УДК 517.946

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРИ $t \to \infty$ ФОРМУЛЫ РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ–СТОКСА В СЛУЧАЕ РАЗРЫВНОГО ГРАНИЧНОГО УСЛОВИЯ

© 2004 С. А. Баева

Воронежский государственный университет

В работе получены асимптотические при $t \to \infty$ формулы решения начально-краевой задачи для системы уравнений, описывающих динамику вязкой сжимаемой жидкости в случае разрывного граничного условия.

Работа посвящена построению асимптотики при $t \to \infty$ решения начально-краевой задачи для системы уравнений, описывающих динамику вязкой сжимаемой жидкости в случае разрывного граничного условия. При этом используются методы, развитые в [1] для задачи с гладкими начальными условиями.

Доказательство теоремы существования решения такой задачи мы приведем в другой работе.

На множестве $R^3_{++} = \{(x,t) : x_1 \in R^1, x_2 > 0, t > 0\}$ рассмотрим систему уравнений

$$\begin{gathered}
\frac{\partial u_1}{\partial t} - \nu\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}\right) + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = 0,\\
\frac{\partial u_2}{\partial t} - \nu\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}\right) + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = 0,\\
\alpha^2 \frac{\partial u_3}{\partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0,
\end{gathered} \tag{1}$$

где $\alpha \neq 0$, $\nu > 0$ — некоторые постоянные числа.

Задача состоит в выводе асимптотических при $t \to \infty$ формул решения системы (1), удовлетворяющего начальным условиям

$$u_1(x_1, x_2, +0) = 0, \; u_2(x_1, x_2, +0) = 0, \; u_3(x_1, x_2, +0) = 0 \tag{2}$$

и граничным условиям

$$u_1(x_1, +0, t) = 0, \; u_3(x_1, +0, t) = w_3(x_1, t). \tag{3}$$

Предположим, что функция $w_3(x_1, t)$ удовлетворяет следующему условию.

Условие 1. Функция $w_3(x_1, t)$ имеет вид $w_3(x_1, t) = p_1(x_1)p_2(t)$, где $p_1(x_1)$ — характеристическая функция отрезка $[-1;1]$, а функция $p_2(t) \in C^\infty(0;+\infty)$ и имеет компактный носитель, причем $p_2(0) = 0$.

В работе доказано следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть выполнено условие 1. Тогда для решения $(u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t))$ задачи (1)—(3) справедливы формулы:

$$u_1(x,t) = \int_0^t B_1(x, t-\tau) f_2(\tau) d\tau;$$

$$u_2(x,t) = \int_0^t B_{2,1}(x, t-\tau) f_2(\tau) d\tau + \int_0^t B_{2,2}(x, t-\tau)(f_2'(\tau) - f_2'(0)) d\tau;$$

$$u_3(x,t) = \int_0^t B_3(x, t-\tau) f_2(\tau) d\tau,$$

где $x = (x_1, x_2)$, $f_2(t) = 2p_2(t) + 2\alpha^2 \nu p_2'(t)$.

При этом для функций B_1; $B_{2,1}$; $B_{2,2}$; B_3 справедливы при $t \to \infty$ асимптотические формулы:

$$B_1(x,t) = O(t^{-1,5}); \tag{4}$$

$$B_{2,1}(x,t) = \frac{1}{2\pi\nu} t^{-1} + O(t^{-1,5}); \tag{5}$$

$$B_{2,2}(x,t) = \frac{1}{\pi} t^{-1} + O(t^{-2}); \tag{6}$$

$$B_3(x,t) = O(t^{-3}) + \frac{1}{2\pi\alpha^2\nu} e^{-\alpha^{-2}\nu^{-1}t} g_1(x_1, x_2), \tag{7}$$

где $g_1(x_1, x_2) = arctg \dfrac{1-x_1}{x_2} + arctg \dfrac{1+x_1}{x_2}$.

Эти асимптотические оценки равномерны по всем $x_1 \in R^1$, $x_2 > 0$.

Следствие 1. При выполнении условий теоремы 1 справедлива асимптотическая формула $B_3(x,t) = O(t^{-3})$, которая равномерна по всем $x_1 \in R^1$, $x_2 > 0$.

Изложим кратко схему доказательства теоремы.

По вектор-функции $U(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t))$, заданной при всех $x_1 \in R^1$, $x_2 > 0$, $t > 0$, построим вектор-функцию $V(x,t)$, заданную при всех $x_1 \in R^1$, $x_2 \in R^1$, $t \in R^1$ следующим образом:

$$V(x,t) = (v_1(x,t), v_2(x,t), v_3(x,t)) = \\ = (l_0 u_1(x,t), l_1 u_2(x,t), l_0 u_3(x,t)),$$

где l_0 — оператор продолжения функции нечетным образом при $x_2 < 0$ и нулем при $t < 0$, а l_1 — оператор продолжения функции четным образом при $x_2 < 0$ и нулем при $t < 0$.

Тогда функция $V(x,t)$ в обобщенном смысле является решением следующей системы уравнений:

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} - \nu\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2}\right) + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} = 0,$$
$$\frac{\partial v_2}{\partial t} - \nu\left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2}\right) + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} = G(x,t), \qquad (8)$$
$$\alpha^2 \frac{\partial v_3}{\partial t} + \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0,$$

где $G(x,t) = 2w_{3,0}(x_1,t)\delta(x_2) + 2\alpha^2\nu \dfrac{\partial w_{3,0}(x_1,t)}{\partial t}\delta(x_2)$.

Функция $w_{3,0}(x,t)$ есть функция $w_3(x,t)$, продолженная нулем при $t < 0$.

Применив к обеим частям уравнений системы (8) преобразование Фурье $F_{x\to s}$ и преобразование Лапласа $L_{t\to\gamma}$, получим систему алгебраических уравнений. Решая эту систему и применяя к полученному решению обратные преобразования Фурье и Лапласа, получим

$$v_j(x,t) = F^{-1}_{x\to s} L^{-1}_{\gamma\to t}[b_j(s,\gamma) F_{x\to s} L_{t\to\gamma}[G(x,t)]], \qquad (9)$$
$$j = 1,2,3,$$

где

$$b_1(s,\gamma) = \frac{-s_1 s_2}{P(s,\gamma)};$$
$$b_2(s,\gamma) = \frac{\alpha^2\gamma(\gamma + \nu|s|^2) + s_1^2}{P(s,\gamma)};$$
$$b_3(s,\gamma) = \frac{-is_2(\gamma + \nu|s|^2)}{P(s,\gamma)};$$
$$P(s,\gamma) = (\alpha^2\gamma(\gamma + \nu|s|^2) + |s|^2)(\gamma + \nu|s|^2).$$

Формулы (9) можно записать в виде

$$v_j(x,t) = \int_0^t B_j(x,t-\tau) f_2(\tau)d\tau, \ j = 1,3;$$
$$v_2(x,t) = \int_0^t B_{2,1}(x,t-\tau) f_2(\tau)d\tau +$$
$$+\int_0^t B_{2,2}(x,t-\tau) L^{-1}_{\gamma\to\tau}[\gamma L_{t\to\gamma}[f_2(t)]]d\tau,$$

где функция $f_2(t)$ определена выше;

$$B_j(x,t) = F^{-1}_{s\to x} L^{-1}_{\gamma\to t}[b_j(s,\gamma)\hat{p}_1(s_1)], \ j = 1,3;$$
$$\hat{p}_1(s_1) = F_{x_1\to s_1}[p_1(x_1)];$$
$$B_{2,1}(x,t) = F^{-1}_{s\to x} L^{-1}_{\gamma\to t}\left[\frac{s_1^2 \hat{p}_1(s_1)}{P(s,\gamma)}\right],$$
$$B_{2,2}(x,t) = F^{-1}_{s\to x} L^{-1}_{\gamma\to t}\left[\frac{\alpha^2(\gamma + \nu|s|^2)\hat{p}_1(s_1)}{P(s,\gamma)}\right].$$

Из этих формул выводятся формулы представления решения задачи (1)—(3).

Дальнейшие рассуждения посвящены выводу асимптотических при $t \to \infty$ формул (4)—(7).

Рассмотрим функцию $B_1(x,t)$. Эту функцию можно представить в виде

$$B_1(x,t) = B_{1,1}(x,t) + B_{1,2}(x,t) + B_{1,3}(x,t), \qquad (10)$$

где

$$B_{1,j}(x,t) =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^2\alpha^2} \int_{\Omega_j} e^{i(x,s)}(-s_1 s_2 \hat{p}_1(s_1))\left(\frac{e^{\gamma_1 t}}{(\gamma_1-\gamma_2)(\gamma_1-\gamma_3)} + \right.$$
$$\left. + \frac{e^{\gamma_2 t}}{(\gamma_2-\gamma_1)(\gamma_2-\gamma_3)} + \frac{e^{\gamma_3 t}}{(\gamma_3-\gamma_1)(\gamma_3-\gamma_2)}\right)ds,$$

где $\Omega_1 = \{s : |s| < \delta\}$, $\Omega_2 = \{s : \delta < |s| < N\}$, $\Omega_3 = \{s : |s| > N\}$, $\delta > 0$ — достаточно малое число, а $N > 0$ — достаточно большое. Здесь $(x,s) = x_1 s_1 + x_2 s_2$; $\gamma_j, j = 1,2,3$ — корни уравнения

$$P(s,\gamma) = 0. \qquad (11)$$

Справедливы следующие утверждения.

Лемма 1. Для корней уравнения (11) справедливы при $|s| \to 0$ асимптотические формулы:

$$\gamma_1 = -\nu\,|s|^2 + O(|s|^{N_1}) \text{ для любого } N_1 > 0;$$

$$\gamma_j = -0,5\nu\,|s|^2 + (-1)^j i\,|s|\,\alpha^{-1} + O(|s|^3),\ j = 1;2.$$

При $|s| \to \infty$ справедливы асимптотические формулы:

$$\gamma_1 = -\nu\,|s|^2 + O(|s|^{-N_1}) \text{ для любого } N_1 > 0;$$

$$\gamma_2 = -\nu\,|s|^2 + \alpha^{-2}\nu^{-1} + O(|s|^{-2}),$$

$$\gamma_3 = -\alpha^{-2}\nu^{-1} + O(|s|^{-2}).$$

Лемма 2. Пусть $f(\lambda)$ — аналитическая функция в области $\operatorname{Re}\lambda \geq 0, |\lambda| \leq \delta_1$ при некотором $\delta_1 > 0$. Тогда при $t \to +\infty$ справедливы асимптотические формулы

$$\int_0^{\delta_1} \lambda^{k-1} f(\lambda) e^{t\gamma_1(\lambda)} d\lambda =$$

$$= 0,5(2\nu^{-1})^{0,5k}\,\Gamma(0,5k) t^{-0,5k} f(0) + O(t^{-0,5k-1});$$

$$\int_0^{\delta_1} \lambda^{k-1} f(\lambda) e^{t\gamma_j(\lambda)} d\lambda =$$

$$= ((-1)^j i)^k\,\Gamma(k) t^{-k} \alpha^k f(0) + O(t^{-k-1});\ j = 2;3,$$

где $\gamma_j(\lambda)$ — корни уравнения (11).

С помощью лемм 1—2 доказываются следующие утверждения.

Лемма 3. Пусть функция $p_1(x_1)$ удовлетворяет условию 1. Тогда для функции $B_{1,1}(x,t)$ справедлива при $t \to +\infty$ асимптотическая формула $B_{1,1}(x,t) = O(t^{-1,5})$, равномерная по всем $x_1 \in R^1,\ x_2 > 0$.

Лемма 4. Пусть функция $p_1(x_1)$ удовлетворяет условию 1. Тогда для функции $B_{1,2}(x,t)$ справедлива при $t \to +\infty$ асимптотическая формула $B_{1,2}(x,t) = O(t^{-N_1})$, для любого $N_1 > 0$. Эта формула равномерна по всем $x_1 \in R^1$, $x_2 > 0$.

Лемма 5. Пусть функция $p_1(x_1)$ удовлетворяет условию 1. Тогда для функции $B_{1,3}(x,t)$ справедлива при $t \to +\infty$ асимптотическая формула $B_{1,3}(x,t) = O(t^{-N_1})$, для любого $N_1 > 0$. Эта формула равномерна по всем $x_1 \in R^1,\ x_2 > 0$.

Применяя в (10) результаты лемм 3—5, получим асимптотическую формулу (4).

Рассмотрим теперь функцию $B_{2,1}(x,t)$. Эту функцию можно представить в виде

$$B_{2,1}(x,t) = B_{2,1}^1(x,t) + B_{2,1}^2(x,t) + B_{2,1}^3(x,t), \qquad (12)$$

где

$$B_{2,1}^j(x,t) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2\alpha^2} \int_{\Omega_j} e^{i(x,s)} s_1{}^2 \hat{p}_1(s_1) \Big(\frac{e^{\gamma_1 t}}{(\gamma_1-\gamma_2)(\gamma_1-\gamma_3)} +$$

$$+ \frac{e^{\gamma_2 t}}{(\gamma_2-\gamma_1)(\gamma_2-\gamma_3)} + \frac{e^{\gamma_3 t}}{(\gamma_3-\gamma_1)(\gamma_3-\gamma_2)} \Big) ds,$$

области $\Omega_j,\ j = 1,2,3$ определены выше.

Справедливы следующие утверждения.

Лемма 6. Пусть функция $p_1(x_1)$ удовлетворяет условию 1. Тогда для функции $B_{2,1}^1(x,t)$ справедлива при $t \to +\infty$ асимптотическая формула $B_{2,1}^1(x,t) = \dfrac{1}{2\pi\nu t} + \dfrac{\alpha^2}{2\pi t^2} + O(t^{-3})$, равномерная по всем $x_1 \in R^1, x_2 > 0$.

Лемма 7. Пусть функция $p_1(x_1)$ удовлетворяет условию 1. Тогда для функции $B_{2,1}^2(x,t)$ справедлива при $t \to +\infty$ асимптотическая формула $B_{2,1}^2(x,t) = O(t^{-N_1})$, для любого $N_1 > 0$. Эта формула равномерна по всем $x_1 \in R^1$, $x_2 > 0$.

Лемма 8. Пусть функция $p_1(x_1)$ удовлетворяет условию 1. Тогда для функции $B_{2,1}^3(x,t)$ справедлива при $t \to +\infty$ асимптотическая формула $B_{2,1}^3(x,t) = O(t^{-N_1})$, для любого $N_1 > 0$. Эта формула равномерна по всем $x_1 \in R^1$, $x_2 > 0$.

Применяя в (12) результаты лемм 6—8, получим асимптотическую формулу (5).

Рассмотрим теперь функцию $B_{2,2}(x,t)$. Эту функцию можно представить в виде

$$B_{2,2}(x,t) = B_{2,2}^1(x,t) + B_{2,2}^2(x,t) + B_{2,2}^3(x,t), \qquad (13)$$

где

$$B_{2,2}^j(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^2\alpha^2} \int_{\Omega_j} e^{i(x,s)} \hat{p}_1(s_1) \frac{e^{\gamma_2 t} - e^{\gamma_3 t}}{\gamma_2 - \gamma_3} ds,$$

области $\Omega_j,\ j = 1,2,3$ определены выше.

Справедливы следующие утверждения.

Лемма 9. Пусть функция $p_1(x_1)$ удовлетворяет условию 1. Тогда для функции $B_{2,2}^1(x,t)$ справедлива при $t \to +\infty$ асимптотическая формула $B_{2,2}^1(x,t) = \dfrac{1}{\pi t} + O(t^{-2})$, равномерная по всем $x_1 \in R^1,\ x_2 > 0$.

Лемма 10. Пусть функция $p_1(x_1)$ удовлетворяет условию 1. Тогда для функции $B_{2,2}^2(x,t)$ справедлива при $t \to +\infty$ асимптотическая формула $B_{2,2}^2(x,t) = O(t^{-N_1})$, для любого $N_1 > 0$. Эта формула равномерна по всем $x_1 \in R^1$, $x_2 > 0$.

Лемма 11. Пусть функция $p_1(x_1)$ удовлетворяет условию 1. Тогда для функции $B_{2,2}^3(x,t)$ справедлива при $t \to +\infty$ асимптотическая формула $B_{2,2}^3(x,t) = O(t^{-N_1})$, для любого $N_1 > 0$. Эта формула равномерна по всем $x_1 \in R^1$, $x_2 > 0$.

Используя результаты лемм 9—11 в равенстве (13), получим асимптотическую формулу (6).

Рассмотрим теперь функцию $B_3(x,t)$. Эту функцию можно представить в виде

$$B_3(x,t) = B_3^1(x,t) + B_3^2(x,t) + B_3^3(x,t), \quad (14)$$

где

$$B_3^j(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^2\alpha^2} \int\limits_{\Omega_j} e^{i(x,s)} \hat{p}_1(s_1) \frac{-is_2(e^{\gamma_2 t} - e^{\gamma_3 t})}{\gamma_2 - \gamma_3} ds,$$

области Ω_j, $j = 1,2,3$ определены выше.

Справедливы следующие утверждения.

Лемма 12. Пусть функция $p_1(x_1)$ удовлетворяет условию 1. Тогда для функции $B_3^1(x,t)$ справедлива при $t \to +\infty$ асимптотическая формула $B_3^1(x,t) = O(t^{-3})$, равномерная по всем $x_1 \in R^1$, $x_2 > 0$.

Лемма 13. Пусть функция $p_1(x_1)$ удовлетворяет условию 1. Тогда для функции $B_3^2(x,t)$ справедлива при $t \to +\infty$ асимптотическая формула $B_3^2(x,t) = O(t^{-N_1})$, для любого $N_1 > 0$. Эта формула равномерна по всем $x_1 \in R^1$, $x_2 > 0$.

Лемма 14. Пусть функция $p_1(x_1)$ удовлетворяет условию 1. Тогда для функции $B_3^3(x,t)$ справедлива при $t \to +\infty$ асимптотическая формула $B_3^3(x,t) = \frac{1}{2\pi\alpha^2\nu} e^{-\alpha^{-2}\nu^{-1}t} g_1(x_1,x_2) + O(t^{-3}) + O(t^{-N_1})$, для любого $N_1 > 0$. Эта формула равномерна по всем $x_1 \in R^1$, $x_2 > 0$. Функция $g_1(x_1,x_2)$ определена выше.

Замечание. Из леммы 14 следует, что при $t \to +\infty$ справедливо равенство $B_3^3(x,t) = O(t^{-3})$, причем оценка равномерна по всем $x_1 \in R^1$, $x_2 > 0$.

Используя результаты лемм 12—14, получим асимптотическую формулу (7).

Автор выражает благодарность своему научному руководителю, доктору физ.-мат. наук А. В. Глушко за постоянную помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Глушко А. В.* // Асимптотические методы в задачах гидродинамики. Воронеж: ВГУ, 2003. — 300 с.