УДК 517.947

КОЭРЦИТИВНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ АБСТРАКТНОЙ ОДНОРОДНОЙ ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

© 2004 С. Н. Афанасьев

Липецкий государственный педагогический университет

В настоящей работе мы строим и изучаем максимальные пространства для краевых условий u_0 и u_T однородной абстрактной вырождающейся краевой задачи со слабо позитивным оператором в пространствах Бохнера B_p, $p \in (1;+\infty)$. В работе [3] была установлена однозначная разрешимость этой задачи для $u_0, u_T \in D(A^2)$ и получена явная формула решения. В настоящей работе доказано, что рассматриваемая задача коэрцитивно разрешима в B_p тогда и только тогда, когда краевые условия u_0 и u_T соответственно принадлежат построенным максимальным пространствам. Способ доказательства основан на выделении главной части соответствующих интегральных операторов, которая оказывается точно такой же, как и в случае невырожденной краевой задачи для u_T, и рассматривается в некотором весовом пространстве для u_0.

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим в банаховом пространстве E однородную краевую задачу*

$$u''(t) - t^{2\alpha} A u(t) = 0, \quad \alpha > 0, t \in [0;T], \tag{1}$$

$$u(0) = u_0, \quad u(T) = u_T. \tag{2}$$

Здесь A — слабо позитивный оператор. Напомним, что действующий в E линейный неограниченный оператор A называется слабо позитивным (см. [6]), если его область определения $D(A)$ плотна в E и

$$\left\|(\lambda I - A)^{-1}\right\| \le \frac{M}{1+|\lambda|}, \quad \lambda \le 0. \tag{3}$$

Из (3) вытекает существование таких $\sigma_0 > 0$, $\psi_0 \in (0;\pi)$, что контур $\Gamma = \Gamma_- \cup \Gamma_0 \cup \Gamma_+$, где $\Gamma_\pm = \{\lambda : \lambda = \rho e^{\pm i\psi_0}, \rho \ge \sigma_0\}, \Gamma_0 = \{\lambda : \lambda = \sigma_0 e^{i\varphi}, |\varphi| \le \psi_0\}$, лежит в резольвентном множестве A, причем (3) выполняется для всех $\lambda \in \Gamma$ и λ, лежащих левее Γ. Пусть $B_p = B_p([0;T],E)$, $p \in (1;+\infty)$ — пространства Бохнера, а $W_p^2([0;T],E)$ — абстрактные пространства Соболева функций из B_p, имеющих две обобщенные производные.

*Мы рассматриваем задачу (1)—(2) при $\alpha > 0$, поскольку главный результат этой статьи (теорема 3) доказан именно для таких α. Однако работа [3] дает нам возможность изучать задачу (1)—(2) при $\alpha > -1$, и мы пользуемся этим для некоторых промежуточных результатов, стремясь к тому, чтобы ограничения на α возникали естественным путем в процессе доказательства.

Определение 1. *Решением задачи (1)—(2) назовем функцию $u(t) \in W_p^2([0;T],E)$, такую что $t^{2\alpha} A u(t) \in B_p$, $u(t)$ удовлетворяет (2) и почти всюду на $[0;T]$ выполняется (1).*

Отметим ряд работ, посвященных изучению задач, близких к задаче (1)—(2). В работе В. П. Орлова и П. Е. Соболевского [12] исследуется сингулярный оператор $L_0 u(t) = a(t)u''(t) - Au(t)$, где $a(t)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[0;1]$, $a(t) > 0$ при $t > 0$, $a(0) = 0$, а оператор A слабо позитивен, и доказывается коэрцитивная разрешимость уравнения

$$L_0 u(t) - \lambda u(t) = f(t), \quad Re\lambda > \sigma_0 > 0$$

в пространствах Гельдера C_0^α и Бохнера $B_p, p \in (1;+\infty)$. Полученная там же оценка решения означает, что оператор L_0 порождает аналитическую полугруппу. Коэрцитивная разрешимость в B_p при $p \in (1;+\infty)$ неоднородной эллиптической краевой задачи

$$t^{2\alpha} u''(t) - Au(t) = f(t), \quad \alpha \in (0;1), t \in [0;1],$$

$$u(0) = 0, u(1) = 0$$

со слабо позитивным оператором A доказана в статье В. П. Орлова [10]. В работе А. Фавини [15] в банаховом пространстве E рассмотрена задача

$$u''(z) = z^m A u(z), \quad z \in [-T;T], \tag{4}$$

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1 \tag{5}$$

эллиптическо-гиперболического типа. А. Фавини доказывает существование решения задачи (4)—(5) в классическом смысле и выписывает его в явном виде для нечетного целого m при довольно сильных ограничениях на начальные данные u_0 и u_1. Особо отметим фундаментальные монографии И. А. Киприянова [5] и А. Фавини и А. Яги [16]. В последней работе рассматривается разрешимость задач типа задачи (1) — (2) в классическом смысле. Там же описана история вопроса и получены явные формулы решений (см. введение и главу 6).

Обозначим через $\tilde{E}_0$ и $\tilde{E}_T$ максимальные пространства для краевых условий u_0 и u_T соответственно, для которых задача (1)—(2) однозначно разрешима.

Определение 2. *Задача (1)—(2) называется коэрцитивно разрешимой в B_p, если она однозначно разрешима для любых $u_0 \in \tilde{E}_0$, $u_T \in \tilde{E}_T$ и справедливо неравенство*

$$\|u''(t)\|_{B_p} + \|t^{2\alpha} Au(t)\|_{B_p} \le M\{\|u_0\|_{\tilde{E}_0} + \|u_T\|_{\tilde{E}_T}\}.$$

Целью настоящей работы является изучение максимальных пространств для краевых условий (2) (которые в определенной норме становятся банаховыми пространствами) и доказательство коэрцитивной разрешимости задачи (1)—(2) в B_p. Положительные константы, значения которых несущественны, обозначены одной буквой M.

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА МОДИФИЦИРОВАННЫХ ФУНКЦИЙ БЕССЕЛЯ

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение, называемое модифицированным уравнением Бесселя

$$u''(z) + \frac{1}{z}u'(z) - (1 + \frac{\nu^2}{z^2})u(z) = 0, \nu > 0.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$u(z) = C_1 I_\nu(z) + C_2 K_\nu(z),$$

где $I_\nu(z)$ и $K_\nu(z)$ — модифицированные функции Бесселя. Эти функции являются аналитическими во всей комплексной плоскости без отрицательной полуоси $(-\infty; 0]$. В области $Re\, z > 0$, $I_\nu(z) \ne 0$ и $K_\nu(z) \ne 0$. Если $|arg\ z| < \frac{\pi}{2}$, то

$$I_\nu(z) \sim \frac{z^\nu}{2^\nu \Gamma(\nu + 1)},\ K_\nu(z) \sim 2^{\nu-1}\Gamma(\nu) z^{-\nu}, \nu > 0 \quad (6)$$

при малых значениях $|z|$ и

$$\begin{aligned} I_\nu(z) &= \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}(1 + O_1(|z|^{-1})), \\ K_\nu(z) &= \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z}(1 + O_2(|z|^{-1})) \end{aligned} \quad (7)$$

при больших значениях $|z|$ и $\nu > -1/2$. Здесь и далее $\Gamma(x)$, $x > 0$ — гамма-функция. Изложенные факты взяты из [9].

ОДНОЗНАЧНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ

Пусть $C^2 = C^2([0;T], E)$ — пространство дважды непрерывно дифференцируемых на отрезке $[0;T]$ функций, а $C = C([0;T], E)$ пространство функций, непрерывных на $[0;T]$. Вначале докажем однозначную разрешимость задачи (1)—(2).

Лемма 1. *Пусть $\alpha > -1, p \in (1; +\infty)$. Тогда решение задачи (1)—(2) существует и единственно.*

Доказательство. В [3] показано, что при любых $u_0, u_T \in D(A^2)$ и $\alpha > -1$ задача (1)—(2) имеет единственное решение $u(t) \in C^2$, причем $t^{2\alpha} Au(t) \in C$. Поэтому для таких u_0 и u_T решение (1) — (2) тем более существует в смысле определения 1. Докажем единственность этого решения. Согласно [3], для любой функции $f(t) \in D(A)$, такой что $f(t), Af(t) \in C$, задача

$$u''(t) - t^{2\alpha} Au(t) = f(t),\ \alpha > -1,\ t \in [0;T], \quad (8)$$

$$u(0) = 0, \quad u(T) = 0 \quad (9)$$

имеет единственное решение $u(t) \in C^2$, такое что $t^{2\alpha} Au(t) \in C$, и его можно записать в виде

$$u(t) = \int_0^T G(t,s) f(s) ds,$$

где

$$G(t,s) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \left\{ -U_2(t,\lambda)U_1(s,\lambda) + \right. \\ \left. + \frac{U_2(T,\lambda)}{U_1(T,\lambda)} U_1(t,\lambda)U_1(s,\lambda) \right\} R(\lambda) d\lambda, \\ 0 \le s \le t, \\ \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \left\{ -U_1(t,\lambda)U_2(s,\lambda) + \right. \\ \left. + \frac{U_2(T,\lambda)}{U_1(T,\lambda)} U_1(t,\lambda)U_1(s,\lambda) \right\} R(\lambda) d\lambda, \\ t \le s \le T. \end{cases}$$

Здесь $U_1(t,\lambda)=\sqrt{2\nu t}I_\nu(2\nu t^{\frac{1}{2\nu}}\sqrt{\lambda})$, $U_2(t,\lambda)=\sqrt{2\nu t}K_\nu(2\nu t^{\frac{1}{2\nu}}\sqrt{\lambda})$, $\nu>0$, $R(\lambda)=(\lambda I-A)^{-1}$ — резольвента оператора A. Пусть $u(t)$ любое решение задачи (8)—(9) с нулевой правой частью $f(t)=0$. Покажем, что тогда $u(t)=0$ почти всюду на $[0;T]$. Пусть $L(u(t))==u''(t)-t^{2\alpha}Au(t)$ и $v(t)=R(\lambda)u(t)$, где λ регулярная точка. Ясно, что $L(v(t))=0$. Следовательно,

$$\int_0^T G(t,s)L(v(s))ds=0,$$

т. е.

$$\int_0^T G(t,s)v''(s)ds-\int_0^T G(t,s)s^{2\alpha}Av(s)ds=0. \quad (10)$$

В первом слагаемом (10) дважды выполним интегрирование по частям, используя свойства $G(t,s)$, и получим, что

$$\int_0^T G(t,s)v''(s)ds=\int_0^t G(t,s)v''(s)ds+ +\int_t^T G(t,s)v''(s)ds=-G_s'(t,s)v(s)\Big|_{s=0}^{s=t}- \quad (11)$$
$$-G_s'(t,s)v(s)\Big|_{s=t}^{s=T}+\int_0^T G_{ss}''(t,s)v(s)ds.$$

Подставляя (11) в (10) и учитывая краевые условия (9), мы имеем

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma W\{U_1(t,\lambda);U_2(t,\lambda)\}(\lambda I-A)^{-1}v(t)d\lambda+ +\int_0^T(G_{ss}''(t,s)-s^{2\alpha}AG(t,s))v(s)ds=0. \quad (12)$$

Зная, что вронскиан $W\{I_\nu(z);K_\nu(z)\}=-\frac{1}{z}$ (см. [9]), нетрудно найти, что вронскиан $W\{U_1(t,\lambda);U_2(t,\lambda)\}=-1$. Последний интеграл в (12) равен нулю, так как оператор-функция $G(t,s)$ удовлетворяет уравнению (1) по s на каждом из соответствующих промежутков в сильном смысле, а $v(s)\in D(A), s\in[0;T]$. Следовательно, мы получаем, что $R(\lambda)u(t)=0$, $t\in[0;T]$. Вследствие обратимости резольвенты $R(\lambda)$ в регулярной точке мы находим, что $u(t)=0$ почти для всех $t\in[0;T]$. Отсюда следует единственность решения задачи (8)—(9) с $f(t)=0$, а значит, и задачи (1)—(2) в смысле определения 1 при $\alpha>-1$.

Лемма доказана.

ПРОСТРАНСТВА ДЛЯ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ И ИХ СВОЙСТВА

Разобьем задачу (1)—(2) на две подзадачи и изучим каждую из них отдельно. Сначала рассмотрим задачу

$$u''(t)-t^{2\alpha}Au(t)=0, \alpha\ge-\frac{1}{2}, t\in[0;T], \quad (13)$$

$$u(0)=0,\quad u(T)=u_T. \quad (14)$$

В лемме 1 доказано, что задача (13)—(14) однозначно разрешима. Для $u_T\in D(A^2)$ ее решение имеет вид (см. [3])

$$u(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\sqrt{t}I_\nu(2\nu t^{\frac{1}{2\nu}}\sqrt{\lambda})}{\sqrt{T}I_\nu(2\nu T^{\frac{1}{2\nu}}\sqrt{\lambda})}(\lambda I-A)^{-1}u_Td\lambda,$$
$$\nu=\frac{1}{2(\alpha+1)}\in(0;1].$$

Из определения решения задачи (1)—(2) вытекает, что

$$\|t^{2\alpha}Au(t)\|_{B_p}=$$
$$=M\left(\int_0^{\overline{T}}\left\|\int_\Gamma\frac{\tau^\nu I_\nu(\tau\sqrt{\lambda})}{\overline{T}^\nu I_\nu(\overline{T}\sqrt{\lambda})}\lambda(\lambda I-A)^{-1}u_T\,d\lambda\right\|^p\tau^\gamma d\tau\right)^{1/p}=$$
$$=M\left(\int_0^{\overline{T}}\|F(\tau)u_T\|^p\tau^\gamma d\tau\right)^{1/p}=M\|F(\tau)u_T\|_{B_{p,\gamma}}<\infty.$$

Здесь $\gamma=(2p-1)(1-2\nu)$, $\overline{T}=2\nu T^{\frac{1}{2\nu}}$, $\tau=2\nu t^{\frac{1}{2\nu}}$, $\nu=\frac{1}{2(\alpha+1)}\in(0;1]$. Через $F(\tau)u_T$ обозначен интеграл по контуру Г. Обозначим $\overline{B_p}=B_p([0;\overline{T}],E)$. Пусть $B_{p,\gamma}$ — весовое пространство Бохнера с нормой $\|\varphi(\tau)\|_{B_{p,\gamma}}==(\int_0^{\overline{T}}\|\varphi(\tau)\|^p\tau^\gamma d\tau)^{1/p}$. Оператор $F(\tau)$, $\tau\in[0;\overline{T})$ определен на E, а $F(\overline{T})$ неограничен и $D(A^2)\subset D(F(\overline{T}))$. При любом $\tau\in[0;\overline{T}]$ оператор $F(\tau)$ отображает $D(F(\tau))$ в $B_{p,\theta}$, $\theta=\gamma+4p\nu$. Рассмотрим множество элементов из E, определяемое соотношением

$$E_T=\{x:x\in E,\ \|F(\tau)x\|_{B_{p,\gamma}}<\infty\}.$$

Заметим, что E_T не пусто. Например, $D(A^2)\subset E_T$.

Лемма 2. *Пусть* $\alpha\ge-\frac{1}{2}, p\in(1;+\infty)$. *Тогда* E_T *есть банахово пространство с нормой*

$$\|x\|_{E_T}=\|x\|+\|Ae^{-\tau A^{1/2}}x\|_{\overline{B_p}}. \quad (15)$$

Доказательство. Обозначим $\rho=Re\sqrt{\lambda}>0$ и разобьем контур Г на 4 части:

$$\Gamma_\epsilon = \{\lambda : \lambda \in \Gamma, \lambda = \sigma_0 e^{i\varphi}, \ |\varphi| \le \epsilon\},$$
$$\Gamma_1 = \left\{\lambda : \lambda \in \Gamma \setminus \Gamma_\epsilon, \rho \le \frac{1}{\overline{T}}\right\}, \tag{16}$$
$$\Gamma_2 = \left\{\lambda : \lambda \in \Gamma \setminus \Gamma_\epsilon, \ \rho \in \left[\frac{1}{\overline{T}}; \frac{1}{\tau}\right]\right\},$$
$$\Gamma_3 = \left\{\lambda : \lambda \in \Gamma \setminus \Gamma_\epsilon, \ \rho \ge \frac{1}{\tau}\right\}, \tag{17}$$

чтобы можно было применить асимптотические формулы (6) и (7) для модифицированных функций Бесселя. Здесь ϵ — достаточно малое положительное число.

Легко заметить, что для $\lambda \in \Gamma_i, i = 1,2,3$ $|d\lambda| \le M\rho d\rho$. Если $\lambda \in \Gamma_1$, то $0 \le \tau\rho \le \overline{T}\rho \le 1$. При $\lambda \in \Gamma_2$ имеем $0 \le \tau\rho \le 1 \le \overline{T}\rho$. Для $\lambda \in \Gamma_3$ получаем $1 \le \tau\rho \le \overline{T}\rho$. Соответственно используются формулы (6) или (7). Рассмотрим оператор

$$G(\tau)x = \left(\frac{\tau}{\overline{T}}\right)^{\nu-\frac{3}{2}} e^{1-\frac{\overline{T}}{\tau}} \int_\Gamma \lambda e^{-(\overline{T}-\tau)\sqrt{\lambda}} (\lambda I - A)^{-1} x d\lambda,$$

определенный при $\tau \in [0;\overline{T})$ для любых $x \in E$ и отображающий E в $B_{p,\theta}$. Оператор $G(\overline{T})$ неограничен и отображает $D(G(\overline{T}))$ в $B_{p,\theta}$. Легко видеть, что $D(A^2) \subset D(G(\overline{T}))$. Покажем, что

$$\|(F(\tau) - G(\tau))x\| \le M\tau^{2\nu} \|x\|,$$
$$x \in E, \ \tau \in [0;\overline{T}], \ \nu \in (0;1]. \tag{18}$$

При этом

$$(F(\tau) - G(\tau))x =$$
$$= \int_\Gamma \left\{ \frac{\tau^\nu I_\nu(\tau\sqrt{\lambda})}{\overline{T}^\nu I_\nu(\overline{T}\sqrt{\lambda})} - \left(\frac{\tau}{\overline{T}}\right)^{\nu-\frac{3}{2}} e^{1-\frac{\overline{T}}{\tau}} e^{-(\overline{T}-\tau)\sqrt{\lambda}} \right\} \lambda R(\lambda) x d\lambda =$$
$$= Y_\epsilon + \sum_{i=1}^{3} Y_i,$$

где Y_ϵ и Y_i — интегралы по контурам $\Gamma_\varepsilon, \Gamma_i, i = 1,2,3$ соответственно. Ясно, что $\|Y_\varepsilon\| < M\varepsilon$. Пусть $\lambda \in \Gamma_1$. Используя (3) и (6), имеем

$$\|Y_1\| \le$$
$$\le M \left\| \int_{\Gamma_1} \left\{ \left(\frac{\tau}{\overline{T}}\right)^{2\nu} - \left(\frac{\tau}{\overline{T}}\right)^{\nu-\frac{3}{2}} e^{1-\frac{\overline{T}}{\tau}} e^{-(\overline{T}-\tau)\sqrt{\lambda}} \right\} \lambda(\lambda I - A)^{-1} x d\lambda \right\| \le$$
$$\le M\left(\frac{\tau}{\overline{T}}\right)^{2\nu} \left(\int_0^{1/\overline{T}} \rho d\rho + \left(\frac{\tau}{\overline{T}}\right)^{-\nu-\frac{3}{2}} e^{-\frac{\overline{T}}{\tau}} \int_0^{1/\overline{T}} \rho e^{-(\overline{T}-\tau)\rho} d\rho \right) \|x\| \le$$
$$\le M\tau^{2\nu} \|x\|, \ \nu \in (0;1]. \tag{19}$$

Если $\lambda \in \Gamma_2$, то, применяя (6)—(7), получаем

$$\|Y_2\| \le M \left\| \int_{\Gamma_2} \left\{ \tau^{2\nu} \lambda^{\frac{\nu}{2}+\frac{1}{4}} e^{-\overline{T}\sqrt{\lambda}} - \left(\frac{\tau}{\overline{T}}\right)^{\nu-\frac{3}{2}} e^{1-\frac{\overline{T}}{\tau}} e^{-(\overline{T}-\tau)\sqrt{\lambda}} \right\} \times \right.$$
$$\left. \times \lambda(\lambda I - A)^{-1} x d\lambda \right\| \le$$
$$\le M\tau^{2\nu} \left(\int_{1/\overline{T}}^{1/\tau} \rho^{\nu+\frac{3}{2}} e^{-\overline{T}\rho} d\rho + \tau^{-\nu-\frac{3}{2}} e^{-\frac{\overline{T}}{\tau}} \int_{1/\overline{T}}^{1/\tau} \rho e^{-(\overline{T}-\tau)\rho} d\rho \right) \|x\| \le$$
$$\le M\tau^{2\nu} \left(\int_0^{+\infty} \rho^{\nu+\frac{3}{2}} e^{-\overline{T}\rho} d\rho + \tau^{-\nu-\frac{7}{2}} e^{-\frac{\overline{T}}{\tau}} \int_{\tau/\overline{T}}^{1} e^{(1-\frac{\overline{T}}{\tau})\xi} \xi d\xi \right) \|x\| \le$$
$$\le M\tau^{2\nu} \left(\int_0^{+\infty} \rho^{\nu+\frac{3}{2}} e^{-\overline{T}\rho} d\rho + \int_0^{1} e^{(1-\frac{\overline{T}}{\tau})\xi} d\xi \right) \|x\| \le M\tau^{2\nu} \|x\|,$$
$$\nu \in (0;1]. \tag{20}$$

Здесь $\xi = \tau\rho, d\xi = \tau d\rho$. При $\lambda \in \Gamma_3$, используя (3) и (7), имеем

$$\|Y_3\| \le M \left\| \int_{\Gamma_3} \left\{ \left(\frac{\tau}{\overline{T}}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} (1 + O(\tau, \overline{T}, \lambda)) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \left(\frac{\tau}{\overline{T}}\right)^{\nu-\frac{3}{2}} e^{1-\frac{\overline{T}}{\tau}} \right\} \lambda e^{-(\overline{T}-\tau)\sqrt{\lambda}} (\lambda I - A)^{-1} x d\lambda \right\| \le$$
$$\le M\{\|Y_3'\| + \|Y_3''\|\},$$

где

$$|O(\tau, \overline{T}, \lambda)| = \left| \frac{O_1(|\tau\sqrt{\lambda}|^{-1}) - O_1(|\overline{T}\sqrt{\lambda}|^{-1})}{1 + O_1(|\overline{T}\sqrt{\lambda}|^{-1})} \right| \le$$
$$\le M \frac{\overline{T} - \tau}{\tau |\sqrt{\lambda}|}.$$

Отсюда получаем

$$\|Y_3'\| \le M\tau^{2\nu} \left\{ \left(\frac{\tau}{\overline{T}}\right)^{-\nu-\frac{1}{2}} - \left(\frac{\tau}{\overline{T}}\right)^{-\nu-\frac{3}{2}} e^{1-\frac{\overline{T}}{\tau}} \right\} e^{\frac{1}{2}(1-\frac{\overline{T}}{\tau})} \times$$
$$\times \int_{1/\tau}^{+\infty} \rho e^{-\frac{1}{2}(\overline{T}-\tau)\rho} d\rho \|x\| \le M\tau^{2\nu} \|x\|,$$

поскольку

$$\int_{1/\tau}^{+\infty} \rho e^{-\frac{1}{2}(\overline{T}-\tau)\rho} d\rho \le \int_0^{+\infty} \rho e^{-\frac{1}{2}(\overline{T}-\tau)\rho} d\rho = \frac{4}{(\overline{T}-\tau)^2},$$

а функция

$$f(z) = \frac{z^{-\nu-\frac{1}{2}} - z^{-\nu-\frac{3}{2}} e^{1-\frac{1}{z}}}{(z-1)^2} e^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{z})}, z = \frac{\tau}{\overline{T}} \in [0;1]$$

непрерывна на отрезке $[0;1]$. (Так как $\lim\limits_{z\to 0+} f(z) = 0$ и $\lim\limits_{z\to 1-} f(z) = \frac{1}{2}$, мы полагаем $f(0) = 0$, $f(1) = \frac{1}{2}$.) Далее,

$$\|Y_3''\| \le$$

$$\le M\left(\frac{\tau}{\overline{T}}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} \left\|\int_{\Gamma_3} O(\tau,\overline{T},\lambda)\lambda e^{-(\overline{T}-\tau)\sqrt{\lambda}}(\lambda I - A)^{-1} x d\lambda\right\| \le$$

$$\le M\left(\frac{\tau}{\overline{T}}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} \frac{\overline{T}-\tau}{\tau}\int_{1/\tau}^{+\infty} e^{-(\overline{T}-\tau)\rho} d\rho \,\|x\| \le$$

$$\le M\tau^{2\nu}(\overline{T}-\tau)\int_{1/\tau}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(\overline{T}-\tau)\rho} d\rho \,\|x\| \le$$

$$\le M\tau^{2\nu}(\overline{T}-\tau)\int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(\overline{T}-\tau)\rho} d\rho \,\|x\| \le M\tau^{2\nu}\,\|x\|.$$

Итак,

$$\|Y_3\| \le M\tau^{2\nu}\,\|x\|, \quad \nu\in(0;1]. \tag{21}$$

Из (19)—(21) следует (18). Используя неравенство (21), получим

$$\|(F(\tau)-G(\tau))x\|_{B_{p,\gamma}} \le$$

$$\le M\left(\int_0^{\overline{T}} \tau^{2p\nu+\gamma} d\tau\right)^{1/p} \|x\| \le M\,\|x\|, \quad x\in E. \tag{22}$$

Для сходимости интеграла в (22) необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$$2p\nu + (2p-1)(1-2\nu) > -1,$$

т. е.

$$\nu < \frac{p}{p-1}.$$

Итак, для $p\in(1;+\infty)$ мы имеем $0<\nu\le 1 < \frac{p}{p-1} < \infty$, т. е. получаем требование $\alpha \ge -\frac{1}{2}$. Таким образом, из (22) вытекает, что при любых $\alpha\ge -\frac{1}{2}$, $\tau\in[0;\overline{T}]$ и $p\in(1;+\infty)$ оператор $F(\tau)-G(\tau): E\to B_{p,\gamma}$ ограничен. Следовательно, при этих условиях функция $F(\tau)x$ суммируема в $B_{p,\gamma}$ тогда и только тогда, когда в $B_{p,\gamma}$ суммируема функция $G(\tau)x$. Далее,

$$\|F(\tau)x\|_{B_{p,\gamma}} \le M\,\|x\| + \|G(\tau)x\|_{B_{p,\gamma}} = M\,\|x\| +$$

$$+\left(\int_0^{\overline{T}} \left\|Ae^{-(\overline{T}-\tau)A^{1/2}}x\right\|^p \left(\frac{\tau}{\overline{T}}\right)^{(\nu-\frac{3}{2})p} e^{(1-\frac{\overline{T}}{\tau})p}\tau^{(2p-1)(1-2\nu)}d\tau\right)^{1/p} \le$$

$$\le M\left(\|x\| + \left(\int_0^{\overline{T}} \left\|Ae^{-(\overline{T}-\tau)A^{1/2}}x\right\|^p d\tau\right)^{1/p}\right) =$$

$$= M(\|x\| + \|Ae^{-\tau A^{1/2}}x\|_{\overline{B_p}}) = M\,\|x\|_{E_T},$$

так как последнее выражение обладает свойствами нормы. Здесь $e^{-\tau A^{1/2}}$ есть аналитическая полугруппа, удовлетворяющая C_0-условию (см. [7]). Норма (15) получена. Доказательство полноты E_T тривиально.

Лемма доказана.

Теперь рассмотрим задачу

$$u''(t) - t^{2\alpha}Au(t) = 0, \ \alpha>0, \ t\in[0;T], \tag{23}$$

$$u(0)=u_0, \ u(T)=0. \tag{24}$$

Согласно лемме 1, задача (23)—(24) однозначно разрешима. Если $u_0\in D(A^2)$, ее решение имеет вид (см. [3])

$$u(t) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\nu^\nu}{\Gamma(\nu)}\lambda^{\frac{\nu}{2}}\left\{\sqrt{t}K_\nu(2\nu t^{\frac{1}{2\nu}}\sqrt{\lambda}) - \right.$$
$$\left. -\frac{K_\nu(2\nu T^{\frac{1}{2\nu}}\sqrt{\lambda})}{I_\nu(2\nu T^{\frac{1}{2\nu}}\sqrt{\lambda})}\sqrt{t}I_\nu(2\nu t^{\frac{1}{2\nu}}\sqrt{\lambda})\right\}\times$$
$$\times(\lambda I - A)^{-1}u_0 d\lambda, \ \nu = \frac{1}{2(\alpha+1)}\in(0;1/2). \tag{25}$$

Из определения решения задачи (1)—(2) следует, что

$$\|t^{2\alpha}Au(t)\|_{B_p} = M\left(\int_0^{\overline{T}}\left\|\int_\Gamma \lambda^{\frac{\nu}{2}+1}\left\{\tau^\nu K_\nu(\tau\sqrt{\lambda}) - \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. -\frac{K_\nu(\overline{T}\sqrt{\lambda})}{I_\nu(\overline{T}\sqrt{\lambda})}\tau^\nu I_\nu(\tau\sqrt{\lambda})\right\}R(\lambda)u_0 d\lambda\right\|^p \tau^\gamma d\tau\right)^{1/p} =$$
$$M\left(\int_0^{\overline{T}}\|H(\tau)u_0\|^p\tau^\gamma d\tau\right)^{1/p} = M\,\|H(\tau)u_0\|_{B_{p,\gamma}} < \infty,$$

где $\gamma=(2p-1)(1-2\nu)$, $\overline{T}=2\nu T^{\frac{1}{2\nu}}$, $\tau = 2\nu t^{\frac{1}{2\nu}}$, $\nu=\frac{1}{2(\alpha+1)}\in(0;1/2)$. Через $H(\tau)u_0$ обозначен интеграл по контуру Γ. Оператор $H(\tau), \tau\in(0;\overline{T}]$ ограничен и отображает E в $B_{p,\theta}$. Оператор $H(0)$ неограничен, отображает $D(H(0))$ в $B_{p,\theta}$ и $D(A^2)\subset D(H(0))$. Введем в рассмотрение множество

$$E_0 = \{x : x\in E, \ \|H(\tau)x\|_{B_{p,\gamma}} < \infty\}.$$

Отметим, что E_0 не пусто. Например, $D(A^2)\subset E_0$.

Лемма 3. *Пусть* $\alpha>0, p\in(1;+\infty)$. *Тогда* E_0 *есть банахово пространство с нормой*

$$\|x\|_{E_0} = \|x\| + \|Ae^{-\tau A^{1/2}}x\|_{B_{p,\gamma}}. \tag{26}$$

Доказательство. Рассмотрим оператор

$$G(\tau)x = \int_\Gamma \lambda^{\frac{\nu}{2}+1}\tau^\nu K_\nu(\tau\sqrt{\lambda})(\lambda I - A)^{-1}x d\lambda,$$

$$\nu \in (0;1/2),$$

определенный для всех $x \in E$ при $\tau \in (0;\overline{T}]$ и отображающий E в $B_{p,\theta}$. Оператор $G(0)$ неограничен и отображает $D(G(0))$ в $B_{p,\theta}$, причем $D(A^2) \subset D(G(0))$. Покажем, что

$$\|(H(\tau) - G(\tau))x\| \le M\tau^{2\nu}\|x\|,$$
$$x \in E, \tau \in [0;\overline{T}],\ \nu \in (0;1/2). \tag{27}$$

Разобьем контур Γ на 4 части (16)—(17). Получим

$$(H(\tau) - G(\tau))x = -\int_\Gamma \lambda^{\frac{\nu}{2}+1}\frac{K_\nu(\overline{T}\sqrt{\lambda})}{I_\nu(\overline{T}\sqrt{\lambda})}\tau^\nu I_\nu(\tau\sqrt{\lambda})\times$$
$$\times(\lambda I - A)^{-1}x d\lambda = Z_\epsilon + \sum_{i=1}^{3} Z_i,$$

где Z_ϵ и Z_i — интегралы по соответствующим контурам $\Gamma_\epsilon, \Gamma_i, i = 1,2,3$. Легко видеть, что $\|Z_\epsilon\| < M\epsilon$. Пусть $\lambda \in \Gamma_1, \nu \in (0;1/2)$. Тогда, используя (3) и (6), имеем

$$\|Z_1\| \le M\tau^{2\nu}\left\|\int_{\Gamma_1}\lambda(\lambda I - A)^{-1}x d\lambda\right\| \le$$
$$\le M\tau^{2\nu}\int_0^{1/\overline{T}}\rho d\rho\,\|x\| \le M\tau^{2\nu}\|x\|. \tag{28}$$

Аналогично, используя (3) и (6)—(7) для случая $\lambda \in \Gamma_2$, находим, что

$$\|Z_2\| \le M\tau^{2\nu}\left\|\int_{\Gamma_2}\lambda^{\nu+1}e^{-2\overline{T}\sqrt{\lambda}}(\lambda I - A)^{-1}x d\lambda\right\| \le$$
$$\le M\tau^{2\nu}\int_{1/\overline{T}}^{1/\tau}\rho^{2\nu+1}e^{-2\overline{T}\rho}d\rho\,\|x\| \le \tag{29}$$
$$\le M\tau^{2\nu}\int_0^{+\infty}\rho^{2\nu+1}e^{-2\overline{T}\rho}d\rho\,\|x\| \le M\tau^{2\nu}\|x\|,$$
$$\nu \in (0;1/2).$$

Если $\lambda \in \Gamma_3$, то, применяя (3) и (7), получаем

$$\|Z_3\| \le$$
$$\le M\tau^{\nu-\frac{1}{2}}\left\|\int_{\Gamma_3}\lambda^{\frac{\nu}{2}+\frac{3}{4}}e^{(\tau-2\overline{T})\sqrt{\lambda}}(1+O(\tau,\overline{T},\lambda))(\lambda I - A)^{-1}x d\lambda\right\| \le$$
$$\le M\{\|Z_3'\| + \|Z_3''\|\},$$

где

$$|O(\tau,\overline{T},\lambda)| = \left|\frac{O_1(|\tau\sqrt{\lambda}|^{-1}) - O_1(|\overline{T}\sqrt{\lambda}|^{-1})}{1 + O_1(|\overline{T}\sqrt{\lambda}|^{-1})} +\right.$$
$$\left.+\frac{O_2(|\overline{T}\sqrt{\lambda}|^{-1})(1 + O_1(|\tau\sqrt{\lambda}|^{-1}))}{1 + O_1(|\overline{T}\sqrt{\lambda}|^{-1})}\right| \le$$
$$\le M\frac{\overline{T}-\tau}{\tau|\sqrt{\lambda}|} + \frac{M}{|\sqrt{\lambda}|}\left(1 + \frac{1}{\tau|\sqrt{\lambda}|}\right) \le \frac{M}{\tau|\sqrt{\lambda}|}\left(1 + \frac{1}{|\sqrt{\lambda}|}\right).$$

Имеем

$$\|Z_3'\| \le M\tau^{\nu-\frac{1}{2}}\left\|\int_{\Gamma_3}\lambda^{\frac{\nu}{2}+\frac{3}{4}}e^{(\tau-2\overline{T})\sqrt{\lambda}}(\lambda I - A)^{-1}x d\lambda\right\| \le$$
$$\le M\tau^{\nu-\frac{1}{2}}\int_{1/\tau}^{+\infty}\rho^{\nu+\frac{1}{2}}e^{(\tau-2\overline{T})\rho}d\rho\,\|x\| \le$$
$$\le M\tau^{2\nu}\int_0^{+\infty}\rho^{2\nu+1}e^{-\overline{T}\rho}d\rho\,\|x\| \le M\tau^{2\nu}\|x\|.$$

Далее,

$$\|Z_3''\| \le$$
$$\le M\tau^{\nu-\frac{1}{2}}\left\|\int_{\Gamma_3}\lambda^{\frac{\nu}{2}+\frac{3}{4}}e^{(\tau-2\overline{T})\sqrt{\lambda}}O(\tau,\overline{T},\lambda)(\lambda I - A)^{-1}x d\lambda\right\| \le$$
$$\le M\tau^{\nu-\frac{3}{2}}\int_{1/\tau}^{+\infty}\rho^{\nu-\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{1}{\rho}\right)e^{(\tau-2\overline{T})\rho}d\rho\,\|x\| \le$$
$$\le M\tau^{2\nu}\int_0^{+\infty}\rho^{2\nu}(\rho+1)e^{-\overline{T}\rho}d\rho\,\|x\| \le M\tau^{2\nu}\|x\|.$$

Следовательно,

$$\|Z_3\| \le M\tau^{2\nu}\|x\|,\ \nu \in (0;1/2). \tag{30}$$

Из (28)—(30) получаем (27). Действуя точно так же, как при доказательстве леммы 2, получим, что оператор $H(\tau) - G(\tau) : E \to \to B_{p,\gamma}$ ограничен при $\alpha > 0$, $\tau \in [0;\overline{T}]$, $p \in (1;+\infty)$. Следовательно, при этих условиях функция $H(\tau)x$ суммируема в $B_{p,\gamma}$ тогда и только тогда, когда $G(\tau)x$ суммируема в $B_{p,\gamma}$. Далее,

$$\|H(\tau)x\|_{B_{p,\gamma}} \le M(\|x\| + \|G(\tau)x\|_{B_{p,\gamma}}) = M\|x\|_{E_0},$$

поскольку последнее выражение является нормой.

Пусть $\rho = Re\sqrt{\lambda} > 0$. Разобьем контур Γ на 3 части:

$$\Gamma_\epsilon, \Gamma_1 = \left\{\lambda : \lambda \in \Gamma \setminus \Gamma_\epsilon, \rho \le \frac{1}{\tau}\right\},$$

$$\Gamma_2 = \left\{\lambda : \lambda \in \Gamma \setminus \Gamma_\epsilon, \rho \ge \frac{1}{\tau}\right\}.$$

Для $\lambda \in \Gamma_i, i = 1,2$ имеем $|d\lambda| \le M\rho d\rho$. Если $\lambda \in \Gamma_1$, то $0 \le \tau\rho \le 1$, а при $\lambda \in \Gamma_2$ получаем $\tau\rho \ge 1$. В дальнейшем мы будем использовать уточненную асимптотику $K_\nu(z) \sim 2^{\nu-1}\Gamma(\nu)z^{-\nu}e^{-z}$, $|arg\ z| < \frac{\pi}{2}, \nu > 0$, если $|z| \to 0$ и (7). Пусть

$$Z(\tau)x = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\tau,\lambda)\lambda^{1+\varepsilon}e^{-\tau\sqrt{\lambda}}(\lambda I - A)^{-1}xd\lambda,$$
$$\tau \in [0;\overline{T}],$$

где

$$f(\tau,\lambda) = \begin{cases} 2^{\nu-1}\Gamma(\nu)\lambda^{-\varepsilon}, \lambda \in \Gamma_1 \cup \Gamma_\epsilon, \\ \sqrt{\frac{\pi}{2}}(\tau\sqrt{\lambda})^{\nu-\frac{1}{2}}(1 + O_2(|\tau\sqrt{\lambda}|^{-1}))\lambda^{-\varepsilon}, \lambda \in \Gamma_2, \end{cases}$$

а ε — сколь угодно малое положительное число. Области определения операторов $G(\tau)$ и $Z(\tau)$ совпадают, так как оператор $Z(\tau)$ получен путем асимптотического разложения функции $K_\nu(\tau\sqrt{\lambda})$ в формуле, определяющей оператор $G(\tau)$.

Рассмотрим семейство операторов

$$\Phi_\varepsilon(\tau)x = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\tau,\lambda)(\lambda I - A)^{-1}xd\lambda,$$
$$x \in E,\ \ \tau \in [0;\overline{T}],\ \ \varepsilon \in (0;1/2] \tag{31}$$

и докажем, что

$$\|\Phi_\varepsilon(\tau)x\| \le \frac{M}{\varepsilon}\|x\|,\ \ x \in E,$$
$$\tau \in [0;\overline{T}],\ \ \varepsilon \in (0;1/2]. \tag{32}$$

Разобьем интеграл (31) по контуру Γ на 3 интеграла X_ϵ, X_1 и X_2 по контурам $\Gamma_\varepsilon, \Gamma_1$ и Γ_2 соответственно. Легко установить, что $\|X_\epsilon\| < M\epsilon$. Пусть $\lambda \in \Gamma_1$. Тогда имеем

$$\|X_1\| \le M\left\|\int_{\Gamma_1}\lambda^{-\varepsilon}(\lambda I - A)^{-1}xd\lambda\right\| \le$$
$$\le M\int_0^{1/\tau}\frac{\rho^{1-2\varepsilon}}{\rho^2+1}d\rho\,\|x\| \le M\int_0^{+\infty}\frac{\rho^{1-2\varepsilon}}{\rho^2+1}d\rho\,\|x\| \le \tag{33}$$
$$\le M\left\{\int_0^1\frac{d\rho}{\rho^2+1} + \int_1^{+\infty}\rho^{-1-2\varepsilon}d\rho\right\}\|x\| \le \frac{M}{\varepsilon}\|x\|,$$

поскольку можем взять ε настолько малым, чтобы выполнялось неравенство $1 - 2\varepsilon \ge 0$, т. е. $\varepsilon \in (0;1/2]$. Аналогично, для $\lambda \in \Gamma_2$ получим

$$\|X_2\| \le$$
$$\le M\left\|\int_{\Gamma_2}(\tau\sqrt{\lambda})^{\nu-\frac{1}{2}}(1 + O_2(|\tau\sqrt{\lambda}|^{-1}))\lambda^{-\varepsilon}(\lambda I - A)^{-1}xd\lambda\right\| \le$$
$$\le M\int_{1/\tau}^{+\infty}(\tau\rho)^{\nu-\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{1}{\tau\rho}\right)\frac{\rho^{1-2\varepsilon}}{\rho^2+1}d\rho\,\|x\| \le \tag{34}$$
$$\le M\int_0^{+\infty}\frac{\rho^{1-2\varepsilon}}{\rho^2+1}d\rho\,\|x\| \le \frac{M}{\varepsilon}\|x\|,$$

так как $\nu - \frac{1}{2} < 0$ и

$$\left|O_2(|\tau\sqrt{\lambda}|^{-1})\right| \le \frac{M}{|\tau\sqrt{\lambda}|}.$$

Из (33) и (34) вытекает оценка (32). По построению оператора $Z(\tau)$ и вследствие (32) имеем (см. [14])

$$\|G(\tau)x\|_{B_{p,\gamma}} \le M\|Z(\tau)x\|_{B_{p,\gamma}} =$$
$$= M\left\|\Phi_\varepsilon(\tau)A^{1+\varepsilon}e^{-\tau A^{1/2}}x\right\|_{B_{p,\gamma}} \le$$
$$\le \frac{M}{\varepsilon}\left\|A^{1+\varepsilon}e^{-\tau A^{1/2}}x\right\|_{B_{p,\gamma}}.$$

Следовательно,

$$\|x\|_{E_0} \le M\left(\|x\| + \frac{1}{\varepsilon}\left\|A^{1+\varepsilon}e^{-\tau A^{1/2}}x\right\|_{B_{p,\gamma}}\right),$$
$$\varepsilon \in (0;1/2]. \tag{35}$$

Рассмотрим множество пространств

$$E_\varepsilon = \{x : x \in E, \|x\|_{E_\varepsilon} < \infty\},\ \ \varepsilon \in (0;1/2],$$

где

$$\|x\|_{E_\varepsilon} = \|x\| + \frac{1}{\varepsilon}\left\|A^{1+\varepsilon}e^{-\tau A^{1/2}}x\right\|_{B_{p,\gamma}},$$

и пространство

$$\overline{E_0} = \{x : x \in E,\ \ \|x\|_{\overline{E_0}} < \infty\},$$

где

$$\|x\|_{\overline{E_0}} = \|x\| + \left\|A\,e^{-\tau A^{1/2}}x\right\|_{B_{p,\gamma}}.$$

Легко видеть, что $E_{\varepsilon_1} \subset E_{\varepsilon_2}$, если $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$. Докажем, что $\bigcup_\varepsilon E_\varepsilon = \overline{E_0}, \varepsilon \in (0;1/2]$. Действительно, пусть $x \in \bigcup_\varepsilon E_\varepsilon$, тогда найдется сколь угодно малое фиксированное $\varepsilon_0 \in (0;1/2]$, такое что $x \in E_{\varepsilon_0}$, т. е. $\|A^{1+\varepsilon_0} e^{-\tau A^{1/2}} x\|_{B_{p,\gamma}} < \infty$. Следовательно, $\|A e^{-\tau A^{1/2}} x\|_{B_{p,\gamma}} < \infty$, т. е. $x \in \overline{E_0}$ и $\bigcup\limits_{\varepsilon} E_\varepsilon \subseteq \overline{E_0}$.

Обратно, пусть $x \in \bar{E}_0$, т.е. $\|A e^{-\tau A^{1/2}} x\|_{B_{p,\gamma}} < \infty$. Нетрудно заметить, что

$$\|A^{1+\varepsilon} e^{-\tau A^{1/2}} x - A e^{-\tau A^{1/2}} x\| \to 0, \quad \varepsilon \to 0, \ x \in E, \ \tau \in (0; \bar{T}] \tag{36}$$

в силу свойств аналитической полугруппы $e^{-\tau A^{1/2}}$. Поэтому

$$\begin{gathered} \|A^{1+\varepsilon} e^{-\tau A^{1/2}} x\| \le \\ \le \|A^{1+\varepsilon} e^{-\tau A^{1/2}} x - A e^{-\tau A^{1/2}} x\| + \|A e^{-\tau A^{1/2}} x\| \le \\ \le \varepsilon + \|A e^{-\tau A^{1/2}} x\| = \|g(\tau)\|, \end{gathered} \tag{37}$$

где $g(\tau) \in B_{p,\gamma}$. Из (36) и (37) следует, что

$$\|A^{1+\varepsilon} e^{-\tau A^{1/2}} x - A e^{-\tau A^{1/2}} x\|_{B_{p,\gamma}} \to 0, \ \varepsilon \to 0.$$

Поэтому для достаточно малого фиксированного ε_0 имеем

$$\begin{gathered} \|A^{1+\varepsilon_0} e^{-\tau A^{1/2}} x\|_{B_{p,\gamma}} \le \\ \le \|A^{1+\varepsilon_0} e^{-\tau A^{1/2}} x - A e^{-\tau A^{1/2}} x\|_{B_{p,\gamma}} + \|A e^{-\tau A^{1/2}} x\|_{B_{p,\gamma}} < \infty, \end{gathered}$$

т. е. $x \in E_{\varepsilon_0}$. Следовательно, $x \in \bigcup\limits_{\varepsilon} E_\varepsilon$ и $\overline{E_0} \subseteq \bigcup\limits_{\varepsilon} E_\varepsilon$. Итак, $\overline{E_0} = \bigcup\limits_{\varepsilon} E_\varepsilon, \varepsilon \in (0;1/2]$. Поэтому в силу (35) $E_0 \supseteq \bigcup\limits_{\varepsilon} E_\varepsilon = \overline{E_0}$.

Так как $f(\tau, \lambda) \to 0$ при $|\lambda| \to \infty$ и $f(\tau, \lambda) \ne 0$ при $\alpha > 0$ на спектре оператора A, то для всякого фиксированного $\varepsilon \in (0;1/2]$ оператор $\Phi_\varepsilon(\tau)$ имеет обратный $\Phi_\varepsilon^{-1}(\tau)$, $\tau \in [0; \bar{T}]$ (см. [14]). Поэтому для всякого $x \in E$, $x \ne 0$ и $\tau \in [0; \bar{T}]$ найдется такое $\delta \in (0;1]$, что $\delta \|x\| \le \|\Phi_\varepsilon(\tau) x\|$, и по построению оператора $Z(\tau)$ имеем

$$\begin{gathered} \|G(\tau)x\|_{B_{p,\gamma}} \ge M \|Z(\tau)x\|_{B_{p,\gamma}} = \\ = M \|\Phi_\varepsilon(\tau) A^{1+\varepsilon} e^{-\tau A^{1/2}} x\|_{B_{p,\gamma}} \ge \\ \ge M\delta \|A^{1+\varepsilon} e^{-\tau A^{1/2}} x\|_{B_{p,\gamma}} \ge \\ \ge M\varepsilon_0 \|A^{1+\varepsilon_0} e^{-\tau A^{1/2}} x\|_{B_{p,\gamma}}, \ \varepsilon_0 = \min\{\delta, \varepsilon\}. \end{gathered} \tag{38}$$

Рассмотрим множество пространств

$$E'_\varepsilon = \{x : x \in E, \|x\|_{E'_\varepsilon} < \infty\}, \ \varepsilon \in (0;1/2],$$

где

$$\|x\|_{E'_\varepsilon} = \|x\| + \varepsilon \|A^{1+\varepsilon} e^{-\tau A^{1/2}} x\|_{B_{p,\gamma}}.$$

Ясно, что $E'_{\varepsilon_1} \subset E'_{\varepsilon_2}$ при $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$. Действуя по аналогии, докажем, что $\bigcup\limits_{\varepsilon} E'_\varepsilon = \overline{E_0}$, $\varepsilon \in (0;1/2]$. Из (38) следует, что $E_0 \subseteq \bigcup\limits_{\varepsilon} E'_\varepsilon = \overline{E_0}$. Поэтому $\bar{E}_0 = E_0$ и норма (26) получена. Полнота E_0 доказывается элементарно.

Лемма доказана.

Заметим, что для $\alpha > 0$ в пространстве E_0 можно ввести норму

$$\|x\|'_{E_0} = \|x\| + \|A^{\frac{\nu}{2}+\frac{3}{4}} e^{-\tau A^{1/2}} x\|_{B_{p,\delta}}, \ \delta = (\tfrac{3}{2} p - 1)(1 - 2\nu),$$

эквивалентную норме (26). Доказательство этого утверждения проводится аналогично. При $\nu = 1/2$, т.е. для $\alpha = 0$, обе нормы совпадают с соответствующей нормой для невырожденной задачи (1)—(2).

Лемма 4. *Пусть* $p \in (1; +\infty)$. *Если* $\alpha > 0$, *то* $D(A^\beta), \beta > \nu(2 - \frac{1}{p})$ *всюду плотно в* E_0. *При* $\alpha \ge -\frac{1}{2}$ $D(A^\beta), \beta > 1 - \frac{1}{2p}$ *всюду плотно в* E_T.

Доказательство. Рассмотрим пространство E_0 и найдем нижнюю границу для $\beta > 0$, такую что $D(A^\beta) \subset E_0$. Для этого воспользуемся свойствами аналитической полугруппы $e^{-\tau A^{1/2}}$. Пусть $x \in D(A^\beta)$, тогда имеем

$$\begin{gathered} \|A e^{-\tau A^{1/2}} x\|_{B_{p,\gamma}} = \|A^{1-\beta} e^{-\tau A^{1/2}} A^\beta x\|_{B_{p,\gamma}} \le \\ \le M \left(\int_0^{\bar{T}} \tau^{2p(\beta-1)+(2p-1)(1-2\nu)} d\tau \right)^{1/p} \|A^\beta x\| \le M \|A^\beta x\| < \infty, \end{gathered}$$

если

$$(2p-1)(1-2\nu) - 2p + 2p\beta > -1,$$

т. е.

$$\beta > 2\nu - \frac{\nu}{p}.$$

Итак, для любого $\beta > \nu(2 - \frac{1}{p})$, где $\nu \in (0;1/2)$ и $p \in (1; +\infty)$, $D(A^\beta) \subset E_0$.

Пусть $x \in E_0$. Сначала докажем, что $D(A^\beta)$ всюду плотно в E_0 для любых $\beta \in N$. Рассмотрим последовательность $x_n = n^m (nI + A)^{-m} x$, $m \in N$ и фиксировано. Ясно, что $x_n \in D(A^m) \subset E_0$, поскольку $\{-n\}, n \in N$ — последовательность регулярных точек согласно (3), и $\|x_n - x\| \to 0, n \to \infty$. Функции $A e^{-\tau A^{1/2}} x_n$ и $A e^{-\tau A^{1/2}} x$ существуют и принадлежат $B_{p,\gamma}$. Оператор $A e^{-\tau A^{1/2}}$ равномерно ограничен на любом отрезке $[\delta; \bar{T}], 0 < \delta < \bar{T}$, поэтому

$$\left\|Ae^{-\tau A^{1/2}}x_n - Ae^{-\tau A^{1/2}}x\right\| \to 0, n\to\infty, \tau\in(0;\bar{T}]. \quad (39)$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $N_0 > 0$, такое, что для всех $n > N_0$

$$\left\|Ae^{-\tau A^{1/2}}x_n\right\| \le \varepsilon + \left\|Ae^{-\tau A^{1/2}}x\right\| = \|g(\tau)\|, \quad g(\tau)\in B_{p,\gamma}. \quad (40)$$

Из (39) и (40) следует, что

$$\left\|Ae^{-\tau A^{1/2}}x_n - Ae^{-\tau A^{1/2}}x\right\|_{B_{p,\gamma}} \to 0, n\to\infty, m\in N.$$

Поэтому $\|x_n - x\|_{E_0} \to 0, n\to\infty$. Так как $\nu(2-\frac{1}{p}) < 1$ при $\nu\in(0;1/2)$, $p\in(1;+\infty)$ и $D(A^{\delta_1})\subset D(A^{\delta_2})$ при $\delta_1 > \delta_2$ (см. [7]), то из доказанного следует, что $D(A^{\beta})$ всюду плотно в E_0 для любых $\beta > \nu(2-\frac{1}{p})$. Второе утверждение леммы доказывается аналогично.

Лемма доказана.

КОЭРЦИТИВНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ ОДНОРОДНОЙ ЗАДАЧИ

Установленные выше леммы позволяют доказать коэрцитивную разрешимость задачи (1)—(2). Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть* $\alpha > 0, p\in(1;+\infty)$. *Задача (23)—(24) однозначно разрешима в пространстве* B_p *тогда и только тогда, когда* $u_0\in E_0$, *причем*

$$\|u''(t)\|_{B_p} + \left\|t^{2\alpha}Au(t)\right\|_{B_p} \le M\|u_0\|_{E_0}. \quad (41)$$

Доказательство. Вначале докажем однозначную разрешимость задачи (23)—(24) в B_p для любого $u_0\in E_0$. Так как $D(A^2)$ плотно в E_0 согласно лемме 4, то для всякого $u_0\in E_0$ найдется последовательность $\{u_n\}\in D(A^2)$, такая что $\|u_n - u_0\|_{E_0}\to 0,\ n\to\infty$.

Рассмотрим последовательность краевых задач

$$u_n''(t) - t^{2\alpha}Au_n(t) = 0,\ \ \alpha > 0,\ \ t\in[0;T], \quad (42)$$

$$u_n(0) = u_n,\ \ u_n(T) = 0, \quad (43)$$

их решений (см. (25))

$$u_n(t) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\nu^\nu}{\Gamma(\nu)}\lambda^{\frac{\nu}{2}}\left\{\sqrt{t}K_\nu(2\nu t^{\frac{1}{2\nu}}\sqrt{\lambda}) - \frac{K_\nu(2\nu T^{\frac{1}{2\nu}}\sqrt{\lambda})}{I_\nu(2\nu T^{\frac{1}{2\nu}}\sqrt{\lambda})}\sqrt{t}I_\nu(2\nu t^{\frac{1}{2\nu}}\sqrt{\lambda})\right\}(\lambda I - A)^{-1}u_n d\lambda$$

и соответствующих неравенств (см. определение E_0 и лемму 3)

$$\left\|t^{2\alpha}Au_n(t)\right\|_{B_p} \le M\|u_n\|_{E_0}. \quad (44)$$

Покажем, что функция $u(t)$, определяемая формулой (25), есть решение задачи (23)—(24) при каждом $u_0\in E_0$. Действуя так же, как при доказательстве леммы 3, получим, что

$$\|u(t)\|_{B_p} \le M\|u_0\|, u_0\in E.$$

Следовательно, для любого $u_0\in E$ определена функция $u(t)\in B_p$, причем

$$\|u_n(t) - u(t)\|_{B_p} \le M\|u_n - u_0\| \to 0,\ \ n\to\infty, \quad (45)$$

поскольку из сходимости по норме E_0 вытекает сходимость по норме *E*. Значит, найдется подпоследовательность $\{u_{n_k}(t)\}\in B_p$, такая что $u_{n_k}(t)\to u(t)$ почти всюду на отрезке $[0;T]$. В частности, $u(0) = \lim_{k\to\infty}u_{n_k}(0) = \lim_{k\to\infty}u_{n_k} = u_0$ и $u(T) = \lim_{k\to\infty}u_{n_k}(T) = 0$. Итак, $u(t)$ определена и удовлетворяет краевым условиям (24) для любого $u_0\in E_0$.

Для того, чтобы выполнить предельный переход в (42), достаточно доказать, что последовательность $\{u_n''(t)\}$ фундаментальна в B_p и

$$\left\|t^{2\alpha}Au_n(t) - t^{2\alpha}Au(t)\right\|_{B_p} \to 0,\ \ n\to\infty. \quad (46)$$

Докажем, что эти утверждения действительно имеют место. Подставляя в (46) $u_n(t)$ и $u(t)$ и затем выполняя замену переменной $\tau = 2\nu t^{\frac{1}{2\nu}}$, получаем, что

$$\left\|t^{2\alpha}Au_n(t) - t^{2\alpha}Au(t)\right\|_{B_p} \le$$

$$\le M\left\|t^{\frac{1}{\nu}-2}\int_\Gamma \lambda^{\frac{\nu}{2}+1}\left\{\sqrt{t}K_\nu(2\nu t^{\frac{1}{2\nu}}\sqrt{\lambda}) - \frac{K_\nu(2\nu T^{\frac{1}{2\nu}}\sqrt{\lambda})}{I_\nu(2\nu T^{\frac{1}{2\nu}}\sqrt{\lambda})}\sqrt{t}I_\nu(2\nu t^{\frac{1}{2\nu}}\sqrt{\lambda})\right\}\times (\lambda I - A)^{-1}(u_n - u_0)d\lambda\right\|_{B_p} \le$$

$$\le M\|u_n - u_0\|_{E_0} \to 0, n\to\infty$$

согласно определению пространства E_0 и лемме 3. Рассмотрим задачу

$$(u_n(t) - u_m(t))'' - t^{2\alpha}A(u_n(t) - u_m(t)) = 0,$$

$$\alpha > 0,\ \ t\in[0;T],$$

$$u_n(0) - u_m(0) = u_n - u_m,\ \ u_n(T) - u_m(T) = 0.$$

В силу линейности этой задачи, ее решением будет функция $u_n(t) - u_m(t)$. Используя (42) и (44), получим, что

$$\|u_n''(t) - u_m''(t)\|_{B_p} \le M \|u_n - u_m\|_{E_0} \to 0; \quad n, m \to \infty. \tag{47}$$

Из (45) и (47), по определению пространства Соболева мы получаем, что $u(t) \in W_p^2([0;T], E)$. Осуществив предельный переход в (42), видим, что $u(t)$ есть решение (23) при любом $u_0 \in E_0$. То, что неравенство (41) выполняется для каждого $u_0 \in E_0$, легко доказать путем предельного перехода в (44), опираясь на (46) и определение последовательности $\{u_n\}$.

Обратно, пусть $u_0 \in E$ задано и $u(t)$ есть единственное решение задачи (23)—(24) с таким u_0. Покажем, что тогда $u_0 \in E_0$. Рассмотрим функцию

$$S(t)u_0 = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\nu^\nu}{\Gamma(\nu)}\lambda^{\frac{\nu}{2}}\left\{\sqrt{t}K_\nu(2\nu t^{\frac{1}{2\nu}}\sqrt{\lambda}) - \right.$$
$$\left. - \frac{K_\nu(2\nu T^{\frac{1}{2\nu}}\sqrt{\lambda})}{I_\nu(2\nu T^{\frac{1}{2\nu}}\sqrt{\lambda})}\sqrt{t}I_\nu(2\nu t^{\frac{1}{2\nu}}\sqrt{\lambda})\right\}\times$$
$$\times(\lambda I - A)^{-1}u_0 d\lambda, \ t \in [0;T],$$

определенную для любых $u_0 \in E$. Пусть $\varphi(t) = R^2(\lambda)(u(t) - S(t)u_0)$, $t \in [0;T]$, λ — регулярная точка. Покажем, что функция $\varphi(t)$ есть решение задачи

$$u''(t) - t^{2\alpha}Au(t) = 0, \ \alpha > 0, \ t \in [0;T], \tag{48}$$

$$u(0) = 0, \ u(T) = 0. \tag{49}$$

Действительно, мы имеем $\varphi(0) = 0$, так как $u(0) = u_0$ согласно (24), $S(0)R^2(\lambda)u_0 = R^2(\lambda)u_0$, т.к. $R^2(\lambda)u_0 \in D(A^2)$, и оператор-функции $S(t)$ и $R^2(\lambda)$ коммутируют. Аналогично находим, что $\varphi(T) = 0$. Функция $u(t)$ есть решение уравнения (48) по условию. $S(t)R^2(\lambda)u_0$ также есть решение (48), поскольку $R^2(\lambda)u_0 \in D(A^2)$ (см. [3]). В силу линейности уравнения (48) функция $\varphi(t)$ удовлетворяет ему.

Задача (48)—(49) имеет тривиальное решение $u(t) = 0$. В силу единственности ее решения согласно лемме 1, $\varphi(t) = 0, t \in [0;T]$. Так как оператор $R^2(\lambda)$ обратим, $u(t) = S(t)u_0$.

Из определения решения вытекает, что $\|t^{2\alpha}Au(t)\|_{B_p} < \infty$. Подставляя сюда (25) и осуществляя замену переменной $\tau = 2\nu t^{\frac{1}{2\nu}}$, получим, что $\|H(\tau)u_0\|_{B_{p,\gamma}} < \infty$, $\gamma = (2p-1)(1-2\nu)$, а это и означает, что $u_0 \in E_0$ согласно определению E_0.

Теорема доказана.

Для задачи (13)—(14) имеет место теорема, аналогичная теореме 1.

Теорема 2. *Пусть* $\alpha \ge -\frac{1}{2}, p \in (1;+\infty)$. *Задача (13)—(14) однозначно разрешима в пространстве* B_p *тогда и только тогда, когда* $u_T \in E_T$, *причем*

$$\|u''(t)\|_{B_p} + \|t^{2\alpha}Au(t)\|_{B_p} \le M\|u_T\|_{E_T}.$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1. Из теорем 1 и 2 вытекает следующее заключительное утверждение.

Теорема 3. *Пусть* $\alpha > 0, p \in (1;+\infty)$. *Задача (1)—(2) однозначно разрешима в пространстве* B_p *тогда и только тогда, когда* $u_0 \in E_0, u_T \in E_T$, *причем*

$$\|u''(t)\|_{B_p} + \|t^{2\alpha}Au(t)\|_{B_p} \le M\{\|u_0\|_{E_0} + \|u_T\|_{E_T}\}.$$

Таким образом, получена коэрцитивная разрешимость задачи (1)—(2) в $B_p, p \in (1;+\infty)$ согласно определению 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Афанасьев С. Н.* Коэрцитивная разрешимость вырождающейся краевой задачи // Воронежская зимняя математическая школа, Воронеж, 24—28 января 2004 г.: Тез. докл. — ВЗМШ-2004.

2. *Афанасьев С. Н.* Коэрцитивная разрешимость абстрактной вырождающейся краевой задачи // Вестник Воронеж. гос. ун-та, сер. «физика, математика», № 2, 2002.

3. *Афанасьев С. Н.* О разрешимости одной абстрактной вырождающейся краевой задачи // Труды матем. ф-та Воронеж. гос. ун-та, вып. 7, Воронеж, 2002.

4. *Голдстейн Дж.* Полугруппы линейных операторов и их приложения. — Киев: Выща школа, 1989.

5. *Киприянов И. А.* Сингулярные эллиптические краевые задачи. — М.: Наука, Физматлит, 1997.

6. *Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. — М.: Наука, 1966.

7. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967.

8. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. — М.: Наука, 1973.

9. *Лебедев Н. Н.* Специальные функции и их приложения. — М.: Гостехиздат, 1963.

10. *Орлов В. П.* Коэрцитивная разрешимость слабо вырождающихся дифференциальных уравнений с неограниченным операторным коэффициентом // Известия вузов. Математика, Т. 418, № 3, 1997.

11. *Орлов В. П.* Слабо вырождающиеся дифференциальные уравнения с неограниченным операторным коэффициентом // Известия вузов. Математика, Т. 416, № 1, 1997.

12. *Орлов В. П., Соболевский П. Е.* О резольвенте вырождающегося оператора в банаховом пространстве // Диффер. ур-я, Т. 11, № 5, 1975.

13. *Пугачев В. С.* Лекции по функциональному анализу. — М.: Изд-во МАИ, 1996.

14. Функциональный анализ под общ. ред. С. Г. Крейна. — М.: Наука, 1972.

15. *Favini A.* Su un'equazione astratta di tipo ellittico-iperbolico // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, V. 55, 1976.

16. *Favini A., Yagi A.* Degenerate differential equations in Banach spaces. — Marcel Dekker Inc., New York − Basel − Hong Kong, 1999.