$;*

2) *ее сужение $\{T_\infty(t); t \geq 0\} \subset EndX_\infty$ на X_∞ является нулевой операторнозначной функцией;*

3) $T(0) = T_0(0) = P_0 \in End\widetilde{X}$ *— проектор на подпространство X_0 параллельно X_∞.*

В [4] было отмечено, что

1) полугруппа $\{T(t); t \geq 0\}$, фигурирующая в теореме 2.3, имеет вид $T(t) = T_0(t) \oplus 0$;

2) подпространство X_0 в условиях предположений 2.1, 2.2 является фазовым пространством для обобщенных решений (mild solutions);

3) подпространство X_∞, возникающее в условиях предположений 2.1, 2.2 не вносит вклада в фазовое пространство $\Phi(\mathcal{A})$;

4) если $\tilde{\sigma}(\mathcal{A}) = \{\infty\}$, т. е. $\mathcal{A}^{-1} \in EndX$ — квазинильпотентный оператор, то может оказаться, что $\Phi(\mathcal{A}) = X$.

Замечание 2.3. *В условиях выполнения предположений 2.1, 2.2, 2.3 дифференциальное включение (2.1) с $\mathcal{A} \in LR(X)$ оказывается эквивалентным системе дифференциальных уравнений*

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = A_0 x_0, & A_0 \in LO(X_0), \\ B\dot{x}_\infty = x_\infty, & B = \mathcal{A}_\infty^{-1} \in EndX_\infty. \end{cases} \quad (2.7)$$

§ 3. ПОЛУГРУППА РАСПРЕДЕЛЕНИЙ КЛАССА DS_0, ЕЕ ГЕНЕРАТОР

Обозначим через $\mathcal{D}_+ = \mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$ топологическую алгебру бесконечно дифференцируемых комплекснозначных функций, заданных на $\mathbb{R}_+$, имеющих компактный носитель и с операцией умножения — *сверткой* функций: $(\varphi * \psi)(t) = \int_0^t \varphi(t-s)\psi(s)ds, \varphi, \psi \in \mathcal{D}_+$. Топология на $\mathcal{D}_+$ определяется системой полунорм

$$p_{a,r}(\varphi) = \max_{0\le t\le a}\left|\varphi^{(r)}(t)\right|, r = 0,1,2,.., a > 0.$$

Определение 3.1. *Будем говорить, что последовательность $\varphi_n \subset \mathcal{D}_+$ сходится к $\varphi_0 \in \mathcal{D}_+$, если*

1) *существует компакт $K \subset \mathbb{R}_+$ такой, что $supp\varphi_n \subset K, n = 1,2,...$;*

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\varphi_n^{(i)}(t) - \varphi_0^{(i)}(t)\right| = 0, \forall t \in K, i = 0,1,2,...$.

Обозначим через θ функцию Хэвисайда вида

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & t \ge 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Лемма 3.1. *Справедливы соотношения*

$$\underbrace{\theta * ... * \theta}_{i \text{ сомножителей}} = \theta^{(1-i)} = \begin{cases} \dfrac{t^{i-1}}{(i-1)!}, & t \ge 0, \\ 0 & 0, t < 0, \end{cases} \quad i = 2,3,.... \tag{3.1}$$

Обозначим через δ_0 функцию Дирака, сосредоточенную в точке $t = 0$.

Лемма 3.2. *Справедливы соотношения*

$$\underbrace{\delta_0 * ... * \delta_0}_{i \text{ сомножителей}} = \delta_0, (-1)^i\varphi^{(i)}(0) = \left\langle \delta_0^{(i)}, \varphi\right\rangle, \tag{3.2}$$

$$f * \theta = \int_0^t f(s)ds = f^{(-1)}, f * \delta^{(i)} = f^{(i)}, \quad i = 0,1,... . \tag{3.3}$$

Определение 3.2. *Линейный оператор $\mathcal{F}$ в пространстве $\mathcal{D}_+$ называется непрерывным, если для любой последовательности (φ_n) из $\mathcal{D}_+$, сходящейся к нулю, имеем $\mathcal{F}(\varphi_n)x \to 0$ в X.*

Замечание 3.1. *В пространстве $\mathcal{D}_+$ оператор дифференцирования определен и непрерывен, оператор умножения на функцию из $\mathcal{D}$ также определен и непрерывен.*

Определение 3.3. *Полугруппой распределений в $\mathbb{R}_+$ назовем всякий непрерывный (в смысле определения 3.2) гомоморфизм $\mathcal{F}$ из алгебры $\mathcal{D}_+$ в алгебру $EndX$, т. е.*

$$\mathcal{F}(\varphi * \psi) = \mathcal{F}(\varphi)\mathcal{F}(\psi), \ \forall\varphi, \ \psi \in \mathcal{D}_+. \tag{3.4}$$

Рассмотрим подалгебру $\mathcal{D}_0(\mathbb{R}_+) = \{\varphi \in \mathcal{D}_+ \mid 0 \notin supp\varphi\}$ алгебры $\mathcal{D}_+$ и обозначим

$$\cap Ker\mathcal{F}(\varphi) = X_\infty, \ \overline{\cup Im\mathcal{F}(\varphi)} = X_0,$$

где $\mathcal{F} \in Hom(\mathcal{D}_+, EndX) = \mathcal{D}'_+$, пересечение и объединение берутся по всем функциям $\varphi \in \mathcal{D}_0(\mathbb{R}_+)$.

Замечание 3.2. *Согласно традиционной терминологии (см. [1]—[3]) полугруппой распределений называют гомоморфизм $\mathcal{F} : \mathcal{D}_0(\mathbb{R}_+) \to EndX$, удовлетворяющий дополнительным условиям. Одним из них, в частности, является условие невырожденности: $X_\infty = \{0\}$, другим — условие плотности образа: $X_0 = X$.*

Любая сильно непрерывная полугруппа операторов $T_0 : \mathbb{R}_+ \to EndX$ является локально суммируемой в $\mathbb{R}_+$ (т. е. суммируемой на каждом компактном множестве) функцией и порождает полугруппу распределений $T_0 : \mathcal{D}_+ \to EndX$ по формуле

$$T_0(\varphi)x = \int_0^\infty \varphi(s)T_0(s)xds. \tag{3.5}$$

Замечание 3.3. *Если полугруппа T_0 является вырожденной, то $T_0(0) = P_0 \ne I$ и $KerP_0 = X_\infty$.*

Локально суммируемым функциям, отличающимся на множестве положительной меры, отвечают различные распределения. Значит, множество локально суммируемых оператор-функций содержится (точнее, инъективно отображается, или вкладывается) в множестве распределений. Обычно распределение, порожденное локально суммируемой функцией, называют *регулярным*.

Определение 3.4. *Полугруппу распределений $\mathcal{T} : \mathcal{D}_+ \to EndX$ назовем регулярной в точке $t_0 \in \mathbb{R}_+$, или полугруппой операторов, если существует окрестность V_0 этой точки и сильно непрерывная полугруппа операторов $T_0 : \mathbb{R}_+ \to EndX$ такие, что все операторы $\mathcal{T}(\varphi)$, где $\varphi \in \mathcal{D}_+$ с носителем $supp\varphi \subset V_0$, определяются формулой (3.5).*

Дополнение к множеству регулярных точек назовем сингулярным множеством полугруппы распределений $\mathcal{F}$ и обозначим через $sing\mathcal{T}$.

Замечание 3.4. *Если $0 \notin sing\mathcal{T}$, то $sing\mathcal{T} = \varnothing$, и в этом случае $\mathcal{T}$ определяется формулой (3.5) по некоторой полугруппе операторов $\mathcal{T}_0$.*

Далее будут изучаться полугруппы распределений $\mathcal{T}$ с $sing\mathcal{T} = \{0\}$, которые называются полугруппами распределений *с сингулярностью в нуле.* Класс таких полугрупп обозначим через DS_0.

Определение 3.5. *Последовательность распределений $\mathcal{T}_n$ называется сходящейся к распределению $\mathcal{T}$, если*

$$\lim_{n\to\infty}\|\mathcal{T}_n(\varphi)x - \mathcal{T}(\varphi)x\| = 0,\ \forall\varphi \in K \subset \mathcal{D}_+,\ \forall x \in X_0,$$

где K — ограниченное множество. При этом множество K называется ограниченным, если для любых последовательностей (φ_n) из K и (ε_n) из $\mathbb{R}_+$ с $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n = 0$ имеем $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n\varphi_n = 0$ в $\mathcal{D}_+$.

Пусть $\mathcal{T} : \mathcal{D}_+ \to EndX$ — гомоморфизм с носителем $supp\mathcal{T} = \{0\}$. Тогда полугруппа распределений порядка сингулярности не выше $m-2$ *по определению* задается формулой

$$\mathcal{T}(\varphi) = \sum_{i=0}^{m-2}\varphi^{(i)}(0)C_i,\ \varphi \in \mathcal{D}_+. \tag{3.6}$$

Будем говорить, что порядок сингулярности гомоморфизма $\mathcal{T}$ равен r, если $\mathcal{T}$ представим в форме (3.6) с верхним пределом суммирования равным r и не представим в такой форме с меньшим значением этого предела.

Лемма 3.3. *Для того чтобы гомоморфизм $\mathcal{T} : \mathcal{D}_+ \to EndX$ с носителем $supp\mathcal{T} = \{0\}$ являлся полугруппой распределений, необходимо и достаточно, чтобы он допускал представление вида*

$$\mathcal{T}(\varphi) = \sum_{i=0}^{m-2}\varphi^{(i)}(0)B^{i+1},\ \varphi \in \mathcal{D}_+, \tag{3.7}$$

где $B \in EndX$ — нильпотентный оператор индекса нильпотентности m, т.е. $B^m = 0$, $B^{m-1} \neq 0$.

◀ Необходимость. Вначале в (3.6) примем $\varphi = \psi = \theta$, значит, $\varphi * \psi = \theta^{(-1)}$. Так как $\mathcal{T}(\theta) = C_0, \mathcal{T}(\theta * \theta) = C_1$, то $C_1 = C_0^2$. На следующем шаге положим $\varphi = \theta^{(-1)}, \psi = \theta, \varphi * \psi = \theta^{(-2)}$. Следовательно, $\mathcal{T}(\theta^{(-1)}) = C_1, \mathcal{T}(\theta^{(-2)}) = C_2$, откуда находим, что $C_2 = C_1C_0 = C_0^3$. После $m-2$ шагов в результате аналогичных рассуждений приходим к равенствам $C_i = C_0^{i+1}$, $i = 0,1,...,m-2$. Таким образом, полагая $C_0 = B$ в (3.6), получаем (3.7).

Достаточность. Пусть гомоморфизм $\mathcal{T}$ имеет порядок сингулярности не выше $m-2$ и справедливо представление (3.7). Значит, $B \in EndX$ — нильпотентный оператор индекса нильпотентности m. Непосредственной проверкой устанавливаются соотношения

$$\begin{gathered}(\varphi * \psi)(0) = 0, (\varphi * \psi)^{(k)}(0) = \\ = \sum_{l=0}^{k-1}\varphi^{(k-1-l)}(0)\psi^{(l)}(0), \\ 1 \le k \le m-2.\end{gathered} \tag{3.8}$$

Отсюда получаем цепочку равенств

$$\sum_{i=0}^{m-2}(\varphi * \psi)^{(i)}(0)B^{i+1} = \varphi(0)\psi(0)B^2 + (\varphi'(0)\psi(0) +$$
$$+\varphi(0)\psi'(0))B^3 + ... + \sum_{l=0}^{m-3}\varphi^{(m-3-l)}(0)\psi^{(l)}(0)B^{m-1} =$$
$$= \sum_{i=0}^{m-2}\varphi^{(i)}(0)B^{i+1} \cdot \sum_{l=0}^{m-2}\psi^{(l)}(0)B^{l+1},$$

что доказывает свойство (3.4) для $\mathcal{T}$. ▶

Замечание 3.5. *Очевидно, что $sing\mathcal{T} = \{0\} \Leftrightarrow B \neq 0$.*

Определение 3.6. *Полугруппу распределений $\mathcal{T} \in DS_0$ назовем разложимой, если она представима в виде*

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_\infty + \mathcal{T}_0, \tag{3.9}$$

где $\mathcal{T}_\infty, \mathcal{T}_0$ — полугруппы распределений со свойствами:

1) $supp\mathcal{T}_\infty = \{0\}$;
2) $sing\mathcal{T}_0 = \varnothing$;
3) $\mathcal{T}_\infty(\varphi)\mathcal{T}_0(\psi) = 0,\ \forall\varphi,\ \psi \in \mathcal{D}_+$.

Лемма 3.4. *Если полугруппа $\mathcal{T} \in DS_0$ разложима, то при любом $\varphi \in \mathcal{D}_+$*

$$\begin{gathered}\mathcal{T}_\infty(\varphi) = \sum_{i=0}^{m-2}(-1)^{i+1}\varphi^{(i)}(0)B^{i+1}, \\ \mathcal{T}_0(\varphi)x = \int_0^\infty\varphi(s)\mathcal{T}_0(s)xds.\end{gathered} \tag{3.10}$$

При этом $T_0 : \mathbb{R}_+ \to EndX$ и $T_0(0) = P_0$ — проектор. Подпространства $X_0 = ImP_0$,

$X_\infty = KerP_0$ инвариантны относительно отношения B^{-1}, являющегося обратным к нильпотентному оператору B. Сужение $B_0 = B \upharpoonright X_0$ оператора B на X_0 является нулевым оператором.

Пусть полугруппа $\mathcal{T} \in DS_0$ представима в виде (3.9), (3.10). Обозначим $\varphi_\lambda(t) = e^{-\lambda t} \in \mathcal{D}_+$ и положим $R(\lambda) = \mathcal{T}(\varphi_\lambda), Re\lambda > \omega, t \in \mathbb{R}_+$ (здесь ω — тип полугруппы T_0). Поскольку $\varphi_\lambda^{(i)}(0) = (-1)^i \lambda^i, i = 0,1,...,$ то

$$\mathcal{T}_\infty(\varphi_\lambda) = R(\lambda, B^{-1}),\ \mathcal{T}_0(\varphi_\lambda)x = R(\lambda, A_0)x,$$

где $A_0 : D(A_0) \subset X_0 \to X_0$ — генератор полугруппы T_0.

Лемма 3.5. *Если $Re\lambda > \omega, Re\mu > \omega,$ то функция R удовлетворяет тождеству Гильберта:*

$$R(\lambda) - R(\mu) = (\mu - \lambda)R(\lambda)R(\mu), \qquad (3.11)$$

и, следовательно, является псевдорезольвентой.

◀ Согласно пункту 3) определения разложимой полугруппы распределений достаточно проверить справедливость равенства (3.11) отдельно для $R(\lambda, B^{-1}), R(\lambda, A_0)$:

$$R(\lambda, B^{-1}) - R(\mu, B^{-1}) = \sum_{i=1}^{m-2}(\mu^i - \lambda^i)B^{i+1} =$$

$$= (\mu - \lambda)\Big(B^2 + (\mu + \lambda)B^3 + (\mu^2 + \mu\lambda + \lambda^2)B^4 +$$

$$+ ... + \sum_{l=0}^{m-3}\mu^{m-3-l}\lambda^l B^{m-1}\Bigg) = (\mu - \lambda)R(\lambda, B^{-1})R(\mu, B^{-1});$$

$$\frac{R(\lambda, A_0) - R(\mu, A_0)}{\mu - \lambda}x = \int_0^\infty e^{(\lambda-\mu)t}R(\lambda, A_0)xdt -$$

$$-\int_0^\infty(\mu - \lambda)^{-1}e^{(\lambda-\mu)t} \cdot e^{-\lambda t}T_0(t)xdt =$$

$$= \int_0^\infty e^{(\lambda-\mu)t}\int_0^\infty e^{-\lambda s}T_0(s)xdsdt - \int_0^\infty e^{(\lambda-\mu)t}\int_0^t e^{-\lambda s}T_0(s)xdsdt =$$

$$= \int_0^\infty e^{(\lambda-\mu)t}\int_t^\infty e^{-\lambda s}T_0(s)xdsdt = \int_0^\infty e^{-\mu t}\int_t^\infty e^{-\lambda(s-t)}T_0(s)xdsdt =$$

$$= \int_0^\infty e^{-\mu t}\int_0^\infty e^{-\lambda s}T_0(s+t)xdsdt =$$

$$= \int_0^\infty e^{-\mu t}\int_0^\infty e^{-\lambda s}T_0(s)T_0(t)xdsdt = R(\lambda, A_0)R(\mu, A_0)x. ▶$$

Теперь из [4, теорема 2.1] следует, что существует единственное отношение $\mathcal{A} \in LR(X)$ такое, что $R(\lambda) = (\lambda I - \mathcal{A})^{-1}$, $Re\lambda > \omega$. Полученное отношение $\mathcal{A}$ назовем *генератором* разложимой полугруппы распределений $\mathcal{T} \in SD_0$.

Таким образом, мы приходим к выводу: если $\|T(t)\| \le Me^{\omega t}$, то при $Re\lambda > \omega$

$$\mathcal{T}(\varphi_\lambda)x = R(\lambda, A_0)P_0x \oplus R(\lambda, B^{-1})(I - P_0)x =$$

$$= R(\lambda, \mathcal{A})x,\ x \in X,$$

откуда $\mathcal{A} = \lambda I - \mathcal{T}^{-1}(\varphi_\lambda)$.

Лемма 3.6. *Генератор $\mathcal{A}$ полугруппы $\mathcal{T} \in DS_0$, определенной формулами (3.9), (3.10), представим в виде прямой суммы $\mathcal{A} = B^{-1} \oplus A_0$ относительно разложения $X = X_\infty \oplus X_0$.*

Справедлива

Теорема 3.1. *Линейное отношение $\mathcal{A} \in LR(X)$ является генератором некоторой разложимой полугруппы распределений вида (3.9) точно тогда, когда выполнены предположения 2.1, 2.2, 2.3.*

◀ Если линейное отношение $\mathcal{A} \in LR(X)$ является генератором полугруппы распределений (3.9), то из лемм 3.5 и 3.6 следует представимость отношения $\mathcal{A}$ в виде прямой суммы $B^{-1} \oplus A_0$ относительно разложения $X = X_\infty \oplus X_0$. Кроме того, справедливо равенство $R(\lambda, \mathcal{A}) = R(\lambda, A_0) \oplus R(\lambda, B^{-1})$ для резольвенты отношения $R(\lambda, \mathcal{A})$, и поэтому $R^m(\lambda, \mathcal{A}) = R^m(\lambda, A_0) \oplus 0$. Но это означает, для $\mathcal{A}$ выполнены условия предположений 2.1, 2.2, 2.3.

Обратно, если для $\mathcal{A}$ выполнены условия предположений 2.1, 2.2, 2.3, то из теоремы 2.3 и лемм 3.3, 3.4 следует что отношение $\mathcal{A} \in LR(X)$ является генератором полугруппы распределений вида (3.9). ▶

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ushijima T.* On the strong continuity of distribution semi-groups // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I, 1970, 17, 363—372.

2. *Lions J.-L.* Les semi groupes distributions // Portugaliae Math., 1960, 19, 141—164.

3. *Melnikova I., Filinkov A.* Abstract Cauchy Problems: Three Approaches. Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics. 120. Chapman & Hall/CRC, 2002.

4. *Баскаков А.Г., Чернышов К.И.* Спектральный анализ линейных отношений и вырожденные полугруппы операторов // Матем. сборник, 2002, 193, № 11, С. 3—42.

5. *Хилле Е., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. М.: ИЛ, 1962.