ВЕСТНИК ВГУ, Серия физика, математика, 2003, № 2

УДК 517.988

УСЛОВИЯ КОНЕЧНОЙ v-ОПРЕДЕЛЕННОСТИ ОТОБРАЖЕНИЯ ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛОВ В ОСОБОЙ ТОЧКЕ

 В. Р. Зачепа

Воронежский государственный педагогический университет

Известно, что исследование геометрии интегральных кривых динамической системы существенно упрощается при наличии первых интегралов. В этой связи весьма актуальна задача описания топологической структуры совместных уровней первых интегралов.

Статья посвящена выяснению условий, при которых топологическое строение совместного уровня вблизи особой точки определяется конечной струей интегрального отображения в этой точке.

Хорошо известно, что исследование геометрии интегральных кривых динамической системы и движений изображающих точек вдоль интегральных кривых существенно упрощается при наличии первых интегралов. В этой связи весьма актуальна задача об описании топологической структуры совместных уровней первых интегралов.

В последние десятилетия появилось много весьма выдающихся достижений по изучению регулярных совместных уровней первых интегралов (прообразов отображений моментов) в теории интегрируемых гамильтоновых систем (см., например, [1]—[3], [4]). Основной инструмент изучения топологии прообраза отображения моментов в этой теории — специальная версия [1] теории Морса, позволяющая прослеживать метаморфозы прообраза точки пространства значений отображения моментов при трансверсальном пересечении (движущейся) точкой одного из максимальных стратов бифуркационного множества (множества сингулярных значений).

Вместе с тем следует признать, что в целом задача описания топологической структуры совместных уровней интегралов все еще далека от своего окончательного решения. Наболее трудная часть этой задачи — описания таких множеств при наличии в них особых точек.

Статья посвящена выяснению условий, при которых топологическое строение совместного уровня вблизи особой точки определяется конечной струей интегрального отображения в этой точке.

1. ЛОКАЛЬНАЯ КОНОИДНОСТЬ МНОЖЕСТВА НУЛЕЙ В ТОЧКЕ V-РЕГУЛЯРНОГО ВЕТВЛЕНИЯ

Пусть задана динамическая система, описываемая дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = X(x), x \in \mathbf{R}^n, \tag{1}$$

обладающая интегралами $\theta_j(x), j = 1, \ldots, m$ ($n > m$). Отображение

$$\begin{gathered}\theta : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^m, \\ \theta(x) = (\theta_1(x), \theta_2(x), \ldots, \theta_m(x))^\top,\end{gathered} \tag{2}$$

будем называть *отображением первых интегралов* или, более кратко, *интегральным отображением* [4].

В случае регулярного значения c прообраз

$$M_c := \theta^{-1}(c), \;\; c \in \mathbf{R}^m$$

является $(n-m)$-мерным многообразием, инвариантным относительно динамической системы (1). Изучение топологической структуры M_c представляет интерес как для выяснения деталей фазового портрета динамической системы, так и для изучения характера отдельных интегральных кривых. Геометрическое строение M_c в случае сингулярного значения c тесно связано с геометрической структурой ближайших регулярных уровней и поэтому выяснение его структуры представляет самостоятельный интерес. Как уже было отмечено, в общем случае данная задача является весьма непростой.

Строение особых прообразов интегрального отображения можно считать хорошо изученными (вблизи особых точек) в случаях одномерного вырождения (падения ранга матрицы Якоби на единицу), сводимых к лемме Морса или к теоремам о конечной определенности гладкой функций в конечнократной особой точке [13], и в случае невырожденности квадратичного дифференциала Портеуса (квадратичной части уравнения разветвления, полученной исключением из уравнения $\theta(x)=0$ регулярных переменных). Последнее утверждение, вытекающее из теоремы Бухнера–Марсдена–Шехтера [23], [10], [11], допускает естественное обобщение на случай невырожденных однородных и квазиоднородных отображений [9].

Отметим, что динамические системы с квадратичными первыми интегралами изучались в работах Пенлеве, Леви–Чевиты, Ди Пиро, а с интегралами более высоких степеней — в работах Вебера, С. Ковалевской и Гарнье (см., например, [5] и литературу в этом источнике).

Точная формулировка обсуждаемой ниже проблемы состоит из двух частей:

1) определяемость топологической структуры ростка множества нулей интегрального отображения в особой точке струей отображения конечного порядка,

2) устойчивость топологической структуры ростка множества нулей отображения интегралов (в особой точке) относительно возмущений высокого порядка малости.

В дальнейшем важную роль играет понятие *V-регулярного ветвления*, выделяющее простейший класс отображений, для которого можно дать решение двух сформулированных проблем. Ростки прообразов этого класса устроены в особых точках как конусы над гладкими компактными многообразиями [6]—[10].

Пусть θ — гладкое отображение $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, $n>m$, и пусть $\theta(0)=0$. Величину $n-m$ (перепад размерности) обозначим p. Предположим, что начало координат — особая точка, то есть

$$rk\,\frac{\partial\theta}{\partial x}(0)<m \text{ или } dimKer\,\frac{\partial\theta}{\partial x}(0)>p.$$

Определение 1. *Пусть U — ограниченная окрестность нуля в пространстве $\mathbf{R}^n$ и пусть $V(x)$ — неотрицательная C^r-функция, определенная на замыкании $\bar U$, для которой $V(0)=0$.*

Начало координат в $\mathbf{R}^n$ называется точкой V-регулярного ветвления нулей отображения θ на U, если для каждого нуля $x_0\in\bar U\setminus 0$ отображения θ выполнено равенство:

$$\dim\left(Ker\,\frac{\partial\theta}{\partial x}(x_0)\bigcap Ker\,\frac{\partial V}{\partial x}(x_0)\right)=n-m-1.$$

Функция V называется при этом выстилающей на U для θ.

Смысл этого определения позволяет выяснить следующее утверждение.

Предложение 1. *Начало координат в $\mathbf{R}^n$ является точкой V-регулярного ветвления нулей θ на U тогда и только тогда, когда выполнены следующие два условия: 1) уравнение $\theta(x)=0$ регулярно в $\bar U\setminus 0$ (то есть точка 0 является регулярным значением отображения $\theta\,|_{\bar U\setminus 0}$), 2) функция $V:\bar U\bigcap\theta^{-1}(0)\setminus 0\to\mathbf{R}$ является регулярной (не имеющей критических точек).*

Доказательство. Рассмотрим надстроечное отображение

$$(\theta,V):\bar U\subset\mathbf{R}^n\longrightarrow\mathbf{R}^m\times\mathbf{R}^1,$$

полученное приписыванием к $\theta(x)$ компоненты $V(x)$:

$$(\theta,V)(x)=(\theta(x),V(x)).$$

Легко увидеть, что

$$Ker\,\frac{\partial(\theta,V)}{\partial x}(x_0)=Ker\,\frac{\partial\theta}{\partial x}(x_0)\bigcap Ker\,\frac{\partial V}{\partial x}(x_0)$$

и

$$\dim Ker\,\frac{\partial(\theta,V)}{\partial x}(x_0)=\dim Ker\,\frac{\partial\theta}{\partial x}(x_0)-1$$

при $x_0\in\theta^{-1}(0)\setminus 0$. Следовательно, уравнение $\theta(x)=0$ имеет в нуле V-регулярное ветвление тогда и только тогда, когда

$$\dim Coker\,\frac{\partial(\theta,V)}{\partial x}(x_0)=0$$

для всех $x_0\in\theta^{-1}(0)\setminus 0$. Последнее эквивалентно выполнению условий 1) — 2).

Лемма 1. *Пусть 0 является точкой V-регулярного ветвления решений уравнения $\theta(x)=0$. Тогда выполнены следующие соотношения: 1) $V(x)>0\ \ \forall x\in\theta^{-1}(0)\setminus 0$, 2) существует такая константа $c_0>0$, что $V(x)>c_0$ для каждой точки $x\in\theta^{-1}(0)\bigcap\partial U$, где ∂U — граница области U.*

Доказательство. Вследствие второго утверждения предложения 1 неотрицательная функция V не может достигать на множестве $\theta^{-1}(0)\setminus 0$ своего минимального значения. Следовательно, $V(x)>0$ для $x\in\theta^{-1}(0)\setminus 0$. Второе утверждение следует из непрерывности $V(x)$ и компактности множества $\theta^{-1}(0)\bigcap\partial U$ (вследствие ограниченности $\bar{U}$).

Формулируемая ниже теорема и ее следствие позволяют выяснить локальную структуру множества решений уравнения, имеющего V-регулярное ветвление в нуле. Оказывается, что локально множество решений такого уравнения гомеоморфно конусу. Более того, гомеоморфизм можно выбрать так, что после отбрасывания нуля он диффеоморфно действует на свой образ (на конус без вершины).

Предложение 2. *Пусть для уравнения $\theta(x)=0$ в нуле выполняется условие V-регулярного ветвления. Тогда росток множества $\theta^{-1}(0)\setminus 0$ диффеоморфен ростку $M_V\times(0,c_0]$, где M_V — $(p-1)$-мерное компактное многообразие без края, а $(0,c_0]$ — полуинтервал вещественной прямой.*

Доказательство. Рассмотрим окрестность нуля

$$U_V=\{x\in U\mid V(x)<c_0\}.$$

Так как отображение

$$V:(\theta^{-1}(0)\setminus 0)\cap\bar{U}_V\longrightarrow(0,c_0]$$

регулярно и собственно (последнее следует из того, что $V^{-1}(0)=0$), то оно задает расслоение над стягиваемой базой $(0,c_0]$. Следовательно, существует тривиализующий диффеоморфизм

$$h_V:(\theta^{-1}(0)\setminus 0)\cap\bar{U}_V\longrightarrow M_V\times(0,c_0].$$

Стандартный слой M_V представляет собой пересечение множества нулей отображения θ с (какой-нибудь) фиксированной поверхностью уровня функции V:

$$M_V=\theta^{-1}(0)\cap V^{-1}(c),\quad c\in(0,c_0].$$

Следствие 1. *Росток множества решений уравнения $\theta(x)=0$ в нуле гомеоморфен ростку*

$$cone\ M_V\cong(M_V\times[0,c_0])/M_V\times\{0\}$$

(ростку конуса над M_V в его вершине).

Доказательство. Согласно лемме, имеем

$$V^{-1}(0)\cap\theta^{-1}(0)=0.$$

Следовательно, рассмотренный выше диффеоморфизм

$$h_V:(\theta^{-1}(0)\setminus 0)\cap\bar{U}_V\to M_V\times(0,c_0]$$

продолжается до гомеоморфизма

$$\theta^{-1}(0)\cap\bar{U}_V\longrightarrow cone\,M_V.$$

Таким образом, установлено, что множество нулей отображения θ, имеющего в нуле V-регулярное ветвление, локально гомеоморфно конусу над многообразием уровня $M_V=\theta^{-1}(0)\bigcap V^{-1}(c)$.

Если рассмотреть множество решений уравнения $\theta(x)=0$ без точки $x=0$, то гомеоморфизм становится диффеоморфизмом (на $M_V\times(0,c_0]$).

Таким образом, множество решений уравнения, имеющего V-регулярное ветвление в нуле, можно запараметризовать значениями функции V.

Предложение 3. *Росток множества решений уравнения $\theta(x)=0$, имеющего V-регулярное ветвление в нуле, представляет собой объединение непересекающихся непрерывно зависящих от одномерного параметра c (и гладких при $c\neq 0$) ветвей многообразий.*

Доказательство. Рассмотрим диффеоморфизм

$$h_V^{-1}:M_V\times(0,c_0]\longrightarrow(\theta^{-1}(0)\setminus 0)\cap\bar{U}_V.$$

Для любой точки x_0 из стандартного слоя M_V диффеоморфизм h_V^{-1} определяет гладкую ветвь в $\theta^{-1}(0)\setminus 0$:

$$x_0(c)=h_V^{-1}(x_0\times c),$$

$c\in(0,c_0]$, $x_0(c_0)=x_0$. Так как h_V^{-1} продолжается до гомеоморфизма

$$cone\,M_V\longrightarrow\theta^{-1}(0)\cap\bar{U}_V,$$

то, положив $x_0(0)=0$, получим непрерывную ветвь множества $\theta^{-1}(0)$.

В практических задачах часто требуется найти решения, зависящие от многомерного параметра. Если ввести соответствующим образом понятие V-регулярного ветвления решений уравнения для случая отображения V, то множество решений такого уравнения будет семейством многомерных ветвей.

Обозначим через $\mathcal{M}$ фактормножество $Man^r_{p-1}/Diff^r$ (по отношению C^r-диффеоморфности множества компактных C^r-многообразий размерности $p-1$ без края). Уравнению $\theta(x)=0$, имеющему в нуле V-регулярное ветвление, соответствует при любом $c\in(0,c_0]$ элемент

$$[\theta^{-1}(0)\bigcap V^{-1}(c)]\in\mathcal{M},$$

который назовем *индексом ветвления* этого уравнения и обозначим $\mathcal{X}_V(\theta)$. Согласно предыдущим результатам, индекс ветвления определен корректно, то есть не зависит от выбора $c \in (0, c_0]$. В следующей теореме указываются случаи инвариантности индекса ветвления относительно выбора функционала V.

Предложение 4. *Пусть уравнение $\theta(x) = 0$ имеет в нуле V-регулярное и, одновременно, W-регулярное ветвления. Тогда $\mathcal{X}_V(\theta) = \mathcal{X}_W(\theta)$ в следующих случаях: 1) $n - m = 1, 2, 3$; 2) $n - m \geq 6$ и класс $\mathcal{X}_V(\theta)$ состоит из односвязных многообразий.*

Доказательство в случае 1) элементарно, а в случае 2) следует из известной теоремы об h-кобордизме [21].

Во многих работах по теории ветвления определяющую роль играет понятие простоты малых решений. Существует тесная связь между регулярно ветвящимися и простыми решениями.

Рассмотрим уравнение

$$\theta(x, y) = 0, \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad y \in \mathbf{R}^1, \quad \theta(0, 0) = 0, \tag{3}$$

для которого $x = x(y)$ — ветвь простых малых решений: $x(0) = 0$, $x(y)$ непрерывно зависит от y и оператор $\frac{\partial\theta}{\partial x}(x(y), y)$ при малых ненулевых y является эпиморфизмом.

Теорема 1. *Уравнение $\theta(x) = 0$ имеет в нуле y^2-регулярное ветвление тогда и только тогда, когда росток множества решений уравнения (3) параметризуется переменной y и все малые решения $x(y)$ являются простыми.*

Доказательство. Пусть уравнение (3) имеет в нуле y^2-регулярное ветвление. Тогда отображение

$$(\theta(x, y), y^2) : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^1 \longrightarrow \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^1$$

регулярно в точках $\theta^{-1}(0) \setminus 0$ при $y \neq 0$ и росток множества решений уравнения (3) параметризуется переменной y^2, и, следовательно, и переменной y. Пусть $x(y)$ — малое решение уравнения. Тогда оператор

$$\frac{\partial(\theta(x(y), y), y^2)}{\partial(x, y)} : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^1 \longrightarrow \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^1$$

является эпиморфизмом (при $y \neq 0$). После представления этого оператора в матричном виде

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial\theta}{\partial x}(x(y), y) & \frac{\partial\theta}{\partial y}(x(y), y) \\ 0 & 2y \end{pmatrix}$$

нетрудно установить, что компонента

$$\frac{\partial\theta}{\partial x}(x(y), y) : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^m$$

также является эпиморфизмом при $y \neq 0$. Следовательно, решение $x(y)$ является простым.

Пусть теперь все малые решения $x(y)$ уравнения (1) являются простыми. То есть, оператор $\frac{\partial\theta}{\partial x}(x(y), y)$ является эпиморфизмом при $y \neq 0$. Тогда рассуждениями, аналогичными проведенным выше, нетрудно установить, что отображение

$$(\theta(x, y), y^2) : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^1 \longrightarrow \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^1$$

регулярно в точках множества $\theta^{-1}(0) \setminus 0$. Следовательно, уравнение (3) имеет в нуле y^2-регулярное ветвление.

Таким образом, установлена эквивалентность условий y^2-регулярности ветвления и простоты всех малых $x(y)$ решений уравнения (3).

2. ДЕФОРМАЦИИ, СОХРАНЯЮЩИЕ СТРУКТУРУ КОНОИДА

Рассмотрим специальный вид деформаций уравнения $\theta(x) = 0$, который не изменяет топологическую структуру ростка множества решений.

Пусть

$$\theta_\varepsilon : (\bar{U}, 0) \longrightarrow (\mathbf{R}^m, 0)$$

— семейство C^r-отображений, которые C^r-гладко зависят от параметра $\varepsilon \in \mathcal{E}$, где $\mathcal{E}$ — стягиваемая компактная область конечномерного вещественного пространства, содержащая начало 0. Семейство $\theta_\varepsilon(x)$ называется *гладкой деформацией отображения* $\theta(x)$, если $\theta_\varepsilon(x)$ является гладким по совокупности переменных (x, ε) и $\theta_0(x) = \theta(x)$.

Пусть $\theta_\varepsilon(x)$ — гладкая деформация.

Определение 2. *Семейство уравнений*

$$\theta_\varepsilon(x) = 0 \tag{4}$$

называется регулярной деформацией уравнения $\theta(x) = 0$, если существует гладкая деформация функции V:

$$V_\varepsilon : (\bar{U}, 0) \longrightarrow (\mathbf{R}^1, 0), \quad V_0(x) = V(x),$$

такая, что для любого $\varepsilon \in \mathcal{E}$ уравнение $\theta_\varepsilon(x) = 0$ имеет в нуле V_ε-регулярное ветвление.

Лемма 2. *Пусть (4) — регулярная деформация уравнения* $\theta(x)=0$. *Тогда существует константа* $c_1>0$ *такая, что для любого* $\varepsilon\in\mathcal{E}$ *выполнено неравенство* $V_\varepsilon(x)>c_1$ *для* $x\in\theta_\varepsilon^{-1}(0)\bigcap\partial U$.

Доказательство. В противном случае нашлась бы последовательность значений параметра ε_i, сходящаяся к некоторому $\varepsilon_0\in\mathcal{E}$, последовательность чисел $c_i\to 0$ и последовательность точек $x_i\in\theta_{\varepsilon_i}^{-1}(0)\bigcap\partial U$ таких, что $V_{\varepsilon_i}(x_i)<c_i$. Следовательно, функция $V_{\varepsilon_0}(x)$ достигала бы на множестве $\theta_{\varepsilon_0}^{-1}(0)\bigcap\partial U$ своего минимума (нулевого значения). Последнее противоречит лемме 1.

Предложение 5. *При регулярной деформации индекс ветвления сохраняется:*

$$\mathcal{X}_{V_\varepsilon}(\theta_\varepsilon)=\mathcal{X}_V(\theta)\quad \forall\varepsilon\in E.$$

Доказательство. Рассмотрим отображение

$$\Phi:\mathbf{R}^n\times\mathcal{E}\longrightarrow\mathbf{R}^m\times\mathbf{R}^1\times\mathcal{E},$$

задаваемое соответствием

$$(x,\varepsilon)\mapsto(\theta_\varepsilon(x),V_\varepsilon(x),\varepsilon).$$

Из предложения 1 и тождественной зависимости последней компоненты отображения Φ от ε следует, что точки $(0,c,\varepsilon)$ будут регулярными значениями отображения Φ при всех $\varepsilon\in\mathcal{E}$, $c\in(0,c_1]$. Следовательно, проекция

$$\pi:G\cap Q\longrightarrow\mathcal{E},$$

где

$$G=\{(x,\varepsilon)\,|\,\theta_\varepsilon(x)=0\},\quad Q=\{(x,\varepsilon)\,|\,V_\varepsilon(x)=c\},$$

будет субмерсией. Так как образ проекции — стягиваемая область, то существует тривиализующий диффеоморфизм

$$q:G\cap Q\longrightarrow(\theta^{-1}(0)\cap V^{-1}(c))\times\mathcal{E},$$

сохраняющий последнюю компоненту:

$$q(x,\varepsilon)=(g(x,\varepsilon),\varepsilon).$$

Таким образом,

$$\mathcal{X}(\theta_\varepsilon)=[\theta^{-1}(0)\cap V^{-1}(c)]=\mathcal{X}(\theta).$$

Формулируемое ниже следствие показывает, что росток множества решений уравнения $\theta(x)=0$ сохраняет свою топологическую структуру при регулярной деформации уравнения (при всех $\varepsilon\in\mathcal{E}$ множество решений локально гомеоморфно одному и тому же конусу).

Следствие 2. *Пусть семейство уравнений (4) — регулярная деформация уравнения* $\theta(x)=0$. *Тогда для любого* $\varepsilon\in\mathcal{E}$ *росток множества решений уравнения (4) гомеоморфен ростку множества решений уравнения* $\theta(x)=0$ *и гомеоморфен конусу*

$$cone(\theta^{-1}(0)\cap V^{-1}(c)),\quad c\in(0,c_1].$$

Доказательство. Согласно предложению 2 и его следствию, множество $\theta_\varepsilon^{-1}(0)\bigcap\bar{U}_V$ гомеоморфно $cone(\theta_\varepsilon^{-1}(0)\bigcap V_\varepsilon^{-1}(c))$. По предложению 5 многообразие $\theta_\varepsilon^{-1}(0)\bigcap V_\varepsilon^{-1}(c)$ диффеоморфно при каждом $\varepsilon\in\mathcal{E}$ многообразию $\theta^{-1}(0)\bigcap V^{-1}(c)$. Следовательно,

$$cone(\theta_\varepsilon^{-1}(0)\bigcap V_\varepsilon^{-1}(c))$$

и

$$cone(\theta^{-1}(0)\bigcap V^{-1}(c))$$

гомеоморфны.

Если рассматривать росток множества решений уравнения (4) без точки $x=0$, то указанный гомеоморфизм становится диффеоморфизмом

$$\theta_\varepsilon^{-1}(0)\setminus 0\longrightarrow(\theta^{-1}(0)\cap V^{-1}(0))\times(0,c_1].$$

Замечание 1. *Заметим, что в приложениях в качестве* $V(x)$ *часто бывает удобным рассматривать функцию* $\|x\|^2$, *где* $\|x\|$ *— евклидова норма.*

В дальнейшем будет использоваться главным образом именно эта выстилающая функция.

Замечание 2. *Очевидно, что* $\|\cdot\|^2$ *-регулярность деформации* θ_ε *означает выполнение соотношения*

$$rk\begin{pmatrix} x^\top \\ \dfrac{\partial\theta_\varepsilon(x)}{\partial x}\end{pmatrix}=n+1\quad\forall x\in U\cap(\theta_\varepsilon^{-1}(0)\setminus 0).$$

3. СФЕРИЧЕСКИЕ КОНОИДЫ

Рассмотрим задачу диффеоморфного сравнения со сферой поверхности уровня аналитической неотрицательной (в малой окрестности нулевой точки) функции V, такой, что $V(0)=0$.

Рассмотрим аналитическую функцию V в окрестности нуля пространства $\mathbf{R}^n$:

$$V:R^n\longrightarrow R^1,\quad V(0)=0.$$

Теорема 2. *Пусть* $V(x)>0$ *при* $x\neq 0$ *в некоторой окрестности точки* 0. *Тогда мно-*

гообразие уровня $V^{-1}(c)$ диффеоморфно, при достаточно малом c, сфере $S^{n-1}=\{x \mid \|x\|=1\}$.

Доказательство. Рассмотрим следующую деформацию:

$$\Psi_\varepsilon(x)=\varepsilon\|x\|^2+(1-\varepsilon)V(x), \quad \varepsilon\in[0,1].$$

Покажем, что $\dfrac{\partial\Psi_\varepsilon(x)}{\partial x}\neq 0$ при малых $x\neq 0$ и $\varepsilon\in[0,1]$. В противном случае, найдется последовательность $(x_i,\varepsilon_i)\to(0,\varepsilon_0)$, где $\varepsilon_0\in[0,1]$, такая, что

$$\frac{\partial\Psi_{\varepsilon_i}(x_i)}{\partial x}=0.$$

Тогда найдется, по лемме об отборе кривых [22], аналитическая кривая $(x(t),\ \varepsilon(t))$, $t\in[0,\ t_0]$, $(x(0)=0,\ \varepsilon(0)=\varepsilon_0)$, такая, что

$$\frac{\partial\Psi_{\varepsilon(t)}(x(t))}{\partial x}=0,$$

при всех малых t. Следовательно,

$$\frac{\partial\Psi_{\varepsilon(t)}(x(t))}{\partial x}\cdot x'(t)=0.$$

Отсюда вытекает:

$$\int_0^\tau\left(\varepsilon(t)2x(t)+(1-\varepsilon(t))\frac{\partial V}{\partial x}(x(t))\right)x'(t)dt=0.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}&\varepsilon(t)\left\|x(t)\right\|^2+(1-\varepsilon(t))V(x(t))=\\&=\int_0^t(\left\|x(t)\right\|^2-V(x(t))\varepsilon'(t)dt.\end{aligned}\tag{5}$$

Пусть

$$\left\|x(t)\right\|^2=at^{k_1}+o(t^{k_1}),\quad V(x(t))=bt^{k_2}+o(t^{k_2});$$
$$\varepsilon(t)=\varepsilon_0+ct^{k_3}+o(t^{k_3}),$$

где $a>0, b>0, c\neq 0, k_i\geq 1, i=1,2,3.$ Подставив эти выражения в (5), получим:

$$\begin{aligned}&(\varepsilon_0+ct^{k_3}+o(t^{k_3}))(at^{k_1}+o(t^{k_1}))+\\&+(1-\varepsilon_0-ct^{k_3}-o(t^{k_3}))(bt^{k_2}+o(t^{k_2}))=\\&=\int_0^t(at^{k_1}+o(t^{k_1})-bt^{k_2}-o(t^{k_2}))(k_3ct^{k_3-1}+o(t^{k_3-1}))dt.\end{aligned}\tag{6}$$

Возможны следующие случаи.

А) Пусть $\varepsilon_0\neq 0$ и $\varepsilon_0\neq 1$.

а) $k_1<k_2$. Тогда

$$\varepsilon_0at^{k_1}+o(t^{k_1})=ac\frac{k_3}{k_1+k_3}t^{k_1+k_3}+o(t^{k_1+k_3}).$$

Последнее не выполнено, так как $k_3\geq 1$.

б) $k_1>k_2$. Тогда получаем соотношение

$$(1-\varepsilon_0)bt^{k_2}+o(t^{k_2})=-bc\frac{k_3}{k_2+k_3}t^{k_2+k_3}+o(t^{k_2+k_3}),$$

которое также не может быть выполнено.

в) $k_1=k_2$. Тогда

$$\begin{aligned}&\big(\varepsilon_0a+(1-\varepsilon_0)b\big)t^{k_1}+o(t^{k_1})=\\&=\left((a-b)c\frac{k_3}{k_1+k_3}\right)t^{k_1+k_3}+o(t^{k_1+k_3}).\end{aligned}$$

Последнее не выполнено, так как $k_1+k_3>k_1$ и $\varepsilon_0a+(1-\varepsilon_0)b>0$.

В) Пусть $\varepsilon_0=0$. Равенство (6) перепишем в виде:

$$\begin{aligned}&cat^{k_1+k_3}+o(t^{k_1+k_3})+bt^{k_2}+o(t^{k_2})=\\&=ac\frac{k_3}{k_1+k_3}t^{k_1+k_3}-bc\frac{k_3}{k_2+k_3}t^{k_2+k_3}+\\&+o(t^{k_1+k_3})+o(t^{k_2+k_3}).\end{aligned}$$

а) Пусть $k_2<k_3+k_1$. Тогда

$$bt^{k_2}=ac\frac{k_3}{k_1+k_3}t^{k_1+k_3}.$$

Последнее невозможно.

б) Пусть $k_2>k_3+k_1$. Тогда

$$cat^{k_3+k_1}=ac\frac{k_3}{k_1+k_3}t^{k_1+k_3}.$$

Также не выполнено, так как

$$\frac{k_3}{k_1+k_3}\neq 1.$$

в) Пусть $k_2=k_3+k_1$. Тогда

$$(b+ca)t^{k_2}=ac\frac{k_3}{k_1+k_3}t^{k_2}.$$

Отсюда следует:

$$b=-ac\frac{k_1}{k_2}.$$

Последнее неравенство не выполняется, так как $c>0$ при $\varepsilon_0=0$.

Таким образом, мы доказали, что

$$\frac{\partial\Psi_\varepsilon}{\partial x}(x)\neq 0$$

при $x \neq 0$ из малой окрестности нуля и $\varepsilon \in [0,1]$.

Рассмотрим следующее отображение из $(R^n \setminus 0)\times[0,1]$ в $R\times[0,1]$:

$$(x,\varepsilon) \mapsto (\Psi_\varepsilon(x),\varepsilon).$$

Легко видеть, что оно регулярно. Тогда проекция

$$H : \Phi^{-1}(c) \longrightarrow [0,1],$$

где

$$\Phi(x,\varepsilon) = \Psi_\varepsilon(x), \quad H(x,\varepsilon) = \varepsilon,$$

является регулярным и собственным отображением. Следовательно, H задает расслоение над стягиваемой базой. Отсюда следует, что $\Phi^{-1}(c)$ диффеоморфно S^{n-1}.

Опираясь на теорему о трансверсальном пересечении алгебраических и аналитических множеств сферами достаточно малых радиусов (с центрами в изолированных особых точках этих множеств) [22] (см. также [11]) нетрудно установить следующее утверждение.

Предложение 6. *Пусть* 0 *— изолированное особое решение* C^a*-уравнения* $F(x)=0$. *Тогда для любого* C^a*-функционала* V *такого, что*

$$V(0)=0, \quad V(x)>0 \quad \forall x \in F^{-1}(0)\setminus 0,$$

имеем

$$F^{-1}(0) \cong cone(F^{-1}(0)\cap V^{-1}(c))$$

и

$$F^{-1}(0)\cap V^{-1}(c) \cong F^{-1}(0)\cap S^{n+p-1}.$$

4. КОНЕЧНО v-ОПРЕДЕЛЕННЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

При исследовании уравнения $\theta(x)=0$, $x\in \mathbf{R}^n$, с левой частью, представленной в виде

$$\theta(x) = p(x) + \ldots,$$

где $p(x)$ — отрезок ряда Тейлора в нуле порядка r для θ, естественно возникает вопрос, сохранится ли локальная структура множества решений после отбрасывания остаточного члена (порядка $r+1$) в тейлоровском разложении левой части уравнения.

Определение 3. *Росток гладкого отображения*

$$\theta : (\mathbf{R}^n,0) \longrightarrow (\mathbf{R}^m,0)$$

(или, соответственно, уравнение $\theta(x)=0$*) называется v-определенным порядка* r *в нуле, если топологический тип ростка множества* $\theta^{-1}(0)$ *в нуле не зависит от выбора представителя класса* C^{r+1} *в струе* $j_0^r(\theta)$. *Уравнение* $\theta(x)=0$ *называется конечно–определенным в нуле, если оно v-определено с порядком* r *в нуле (при некотором конечном значении* r*).*

Росток множества решений конечно–определенного уравнения является алгеброидным, то есть эквисингулярным* ростку алгебраического множества. В [22] установлено, что алгебраическое множество $M\subset \mathbf{R}^n$ в достаточно малой окрестности своей изолированной сингулярной точки устроено не очень сложно. А именно, *если a — изолированная особая точка множества M, то при всех достаточно малых τ пересечение $\mathcal{U} = M\cap T_\tau^n(a)$ гомеоморфно конусу над $K = M\cap \partial T_\tau^n(a)$ ($T_\tau^n(a)$ — шар радиаса τ с центром в точке a). Более того, пара $(T_\tau^n(a), M\cap T_\tau^n(a))$ гомеоморфна паре конусов над парой многообразий $(T_\tau^n(a), K)$.* При доказательстве этого утверждения используется упомянутое выше фундаментальное свойство алгебраических множеств: *каждая достаточно малая сфера $S_\tau(a) = \partial T_\tau^n(a)$ в $\mathbf{R}^n$ с центром в изолированной особой точке $a\in\Sigma(M)$ трансверсально пересекается с M по гладкому подмногообразию (возможно пустому)* [22].

Таким образом, множество решений алгебраического уравнения локально гомеоморфно конусу. Более того, этот гомеоморфизм продолжается до объемлющего гомеоморфизма n-мерной шаровой окрестностей особого решения (действующего на некоторую открытую область в $\mathbf{R}^n$). Для получения аналогичного результата в случае гладких уравнений требуются дополнительные условия.

Пусть семейство уравнений (4) образует регулярную деформацию в шаровой окрестности начала координат радиуса τ_0 или, что эквивалентно, отображение

$$\|\cdot\|^2 : \theta_\varepsilon^{-1}(0)\setminus 0 \longrightarrow (0,\tau_0^2]$$

локально субмерсивно. Тогда, согласно предложению 2, для некоторого $\tau<\tau_0$ можно построить диффеоморфизм

$$g_\varepsilon : \theta_\varepsilon^{-1}(0)\cap S_\tau \longrightarrow \theta_0^{-1}(0)\cap S_\tau$$

(S_τ — сфера радиуса τ в $\mathbf{R}^n$ с центром в нуле), продолжаемый до гомеоморфизма

* Эквисингулярность двух ростков множеств в начале координат пространства $\mathbf{R}^n$ означает их гомеоморфность, реализованную диффеоморфизмом объемлющих окрестностей начала координат, из которых начало координат удалено.

$$d_\varepsilon : \theta_\varepsilon^{-1}(0) \longrightarrow \theta^{-1}(0). \qquad (7)$$

Причем оба отображения C^k-дифференцируемо ($k > 0$) зависят от параметра деформации ε.

Лемма 3. *Для любого* $\varepsilon \in \mathcal{E}$ *диффеоморфизм* g_ε *продолжается до диффеоморфизма* $S_\tau \to S_\tau$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon(t)$, $t \in [0,1]$ — гладкий путь в $\mathcal{E}$, соединяющий точки 0 и ε: $\varepsilon(0) = 0, \varepsilon(1) = \varepsilon$. Семейство вложений

$$g_{\varepsilon(t)} : \theta_\varepsilon^{-1}(0) \cap S_\tau \hookrightarrow \theta^{-1}(0) \cap S_\tau,$$

рассматриваемое как изотопическая деформация вложения

$$g_0 : \theta_0^{-1}(0) \cap S_\tau \hookrightarrow \theta^{-1}(0) \cap S_\tau,$$

продолжается (по теореме о продолжении изотопий [22]) до гладкой изотопической деформации $S_\tau \hookrightarrow S_\tau$ единичного отображения.

Следующая теорема показывает, что гомеоморфизм коноидов, соответствующий гладкой регулярной деформации, продолжается до гомеоморфизма шаровых окрестностей нуля.

Теорема 3. *При каждом* $\varepsilon \in \mathcal{E}$ *гомеоморфизм (7) продолжается до гомеоморфизма шара* T_τ *на себя.*

Доказательство. Пусть $g_\varepsilon(t) : S_\tau \hookrightarrow S_\tau$ — диффеоморфизм, построенный в лемме. Его продолжение до диффеоморфизма $g_\varepsilon(t) : T_\tau \hookrightarrow T_\tau$ строится следующим образом. Сначала рассматривается отображение

$$g_\varepsilon : T_\tau := cone\ S_\tau \longrightarrow T_\tau, \ \ g_\varepsilon(tx) := t\ g_\varepsilon(x).$$

Затем гомеоморфизм

$$h_\varepsilon : \theta_\varepsilon^{-1}(0) \longrightarrow cone\left(\theta_\varepsilon^{-1}(0) S_\tau\right)$$

продолжается (по теореме Милнора) до гомеоморфизма $T_\tau \to T_\tau$. Доказательство существования такого продолжения для случая гладкого θ_ε (с регулярным ветвлением в нуле) почти дословно повторяет доказательство такого же утверждения для аналитического уравнения с изолированной особенностью. Построенный гомеоморфизм

$$h_0^{-1} \cdot g_\varepsilon \cdot h_\varepsilon : T_\tau \longrightarrow T_\tau$$

отображает $\theta_\varepsilon^{-1}(0)$ на $\theta_0^{-1}(0)$.

Замечание 3. *Рассмотренная в этом разделе* $\|\cdot\|^2$ *-регулярность деформаций является естественным и весьма удобным инструментом исследования конечной определенности многих уравнений, возникающих в приложениях. Еще одно достоинство этого вида регулярности заключено в его геометрической наглядности и согласованности с известными условиями Уитни* A, B *регулярности примыкания стратов стратифицированных множеств [22], [19].*

5. РЕГУЛЯРНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ И УСЛОВИЯ УИТНИ

Регулярность ветвления решений и регулярность деформации можно проверять посредством дифференциально-геометрических условий Уитни A и B [22], [19], используемых в теории стратифицированных множеств.

Пусть $\theta(x,\varepsilon)$ — гладкая деформация отображения $\theta(x)$ и пусть $\theta(0,\varepsilon) = 0$ $\forall \varepsilon \in \mathcal{E}$, где $\mathcal{E}$ — открытое стягиваемое подмножество в $\mathbf{R}^k$. Рассмотрим множество

$$G = \{(x,\varepsilon) \in \mathbf{R}^n \times \mathcal{E} \mid \theta(x,\varepsilon) = 0\},$$

содержащее подпространство $\{0\} \times \mathcal{E}$. Будем предполагать, что $M := G \setminus (\{\{0\} \times \mathcal{E}\})$ — неособое подмногообразие в $\mathbf{R}^n \times \mathcal{E}$, определяемое уравнением

$$\theta(x,\varepsilon) = 0 \qquad (8)$$

(это условие естественным образом выполняется для деформаций, рассматриваемых в следующих разделах).

Условие Уитни A **в точке** $a = (0,\varepsilon)$**:** угол между касательным пространством $T_b(M)$ и $\{0\} \times \mathcal{E}$ стремится к нулю при $b \to a, b \in M$. То есть, при $T_b(M) \to T$ (в соответствующем грассмановом многообразии) имеет место включение $\{0\} \times \mathcal{E} \subset T$. Здесь $T_b(M)$ — касательное к M в точке b пространство.

Условие Уитни B **в точке** $a = (0,\varepsilon)$**:** угол между вектором $\overline{a_k, b_k}$ и плоскостью $T_{b_k}(M)$ стремится к нулю для любой пары последовательностей точек $a_k \in \{0\} \times \mathcal{E}, b_k \in M$, такой, что $a_k \to a$ и $b_k \to a$.

Замечание 4. *Условие* A *следует из* B *[19], [16].*

Лемма 4. *Если в точке* $a = (0,\varepsilon)$ *выполнено условие Уитни* A*, то найдется окрестность* $U = U_1 \times U_2$ *точки* a *такая, что все ненулевые решения уравнения (8) в* U_1 *при любом фиксированном* $\varepsilon \in U_2$ *регулярны (по* x *).*

Доказательство. Предположив противное, получим последовательность $b_k \to a$, $b_k \in M$, такую, что система градиентов

$$(grad_x\theta_1(b_k),\ldots,grad_x\theta_m(b_k)) \tag{9}$$

(θ_j — компонента θ) линейно зависима при всех k.

С другой стороны, в силу компактности грассмановых многообразий, можно предположить, что $T_{b_k}(M)\to T$. Пусть при этом последовательность нормальных подпространств $N_{b_k}(M)$ (линейных оболочек систем векторов $\{grad_{(x,\varepsilon)}\theta(b_k)\}$) сходится к пространству N. Из условия Уитни A следует, что $\{0\}\times\mathcal{E}\subset T$. Следовательно, $N\subset\mathbf{R}^n\times\{0\}$. Так как $\dim N=m$, то при достаточно больших k система векторов (9) будет линейно независимой, что противоречит ранее сделанному выводу об их линейной зависимости.

Лемма утверждает, что выполнение условия A гарантирует выполнение лишь первого условия регулярности деформации. Второе условие может при этом не выполняться, что подтверждается следующим примером однопараметрического семейства скалярных уравнений на плоскости:

$$\theta(x,\varepsilon):=x_1^2+x_2^2-\varepsilon^2x_1=0.$$

В точке $(0,0,0)$ выполняется условие Уитни A, но данная деформация не является регулярной ни в какой окрестности этой точки, так как кривая $x_1=\varepsilon^2, x_2=0$ состоит из критических точек сужения функции $x_1^2+x_2^2$ на множество $\theta^{-1}(0)$.

Оказывается, что при замене условия A на условие B регулярность деформации будет гарантирована [6].

Теорема 4. *Если в точке $a=(0,\varepsilon)$ выполнено условие Уитни B, то найдется окрестность $U=U_1\times U_2$ точки a такая, что семейство уравнений (8) в U_1 задает регулярную деформацию.*

Доказательство. Нуждается в проверке лишь второе из условий (Предложение 1), используемых в определении регулярности деформации (в силу последней леммы). Предположим противное. Тогда найдется последовательность $b_k\to a=(0,\varepsilon_0)$, $b_k=(x_k,\varepsilon_k)$, такая, что

$$x_k\in N_{x_k}G_{\varepsilon_k},\quad G_{\varepsilon_k}=G\cap\{\varepsilon=\varepsilon_k\}. \tag{10}$$

Пусть при этом

$$\frac{b_k-a_k}{\|b_k-a_k\|}\to l=(x_0,0),\ \ T_{b_k}(G)\to T,\ \ a_k=(0,\varepsilon_k),$$

(перейдя, если это не так, к некоторой подпоследовательности, можно добиться выполнения этих условий). Из условия Уитни B следует включение $l\in T$. Но так как $x_o\in N_0=\lim N_{x_k}(G_{\varepsilon_k})$, то тем самым получено противоречие (если вспомнить, что, по построению, $\|x_0\|=1$).

6. КРИТЕРИЙ КОНЕЧНОЙ v-ОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Исследованию условий конечной определенности и оценке порядка определенности были посвящены работы Х. Уитни, Р. Тома, Дж. Мазера, В. И. Арнольда, А. Н. Варченко, Дж. Тужерона (см. [18], [22], [13], [25], [15], [16]). Результаты, описанные в их работах, основаны на подготовительной теореме Мальгранжа−Вейерштрасса и на громоздкой алгебраической технике, что осложняет процесс внедрения таких работ в прикладной нелинейный анализ (см. высказывания Н. Н. Моисеева по аналогичному поводу в послесловии к книге [26]). Кроме того, сформулированные в этих работах теоремы дают лишь достаточные условия v-определенности и завышенную оценку порядка определенности.

Наиболее общие результаты о v-определенности в случае скалярных уравнений получены Ф. Такенсом [24].

В работе [6] сформулирован предельно общий и достаточно просто доказываемый критерий локальной v-определенности фредгольмова уравнения (уточнения и развития в [6]—[9]). Из этого критерия легко извлекаются многочисленные признаки локальной v-устойчивости уравнений, относящиеся к случаям однородности, квазиоднородности и ньютоновой однородности основных частей соответствующих ключевых уравнений.

6.1. Критерий конечной v-определенности

Рассмотрим уравнение

$$\theta(x)=0, \tag{11}$$

где $\theta:(\mathbf{R}^n,0)\to(\mathbf{R}^m,0)$ — гладкое отображение. Пусть, как и ранее,

$$\Sigma(\theta)=\{x\mid rk\frac{\partial\theta}{\partial x}(x)<m\}$$

— росток множества его особых решений. И пусть при этом $0\in\Sigma(\theta)$.

Теорема 5. *Уравнение (11) v-определено с порядком r тогда и только тогда, когда для любого C^{r+1}-отображения $\hat\theta\in j_0^r(\theta)$ росток множества особых решений уравнения $\hat\theta(x)=0$ состоит из одной нулевой точки: $\Sigma(\hat\theta)\cap\hat\theta^{-1}(0)=\{0\}$.*

Доказательство вытекает из утверждений, доказываемых ниже.

Рассмотрим сначала параметрическое семейство отображений

$$\theta^{(r)}(x,\varepsilon) = \theta^{(r-1)}(x) + \sum_{|\alpha|=r} \varepsilon_\alpha^{(r)} x^\alpha,$$

где $\theta^{(r-1)}(x)$ отрезок $r-1$-го порядка, а $\theta^{(r)}(x,\varepsilon)$ — отрезок r-го порядка ряда Тейлора отображения θ в нуле, $\varepsilon = \{\varepsilon_\alpha^{(r)}\} \in \mathcal{E}^{(r)}$, $x \in \mathbf{R}^n$, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$.

В пространстве $\mathbf{R}^n \times \mathcal{E}^{(r)}$ рассмотрим алгебраическое множество $\mathcal{N}$, заданное уравнением

$$\theta^{(r)}(x,\varepsilon) = 0. \tag{12}$$

Очевидно, что $\{0\} \times \mathcal{E}^{(r)} \subset \mathcal{N}$. Обозначим $\mathcal{M}$ дополнение к этому подмножеству: $\mathcal{M} = \mathcal{N} \setminus (\{0\} \times \mathcal{E}^{(r)})$.

Лемма 5. *Множество $\mathcal{M}$ — неособое аналитическое подмногообразие в $\mathbf{R}^n \times \mathcal{E}^{(r)}$ коразмерности m.*

Доказательство леммы вытекает из теоремы о прообразе регулярного значения гладкого отображения, если заметить, что ранг матрицы Якоби отображения $\theta^{(r)}(x,\varepsilon)$ (по совокупности переменных) равен m (максимален) в каждой точке (x,ε) с $x \neq 0$.

Регулярность примыкания множества $\mathcal{M}$ к $0 \times \mathcal{E}^{(r)}$ можно охарактеризовать условием Уитни A. Однако нам понадобится следующая его модификация.

Условие A^* в точке $(0,\varepsilon_0)$:
если $\eta_k = (x_k, \varepsilon_k)$ — последовательность точек подмногообразия $\mathcal{M}$, сходящаяся к $(0,\varepsilon_0)$ при дополнительном условии $\|\varepsilon_k - \varepsilon_0\| = O(\|x_k\|)$, и если при этом последовательность касательных пространств $T_{\eta_k}(\mathcal{M})$ сходится к некоторому пространству T, то $0 \times \mathcal{E}^{(r)} \subset T$.

Замечание 5. *Условие A^* было введено автором в [7]. От классического условия Уитни A оно отличается наличием требования $\|\varepsilon_k - \varepsilon_0\| = O(\|x_k\|)$, которое сокращает совокупность «испытываемых последовательностей» (по сравнению с условием Уитни A). Очевидно, что условие A^* является менее жестким, чем условие A.*

Лемма 6. *Пусть в точке $(0,\varepsilon_0)$ выполнено условие A^*. Тогда для любой последовательности $\eta_k = (x_k, \varepsilon_k)$ точек подмногообразия $\mathcal{M}$, сходящейся к $\eta_0 = (0,\varepsilon_0)$ при дополнительном условии $\|\varepsilon_k - \varepsilon_0\| = O(\|x_k\|)$, выполняются следующие соотношения:*

$$rk\,\frac{\partial\theta^{(r)}}{\partial x}(\eta_k) = m$$

(при всех достаточно больших номерах k),

$$\left\|\left(\frac{\partial\theta^{(r)}}{\partial\varepsilon}(\eta_k)\right)^{\top} h\right\| \Big/ \left\|\left(\frac{\partial\theta^{(r)}}{\partial x}(\eta_k)\right)^{\top} h\right\| \to 0$$

равномерно по $h \in \mathbf{R}^n, h \neq 0$.

Доказательство леммы вытекает из очевидного утверждения о том, что предел подпространств, нормальных к $\mathcal{M}$ в точках η_k, принадлежит многообразию $\mathbf{R}^{n+p} \times \{\varepsilon_0\}$.

Из леммы 6 вытекает следующее утверждение.

Теорема 6. *Условие A^* в точке $(0,\varepsilon_0)$ выполнено тогда и только тогда, когда для любого C^1-отображения*

$$x \mapsto \varepsilon = \varepsilon(x), \quad \varepsilon(0) = \varepsilon_0,$$

росток множества особых решений уравнения

$$\varphi(x) := \theta^{(r)}(x,\varepsilon(x)) = 0 \tag{13}$$

является ростком одноточечного множества:

$$\Sigma(\varphi) \cap \varphi^{-1}(0) = \{0\}.$$

Доказательство. 1. Пусть в точке $(0,\varepsilon_0)$ выполнено условие A^*. Предположим противное: при некотором отображении $\varepsilon(x)$ существует последовательность $x_k \to 0, x_k \neq 0$, решений уравнения (13) и последовательность $h_k \in \mathbf{R}^n, h_k \neq 0$, такие, что

$$\left(\frac{\partial\theta^{(r)}}{\partial x}(\eta_k) + \frac{\partial\theta^{(r)}}{\partial\varepsilon}(\eta_k)\cdot\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}(x_k)\right)^{\top} h_k = 0,$$

$\eta_k = (x_k, \varepsilon_k)$, $\varepsilon_k = \varepsilon(x_k)$. Следовательно,

$$\left(\frac{\partial\theta^{(r)}}{\partial x}(\eta_k)\right)^{\top} h_k = -\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}(x_k)\right)^{\top}\left(\frac{\partial\theta^{(r)}}{\partial\varepsilon}(\eta_k)\right)^{\top} h_k,$$

что противоречит лемме 6.

2. Предположим теперь, что в точке $(0,\varepsilon_0)$ не выполнено условие A^*. Тогда найдутся последовательность $\eta_k = (x_k, \varepsilon_k)$ точек $\mathcal{M}$, сходящаяся к $\eta_0 = (0,\varepsilon_0)$ при условии $\|\varepsilon_k - \varepsilon_0\| = O(\|x_k\|)$, и последовательность $h_k \in \mathbf{R}^n, h_k \neq 0$, такие, что

$$\left(\left(\frac{\partial\theta^{(r)}}{\partial x}(\eta_k)\right)^{\top} h_k, \left(\frac{\partial\theta^{(r)}}{\partial x}(\eta_k)\right)^{\top} h_k\right) \to (\bar{x}, \bar{\varepsilon})$$

(в проективном пространстве), где $\bar{\varepsilon} \neq 0$. Следовательно, существует такая последовательность линейных операторов A_k с ограниченной нормой, что

$$\left(\frac{\partial\theta^{(r)}}{\partial x}(\eta_k)\right)^{\top} h_k = A_k\left(\frac{\partial\theta^{(r)}}{\partial\varepsilon}(\eta_k)\right)^{\top} h_k. \qquad (14)$$

Можно предположить, в силу леммы об отборе кривых [22], что точки $\eta_k = (x_k, \varepsilon_k)$ лежат на аналитической кривой многообразия $\mathcal{M}$. При этом в качестве униформизующего параметра можно выбрать такую координату x^j вектора x, что $\|x_k\| = O(x_k^j)$ (параметризация $\eta(x^j) = (x(x^j), \varepsilon(x^j))$, вообще говоря, принадлежит лишь классу C^1).

Из ортогональности векторов $(\dot{x}(x^j), \dot{\varepsilon}(x^j))$ строчкам матрицы

$$\left(\frac{\partial\theta^{(r)}}{\partial x}(\eta(x^j)), \frac{\partial\theta^{(r)}}{\partial\varepsilon}(\eta(x^j))\right)$$

и из соотношения (14) получаем, что уравнение (13) в случае $\varepsilon(x) = \varepsilon_k(x)$, где

$$\varepsilon_k(x) = \varepsilon(x^j) - A_k^{\top} \cdot (x - x(x^j)),$$

имеет сингулярное решение $x(x^j)$.

Рассмотрим отображение

$$\varepsilon(x) = \varepsilon_0 + Bx + \sum_k \omega\left(\frac{x - x_k}{\|x_k\|}\right) \times$$
$$\times\left(\varepsilon_k(x_k) - \varepsilon_0 - Bx + \frac{\partial\varepsilon_k}{\partial x}(x_k)(x - x_k)\right),$$

(перейдя, в случае необходимости, к подпоследовательности), где

$$B = \lim \frac{\partial\varepsilon_k}{\partial x}(x_k),$$

$\omega \in C^{\infty}$ — локальная единица: $\omega(x) = 1$ при $\|x\| < \frac{1}{4}$ и $\omega(x) = 0$ при $\|x\| > \frac{1}{2}$. Легко видеть, что уравнение (13) при данном $\varepsilon(x)$ имеет последовательность сингулярных решений $x_k \to 0$, что противоречит условию теоремы.

Из теоремы 6 теперь можно легко получить доказательство теоремы 5.

Действительно, каждое отображение $\tilde{\theta}$, имеющее общую r-струю с отображением θ, представимо в виде $\varphi(x) = \theta^{(r)}(x, \varepsilon(x))$ (см. (13)). Нетрудно показать, опираясь на условие A^*, что деформация

$$\theta_\lambda(x) := \theta^{(r)}(x, \varepsilon_0 + \lambda(\varepsilon(x) - \varepsilon_0))$$

является $\|\cdot\|^2$ - регулярной. Следовательно, утверждение теоремы вытекает теперь из теоремы о сохранении коноида решений при φ – регулярных деформациях.

Таким образом, установлено следующее утверждение.

Теорема 7. *Перечисленные ниже три свойства уравнения эквивалентны:*

1) уравнение $\theta(x) = 0$ *v-определено с порядком* r*;*

2) росток множества решений уравнения $\tilde{\theta}(x) = 0 \quad \forall\tilde{\theta} \in j_0^r(\theta),\ \tilde{\theta} \in C^{r+1}$, состоит из одной точки 0;

3) в точке $(0, \varepsilon_0)$ *выполнено условие* A^*.

Следующая теорема дает критерий конечной определенности аналитического уравнения.

Теорема 8. *Пусть* $\theta \in C^a(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$. *Уравнение (11) конечно определено тогда и только тогда, когда* $x = 0$ *— изолированное особое решение уравнения (11):* $\Sigma(\theta) \cap \theta^{-1}(0) = \{0\}$.

Доказательство. Необходимость следует из теоремы 7. Пусть $x = 0$ — изолированная особая точка уравнения (11). Рассмотрим следующую неотрицательную аналитическую функцию:

$$\varphi(x) = \|\theta(x)\|^2 + det\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}(x)\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}(x)\right)^{\top}\right),$$

локальное множество нулей, которое состоит из одной точки $x = 0$. По неравенству Лоясевича, для всех x из некоторой замкнутой окрестности нуля верна оценка:

$$\varphi(x) > c\ d(x, \varphi^{-1}(0))^{\alpha}, c, \alpha > 0,$$

($d(x, \varphi^{-1}(0))$ — расстояние от точки x до множества $\varphi^{-1}(0)$). Учитывая существование окрестности $U(0)$ такой, что $\varphi^{-1}(0) \cap U(0) = \{0\}$, получаем:

$$\|\theta(x)\|^2 + det\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}(x)\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\theta(x)\right)^{\top}\right) > c\,\|x\|^{\alpha}.$$

Выберем $r > \alpha$. Покажем, что уравнение (11) v-определено с порядком r. Для этого согласно последней теореме, необходимо и достаточно, чтобы для любого отображения $\tilde{\theta} \in j_0^r(\theta)$, $\tilde{\theta}(x) = \theta(x) + \omega^{r+1}(x)$, $\left\|\omega^{r+1}(x)\right\| / \left\|(x)\right\|^{r+1} < c$, система двух уравнений

$$\tilde{\theta}(x) = det\left(\frac{\partial\tilde{\theta}}{\partial x}(x)\left(\frac{\partial\tilde{\theta}}{\partial x}(x)\right)^{\top}\right) = 0$$

имела нуль изолированным решением.

Рассмотрим следующую функцию:

$$\psi(x) = \left\|\tilde{\theta}(x)\right\|^2 + det\left(\frac{\partial\tilde{\theta}}{\partial x}(x)\left(\frac{\partial\tilde{\theta}}{\partial x}(x)\right)^{\top}\right).$$

Для нее верна оценка:

$$\psi(x) = \left\|\theta(x)\right\|^2 + det\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}(x)\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}(x)\right)^{\top}\right) + O(\|x\|^r) >$$

$$> c\,\|x\|^{\alpha} + O(\|x\|^r) > \frac{c}{2}\|x\|^{\alpha}$$

($O(\|x\|^k)/\|x\|^k < d$ при $x \to 0$). Откуда и следует, что нулевое решение данной системы уравнений изолировано.

Для случая $\theta \in C^{\infty}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ теорема, вообще говоря, не верна, так как неравенство Лоясевича выполняется лишь при дополнительных предложениях.

Действительно, рассмотрим уравнение

$$f(x,y) = (x+y)^2 - e^{-\frac{1}{x^2}} = 0,\ \ x,y \in \mathbf{R}^1$$

($f \in C^{\infty}(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^1)$). Легко видеть, что 0 — изолированное особое решение. Неравенство Лоясевича при этом не выполнено, так как ни при каком α не верна оценка

$$((x+y)^2 - e^{-\frac{1}{x^2}})^2 + 4(x+y)^2 + 4\left(x+y-\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3}\right)^2 >$$

$$> c\left\|(x,y)\right\|^{\alpha}$$

(это достаточно проверить при $x = -y$). Данное уравнение не является конечно-определенным, так как уравнение

$$\tilde{f}(x,y) = f(x,y) + e^{-\frac{1}{x^2}} = (x+y)^2 = 0$$

имеет особое решение $x = -y$.

Итак, как показал последний пример, для бесконечно гладких отображений из условия изолированности нулевого особого решения уравнения не следует его конечная определенность.

Теорема 9. *Пусть* $\theta \in C^{\infty}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ *и идеал*

$$\left(\|\theta\|^2 + det\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}(x)\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}(x)\right)^{\top}\right)\right)\cdot C^{\infty}(U(0))$$

замкнут в $C^{\infty}(U(0))$ *для некоторой окрестности* $U(0)$ *[20].*

Уравнение (11) конечно определено тогда и только тогда, когда $x = 0$ *— его изолированное особое решение.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 6, так как замкнутость идеала равносильна выполнению неравенства Лоясевича (для гладкой функции).

Помимо конечной определенности ростка множества решений, можно рассматривать конечную определенность его отдельных ветвей [8].

6.2. Квазиоднородные уравнения

В данном разделе сформулирован вариант теоремы о v-определенности квазиоднородного уравнения.

Полиномиальное отображение $\theta : (\mathbf{R}^{n+p}, 0) \to (\mathbf{R}^n, 0)$ называется квазиоднородным степени $\bar{d} = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ с показателями $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+p})$, если для его i-ой компоненты ($\forall i$)

$$\theta_i(t^{\alpha_1}x_1, t^{\alpha_2}x_2, \ldots, t^{\alpha_{n+p}}x_{n+p}) = t^{d_i}\theta_i(x_1, \ldots, x_{n+p}),$$

при любом $t \in \mathbf{R}$ (числа d_i, α_j — целые при всех i, j).

Геометрически это означает, что показатели всех мономов i-ой компоненты ($\forall i$) лежат на гиперповерхности

$$\Gamma_i = \{k \,|\, k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_{n+p}\alpha_{n+p} = d_i\}.$$

Квазиоднородное отображение $\theta(x)$ можно записать в виде:

$$\theta_i(x) = \sum_{\alpha\in\Gamma_i} a_{\alpha}^{i} x^{\alpha}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (15)$$

Будем предполагать, что $x = 0$ — особое решение уравнения $\theta(x) = 0$ (ранг матрицы Якоби θ в нуле $< n$).

Ростки $\theta^{-1}(0)$ и $G^{-1}(0)$ двух полиномиальных отображений назовем эквисингулярными в точке $x = 0$, если существует гомеоморфизм ростков $h : \theta^{-1}(0) \to G^{-1}(0)$, такой, что $h : \theta^{-1}(0) \setminus 0 \to G^{-1}(0) \setminus 0$ — диффеоморфизм ростков (в точке $x = 0$)*.

Росток квазиоднородного отображения θ в нуле назовем v-устойчивым в квазиоднородной фильтрации, если для любого отображения $G(x)$ такого, что

$$G_i(x) = \sum_{\alpha\in\Gamma_i} \varepsilon_{\alpha}^{i}(x) x^{\alpha}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \qquad (16)$$

$$\varepsilon_{\alpha}^{i}(0) = a_{\alpha}^{i}, \quad \varepsilon_{\alpha}^{i}(x) \in C^1$$

* Отображение h является диффеоморфизмом, если h и h^{-1} — гладкие отображения; гладкость отображения означает его локальную продолжимость до гладкого отображения окрестности каждой точки в области определения.

ростки $\theta^{-1}(0)$ и $G^{-1}(0)$ эквисингулярны в точке $x = 0$.

Геометрически это определение означает, что возмущение i-ой компоненты слагаемыми, лежащими над гиперповерхностью Γ_i, не изменяет топологический тип ростка $\theta^{-1}(0)$ в нуле.

Следующая теорема дает необходимое и достаточное условие v-устойчивости ростка квазиоднородного отображения.

Теорема 10. *Росток квазиоднородного отображения θ является v-устойчивым тогда и только тогда, когда множество особых решений уравнения*

$$\theta(x) = 0 \tag{17}$$

состоит из одной точки 0 $(\Sigma(\theta) \cap \theta^{-1}(0) = \{0\})$.

Доказательство. Во-первых, заметим, что изолированность особого решения уравнения (17) эквивалентна его единственности. Следовательно, необходимость единственности нулевого особого решения для v-устойчивости ростка отображения θ в нуле вытекает из теоремы 7.

Пусть 0 — единственное особое решение уравнения (17). Покажем, что для любого отображения (16) точка 0 будет изолированным особым решением уравнения

$$G(x) = 0. \tag{18}$$

Предположим противное. Пусть $x^{(i)} \to 0$ — последовательность ненулевых особых решений уравнения (18). На поверхности

$$S = \{x \mid x_1^{k_1} + x_2^{k_2} + \ldots + x_{n+p}^{k_{n+p}} = 1\},$$

$$k_1\alpha_1 = k_2\alpha_2 = \ldots = k_{n+p}\alpha_{n+p} = m \in \mathbf{Z},$$

$$k_1, k_2, \ldots, k_{n+p} \in 2\mathbf{Z},$$

диффеоморфной сфере S^{n+p-1}, рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = \|\theta(x)\| + \sum_{j=1}^{s} | M_j(x) |,$$

$M_1, M_2, \ldots, M_s$ — набор всех миноров порядка n матрицы $D\theta(x)$. В силу непрерывности φ и компактности S верна оценка

$$\varphi(x) > C > 0.$$

На поверхности S рассмотрим последовательность точек

$$x^{(i)} = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_{n+p}^{(i)})^\top,$$

где

$$x_j^{(i)} = \frac{x_j^{(i)}}{(x_1^{(i)k_1} + x_2^{(i)k_2} + \ldots + x_{n+p}^{(i)k_{n+p}})^{\frac{1}{k_j}}}.$$

Так как $\varphi(x^{(i)}) > c$ и $\varphi(x^{(i)})$ представляет собой сумму $s+1$ слагаемых, то хотя бы одно слагаемое больше $C/(s+1)$. Пусть, например,

$$| M_1(x^{(i)}) | > \frac{c}{s+1},$$

где

$$M_1(x^{(i)}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial\theta_1}{\partial x_1}(x^{(i)}) & \frac{\partial\theta_1}{\partial x_2}(x^{(i)}) & \ldots & \frac{\partial\theta_1}{\partial x_n}(x^{(i)}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial\theta_n}{\partial x_1}(x^{(i)}) & \frac{\partial\theta_n}{\partial x_2}(x^{(i)}) & \ldots & \frac{\partial\theta_n}{\partial x_n}(x^{(i)}) \end{vmatrix}.$$

В силу квазиоднородности $M_1(x^{(i)})$ имеем

$$M_1(x^{(i)}) = M_1(x^{(i)})(x_1^{(i)k_1} + x_2^{(i)k_2} + \ldots + x_{n+p}^{(i)k_{n+p}})^\gamma,$$

где $\gamma = (d_1 + d_2 + \ldots + d_n - \alpha_1 - \alpha_2 - \ldots - \alpha_n)/m$. Рассмотрим теперь минор

$$M_1^1(x^{(i)}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x_1}(x^{(i)}) & \ldots & \frac{\partial G_1}{\partial x_n}(x^{(i)}) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial G_n}{\partial x_1}(x^{(i)}) & \ldots & \frac{\partial G_n}{\partial x_n}(x^{(i)}) \end{vmatrix}.$$

Очевидно,

$$M_1^1(x^{(i)}) = M_1(x^{(i)}) + o\Big((x_1^{(i)k_1} + x_2^{(i)k_2} + \ldots + x_{n+p}^{(i)k_{n+p}})^\gamma\Big).$$

Следовательно,

$$| M_1^1(x^{(i)}) | > \frac{c}{s+1}\Big(x_1^{(i)k_1} + x_2^{(i)k_2} + \ldots + x_{n+p}^{(i)k_{n+p}}\Big)^\gamma -$$
$$-o\Big((x_1^{(i)k_1} + x_2^{(i)k_2} + \ldots + x_{n+p}^{(i)k_{n+p}})^\gamma\Big) > 0.$$

Последнее противоречит предположению, что точки $x^{(i)}$ — особые решения уравнения (18).

Итак, полученная теорема позволяет при решении уравнения с «главной» квазиоднородной правой частью

$$G_i(x) = \sum_{\alpha\in\Gamma_i} a_\alpha^i x^\alpha + \sum_{\alpha\in\Gamma_i} \delta_\alpha^i(x) x^\alpha = 0, \ \ i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\delta_\alpha^i(0) = 0, \quad \delta_\alpha^i(x) \in C^1,$$

ограничиваться, с точностью до эквисингулярности ростка множества решений, решением квазиоднородного уравнения

$$\sum_{\alpha\in\Gamma_i} a_\alpha^i x^\alpha = 0, \quad i = 1,2,\dots,n$$

(при условии, что множество его особых решений состоит из одной точки 0 или, что эквивалентно, изолированности особого решения: $\Sigma(\theta)\cap\theta^{-1}(0)=\{0\}$).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фоменко А.Т.* Теория Морса интегрируемых гамильтоновых систем// ДАН СССР. 1986. Т. 287, № 5. С. 1071—1075.

2. *Фоменко А.Т.* Наглядная геометрия и топология. Математические образы в реальном мире. М.: Изд-во МГУ, 1992. 432 с.

3. *Трофимов В.В., Фоменко А.Т.* Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых дифференциальных уравнений. М.: Факториал, 1995. 448 с.

4. *Харламов М.П.* Метод интегральных отображений в задачах динамики твердого тела// Методы исследования стационарных движений механических систем. М.: Изд-во МГУ, 1980. С. 17—18.

5. *Переломов А.М.* Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли. М.: Наука. 1990. 240 с.

6. *Зачепа В.Р.* Конечноопределенные уравнения// Воронеж, ВГУ. 1980. Деп. в ВИНИТИ № 3615-80. — 20 с.

7. *Зачепа В.Р.* О v-определенности ростка гладкого отображения в особой точке// Глобальный анализ и нелинейные уравнения. — Воронеж, ВГУ. 1988. — С. 119—126.

8. *Зачепа В.Р.* Конечная определенность простых малых решений нелинейного уравнения// Топологические методы нелинейного анализа. — Воронеж, ВГУ. 2000. — С.58—69.

9. *Зачепа В.Р.* О v-устойчивости ростка квазиоднородного отображения в особой точке// Математические модели и операторные уравнения. — Воронеж, ВГУ. 2001. — С. 86—93.

10. *Зачепа В.Р., Сапронов Ю.И.* О локальном анализе нелинейных фредгольмовых уравнений // Труды НИИМ им. В. А. Стеклова. 1983. Т. 154. С. 113—117.

11. *Зачепа В.Р., Сапронов Ю.И.* Локальный анализ нелинейных фредгольмовых уравнений. Воронеж: ВГУ. 2002. — 185 с. Т. 154. С. 113—117.

12. *Аграчев А.А., Гамкрелидзе Р.В.* Квадратичные отображения и гладкие вектор-функции: эйлеровы характеристики множеств уровня// Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Новейшие достижения. Т.35. 1989. С.179−239.

13. *Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М.* Особенности дифференцируемых отображений. Классификация критических точек каустик и волновых фронтов. М.: Наука. 1982. 304 с. Особенности дифференцируемых отображений. Монодромия и асимптотики интегралов. М.: Наука. — 1984. — 336 с.

14. *Брекер Т., Ландер Л.* Дифференцируемые ростки и катастрофы. — М.: Мир, 1977. — 208 с.

15. *Варченко А.Н.* Теорема об эквисингулярности семейств алгебраических многообразий// Успехи матем. наук. 1971. Т. 26, вып. 1. С. 317—218.

16. *Варченко А.Н.* О ростках аналитических отображений, топологический тип которых определяется конечной струей// Функц. анализ и его прил. 1972. Т. 6, вып. 3. С. 63—64.

17. *Голубицкий М., Гийемин В.* Устойчивые отображения и их особенности. — М.: Мир, 1978. — 290 с.

18. *Мазер Дж.Н.* Конечная определенность гладких отображений // Математика — 1970. Т. 14, № 1. — С. 145—175.

19. *Мазер Дж.Н.* Стратификация и отбражения // Успехи матем. наук. — 1972. Т. 27, № 5. — С. 85—113.

20. *Мальгранж Б.* Идеалы дифференцируемых функций. М.: 1968.

21. *Милнор Дж.* Теорема об h-кобордизме. М.: Мир, 1969. — 116 с.

22. *Милнор Дж.* Особые точки комплексных гиперповерхностей. М.: Мир, 1971. — 126 с.

23. *Marsden J.E.* Qualitative Methods in Bifurcation Theory// Bull. Amer. Math. Soc. — 1978. — V. 84, № 6.

24. *Takens F.* A note on sufficiecy of yets // Invent. Math. № 13. 1971. — P. 225—231.

25. *Tougeron J.C.* Ideax de functions differentiables// Ann. Inst. Fourier. B. 18. 1968. — P. 177—240.

26. *Йосс Ж., Джозеф Д.* Элементарная теория устойчивости и бифуркаций. — М.: Мир. 1983. — 302 с.