

УДК 639.374; 519.63

К ПРИМЕНЕНИЮ МКЭ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ СТАТИЧЕСКИХ ВАРИАЦИОННЫХ ПРИНЦИПОВ РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИЙ

© 2003 С. А. Вульман, Т. Д. Семькина, С. Н. Стрельникова

Воронежский государственный университет

При сложном нагружении оболочек и нарушении условий существования безмоментного состояния обобщенные усилия можно определить с использованием статико-геометрической аналогии. В этом случае статически-допустимые решения определяются через функции напряжений с помощью статического вариационного уравнения, которое предлагается решать Методом Конечных Элементов. В статье получены матрицы жесткости элементов и обсуждается вопрос построения ансамбля при осесимметричной деформации оболочки.

При определении нижней оценки предельных нагрузок используются статические методы расчета, основанные на подборе статически допустимых обобщенных усилий. Это приводит обычно к формулировке вариационных уравнений относительно нескольких статических переменных с ограничениями в форме дифференциальных уравнений равновесия и линейных граничных условий. Очевидны значительные математические сложности в этой постановке задачи.

Ниже предлагается применить МКЭ к решению вариационных статических уравнений с использованием статико-геометрической аналогии [1] для нахождения общих решений уравнений равновесия. В качестве примера рассматривается постановка задачи о расчете краевого эффекта в упругих цилиндрических оболочках.

Статико-геометрическая аналогия основана на совпадении дифференциальных операторов, входящих в уравнения равновесия и условия совместности деформаций. Таким образом, статические величины (обобщенные усилия) так же, как обобщенные деформации, могут быть выражены через три независимые функции F, Φ, Ψ напряжений по формулам, аналогичным формулам Коши. Например, для оболочек вращения общие решения однородных уравнений равновесия:

$$\bar{T}_1 = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} - \frac{\Phi \sin \theta}{r} \right) - \frac{\cos \theta}{r} \left(\frac{1}{R_1} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} - \frac{F}{R_1} \right);$$

$$\bar{T}_2 = -\frac{1}{R_1} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{R_1} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} - \frac{F}{R_1} \right);$$

$$\bar{S} = \frac{1}{R_1} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} - \frac{\Phi \sin \theta}{r} \right) - \frac{1}{R_1} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \varphi} - \frac{\Phi \cos \theta}{r} \right);$$

$$\bar{M}_1 = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} (F \cos \theta + \Psi \sin \theta);$$

$$\bar{M}_2 = -\frac{1}{R_1} \frac{\partial F}{\partial \theta} - \frac{\Psi}{R_1};$$

$$\bar{H} = \frac{1}{2R_1} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \frac{1}{2r} \frac{\partial F}{\partial \varphi} - \frac{\Phi \cos \theta}{r}. \quad (1)$$

Здесь R_1 — радиус кривизны срединной поверхности оболочки в меридиональном направлении, R_2 — в окружном, $r = -R_2 \sin \theta$ (см. рис 1).

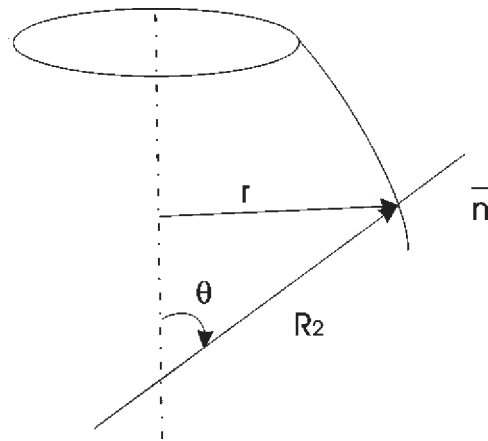


Рис 1. Геометрия оболочки

Усилия T_1, T_2, S_{12}, S_{21} и моменты M_1, M_2, M_{12}, M_{21} изображены на рис 2,

$$S = S_{12} - \frac{M_{21}}{R_2} = S_{21} - \frac{M_{12}}{R_1};$$

$$H = \frac{M_{12} + M_{21}}{2}. \quad (2)$$

Обобщенные усилия, уравновешенные с внешними нагрузками, могут быть представлены в виде сумм усилий, выраженных по формулам (1), удовлетворяющих однородным уравнениям равновесия, и усилий, представляющих собой частное решение неоднородных уравнений равновесия. Последние могут быть определены по безмоментной теории [2]

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (r \bar{T}_1) + R_1 \frac{\partial \bar{S}}{\partial \varphi} - \bar{T}_2 R_1 \cos \theta + r R_1 \rho_1 = 0,$$

$$R_1 \frac{\partial \bar{T}_2}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (r^2 \bar{S}) + r R_1 \rho_2 = 0,$$

$$\frac{1}{R_1} \bar{T}_1 + \frac{1}{R_2} \bar{T}_2 - \rho_3 = 0, \quad (3)$$

здесь ρ_1, ρ_2, ρ_3 — компоненты распределенной нагрузки в меридиональном, окружном и нормальном направлениях.

Таким образом, усилия, удовлетворяющие уравнениям равновесия, будут получены в виде

$$T_1 = \bar{T}_1 + \bar{T}_1; \quad T_2 = \bar{T}_2 + \bar{T}_2; \quad S = \bar{S} + \bar{S};$$

$$M_1 = \bar{M}_1; \quad M_2 = \bar{M}_2; \quad H = \bar{H}. \quad (4)$$

Отсюда следует, что статические вариационные уравнения могут быть записаны относительно трех функций напряжения F, Φ, Ψ . При решении вариационных уравнений методом конечных элементов эти функции могут быть аппроксимированы на каждом элементе двумерными полиномами Эрмита [3].

При осесимметричном нагружении оболочек вращения, соотношения (1) упрощаются, и, как следует из независимости усилий от координаты φ , а так же отсутствия S и H , остаются две искомых функции $F(S)$ и $\Psi(S)$ (где S — дуговая координата в меридиональном направлении), которые могут быть аппроксимированы на каждом элементе:

$$\{F\}^i = [N_1(\xi), N_2(\xi)] \{F_i, F_{i+1}\}^i,$$

$$\{\Psi\}^i = [N_{01}(\xi), N_{11}(\xi), N_{02}(\xi), N_{12}(\xi)] \{a\}^i \quad (5)$$

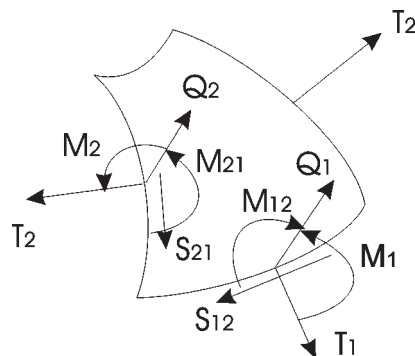


Рис 2. Положительные направления усилий и моментов, действующих на элемент оболочки

здесь $\{a\}^i = \{\Psi_i, \Psi'_i, \Psi_{i+1}, \Psi'_{i+1}\}^T$,

$$N_{01}(\xi) = \frac{1}{4}(1-\xi)^2(2+\xi);$$

$$N_{11}(\xi) = \frac{1}{4}(1-\xi^2)(1-\xi);$$

$$N_{02}(\xi) = \frac{1}{4}(1+\xi)^2(2-\xi);$$

$$N_{12}(\xi) = \frac{1}{4}(-1+\xi^2)(1+\xi);$$

$$\xi = \frac{2S - S_{i+1} - S_i}{S_{i+1} - S_i}; \quad -1 \leq \xi \leq 1 \quad (6)$$

(S_i, S_{i+1} — координаты узлов, принадлежащих элементу с номером i).

Составим вектор, компонентами которого будут две функции F и Ψ . Следуя (5) аппроксимации этого вектора на элементе « i » можно записать в виде

$$\{\Phi\}^i = \begin{Bmatrix} F \\ \Psi \end{Bmatrix}^i =$$

$$= \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 \\ 0 & N_{01} & N_{11} & 0 & N_{02} & N_{12} \end{bmatrix} \{\delta\}^i. \quad (7)$$

Здесь $\{\delta\}^{iT} = \{F_i, \Psi_i, \Psi'_i, F_{i+1}, \Psi_{i+1}, \Psi'_{i+1}\}$, F_i, Ψ_i — значение функции в узле с номером i , Ψ'_i — значение производной в узле с номером i .

Из компонент усилий и моментов составим вектор $\{\sigma\}$

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{T}_1 \\ \bar{T}_2 \\ \bar{M}_1 \\ \bar{M}_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \bar{T}_1 \\ \bar{T}_2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \{\bar{\sigma}\} + \{\bar{\bar{\sigma}}\}. \quad (8)$$

Вектор $\{\bar{\sigma}\}$ является решением однородных уравнений равновесия и может быть определен через функции напряжений

$$\{\bar{\sigma}\} = \begin{Bmatrix} \bar{T}_1 \\ \bar{T}_2 \\ \bar{M}_1 \\ \bar{M}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\cos \theta}{r} \left(\frac{\partial \psi}{\partial s} - \frac{F}{R_1} \right) \\ -\frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2} + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{F}{R_1} \right) \\ \frac{F \cos \theta}{r} - \frac{\psi \sin \theta}{r} \\ -\frac{\partial F}{\partial s} \end{Bmatrix}. \quad (9)$$

Учитывая (7) можно получить аппроксимацию $\{\bar{\sigma}\}$ в элементе с номером «i»

$$\{\bar{\sigma}\}^i = [B]^i \{\delta\}^i. \quad (10)$$

Здесь $[B]^i = [B_1, B_2]$,

$$[B_n] = \begin{bmatrix} \frac{\cos \theta}{r R_1} N_n & -\frac{\cos \theta}{r} \frac{2}{l_i} N'_{0n} & -\frac{\cos \theta}{r} \frac{2}{l_i} N'_{1n} \\ \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{R_1} \right) - \frac{1}{R_1 l_i} & -\frac{4}{l_i^2} N''_{0n} & -\frac{4}{l_i^2} N''_{1n} \\ -\frac{\cos \theta}{r} N_n & -\frac{\sin \theta}{r} N_{0n} & -\frac{\sin \theta}{r} N_{1n} \\ \frac{1}{l_i} & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Параметры δ_i определяются из вариационного статического уравнения

$$\delta I = 0. \quad (12)$$

Здесь $I = U_k - \int_{L_u} P_i u_i^o dL$, где L_u — часть контура оболочки, на которой заданы обобщенные перемещения u_i^o , u_k — дополнительная упругая энергия, которая для осесимметричного нагружения оболочки выписывается в виде

$$U_k = \frac{1}{2Eh} \iint_S (T_1^2 - 2\nu T_1 T_2 + T_2^2) dS + \frac{6}{Eh^3} \iint_S (M_1^2 - 2\nu M_1 M_2 + M_2^2) dS, \quad (13)$$

S — поверхность срединной поверхности оболочки.

Сохраняя векторную формулу записи

$$U_k = \frac{1}{2Eh} \iint_S \{\sigma\}^T [D] \{\sigma\} dS, \quad (14)$$

где $[D]$ — матрица упругости

$$[D] = \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12}{h^2} & -\frac{12\nu}{h^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12\nu}{h^2} & \frac{12}{h^2} \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Подставив (8) в (14), получим с учетом симметрии матрицы $[D]$

$$U_k = \frac{1}{2Eh} \iint_S \{\bar{\sigma}\}^T [D] \{\bar{\sigma}\} dS + \frac{1}{Eh} \iint_S \{\bar{\sigma}\}^T [D] \{\bar{\bar{\sigma}}\} dS + \frac{1}{2Eh} \iint_S \{\bar{\bar{\sigma}}\}^T [D] \{\bar{\bar{\sigma}}\} dS. \quad (16)$$

Так как $\bar{\bar{\sigma}}$ — известный вектор безмоментного состояния, третий член U не войдет в уравнение (12).

При дискретизации на конечные элементы разобьем область S на совокупность областей S_i :

$$U'_k = \frac{1}{2Eh} \sum_{i=1}^M \iint_{S_i} \{\delta\}^{iT} [B]^{iT} [D] [B]^i \{\delta\}^i dS = \frac{1}{2Eh} \sum_{i=1}^M \{\delta\}^{iT} [k]^i \{\delta\}^i, \quad (17)$$

$$[k]^i = \iint_{S_i} [B]^{iT} [D] [B]^i dS, \quad (18)$$

$$U''_k = \frac{1}{Eh} \sum_{i=1}^M \iint_{S_i} \{\delta\}^{iT} [B]^{iT} [D] \{\bar{\bar{\sigma}}\} dS = \frac{1}{Eh} \sum_{i=1}^M \{\delta\}^{iT} [C]^i, \quad (19)$$

$$[C]^i = \iint_{S_i} [B]^{iT} [D] \{\bar{\bar{\sigma}}\} dS. \quad (20)$$

Учитывая (14), (17), и (19) обозначим через I_0 варьируемую часть функционала I , которую можно привести к виду

$$I_0 = \frac{1}{2Eh} \sum_{i=1}^M \{\delta\}^{iT} [k]^i \{\delta\}^i + \frac{1}{Eh} \sum_{i=1}^M \{\delta\}^{iT} [C]^i - \int_{L_u} P_i u_i^o dL. \quad (21)$$

Далее следует стандартная процедура формирования ансамбля относительно вектора узловых параметров системы $\{F\}^T = \{F_1, \Psi_1, \Psi'_1; F_2, \Psi_2, \Psi'_2; \dots \Psi'_{M+1}\}$.

Очевидно, вариационное уравнение (12) приведем к системе линейных алгебраических уравнений относительно параметров вектора $\{F\}$, решение которой позволяет определить приближенное значение обобщенных усилий в элементе.

Рассмотренный метод может оказаться предпочтительным по сравнению с кинематическим методом для расчета оболочек, условия закрепления которых накладывают основные ограничения на напряженное состояние. В этом случае принцип Кастилиано формируется относительно статически допустимых полей напряжений. С помощью функций

напряжения такие поля могут быть определены численным методом конечных элементов. Влияние статических граничных условий особенно велико при расчете краевого эффекта. Определение статически уравновешенных полей напряжений с помощью функций напряжения и МКЭ открывает дополнительные возможности определения нижней границы предельной нагрузки, что невозможно кинематическим методом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чернина В.С. Статика тонкостенных оболочек вращения. — М.: Наука, 1968. — 455 с.
2. Колкунов Н.В. Основы расчета упругих оболочек. — М.: Высшая школа, 1972. — 296 с.
3. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. М.: Мир, 1986. — 318 с.