

УДК 532. 529

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПУЛЬСОВОГО ДВИЖЕНИЯ КРОВИ В СОСУДАХ

© 2003 Н. Д. Вервейко, П. П. Сумец, А. А. Воронков

Воронежский государственный университет

В работе представлены: реологическая модель крови как суспензии недеформируемых твердых частиц в лимфе и закономерности движения такой модельной жидкости в сосудах. В случае стационарного движения крови в сосудах круглого сечения профиль скорости в основном соответствует параболическому профилю течения Пуазейля вязкой жидкости с добавками гармонического вида в зависимости от радиуса частиц. Путем осреднения по площади поперечного сечения сосуда проведена редукция общей двумерной нестационарной задачи к одномерной нестационарной. В случае нестационарного пульсового движения крови исследуемая математическая модель допускает распространение волн, затухание которых обусловлено как влиянием вязкости, так и наличием структуры крови за счет эритроцитов.

ВВЕДЕНИЕ

Роль математического моделирования при изучении системы кровообращения с каждым годом возрастает, что связано с пониманием сложности исследуемого объекта и большим числом задач, которые можно решить только путем математического моделирования. Развитие гемодинамики побудило исследователей рассматривать сосуды как упруго-сжимаемые трубки. Модель сжимаемой жидкости, текущей в упруго-сжимаемых сосудах, позволила описать распространение пульсовых волн давления в кровеносных сосудах. В конце XIX-го века О. Франк предложил одну из первых моделей, описывающих движение крови в крупных сосудах в терминах пульсовых волн. В современных работах [1—3, 5] Т. Педли, А. С. Вольмира, Н. Н. Савицкого, С. А. Регирера приведены обширные исследования по изучению скорости распространения и амплитуды пульсовой волны кровяного давления при различных условиях течения крови на основе линейных и нелинейных математических моделей системы кровообращения человека. Исторически сложилось так, что при моделировании движения крови в кровеносных сосудах предполагалось, что кровь является вязкой несжимаемой жидкостью. Такое допущение позволило описать течение крови в крупных цилиндрических сосудах и получить распределение скоростей течения по

радиусу, как для стационарного, так и для нестационарного течения. При этом полагалось, что кровь является ньютоновской жидкостью. По мере накопления экспериментальных данных о физических свойствах крови, а также новых эффектов, наблюдаемых в кровотоке, было предложено несколько новых моделей для их описания. В частности, было установлено, что кровь обладает внутренней структурой, представляя собой суспензию эритроцитов в плазме. Этот факт указывает на то, что, моделируя течение крови, следует учитывать структуру крови. Ниже приводится исследование математической модели, учитывающей микроструктуру крови, текущей в упруго-деформируемых сосудах.

ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ

Рассматривается вязкая жидкость с наполнителем из твердых частиц, моделирующая кровь с учетом эритроцитов. Предполагается, что твердые частицы распределены в жидкости равномерно, образуя в ней микроструктуру с масштабом h (рис. 1). Величина h считается малой по сравнению с размерами области течения и определяется как характерное расстояние между соседними твердыми частицами.

В качестве реологического уравнения среды использовано уравнение состояния линейно-сжимаемой вязкой жидкости:

$$p_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad \frac{p}{\rho} = K, \quad (1)$$

где p_{ij} , δ_{ij} , e_{ij} — компоненты тензора напряжений, единичного тензора и тензора скоростей деформаций соответственно; p — гидродинамическое давление; μ — динамический коэффициент вязкости; ρ — плотность; K — коэффициент сжатия.

Для учета микроструктуры введен конечно-разностный тензор скоростей деформаций, который характеризует кинематическое состояние представительного элемента среды, имеющего конечные размеры h :

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta v_i}{\Delta x_j} + \frac{\Delta v_j}{\Delta x_i} \right), \quad \frac{\Delta v_i}{\Delta x_j} = \frac{v_i(x_j + h) - v_i(x_j - h)}{2h}, \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (2)$$

Разложение выражения (2) в ряд по степеням h дает:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta v_i}{\Delta x_j} &= \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 v_i}{\partial x_j^3} + O(h^4), \\ e_{ij} &= e_{ij}^* + \frac{h^2}{6} \tilde{e}_{ij} + O(h^4), \\ e_{ij}^* &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \\ \tilde{e}_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^3 v_i}{\partial x_j^3} + \frac{\partial^3 v_j}{\partial x_i^3} \right), \end{aligned} \quad (3)$$

$(i, j = 1, 2, 3).$

Если устремить h к нулю, то выражения (3) для e_{ij} переходят в соотношения Коши, не учитывающие микроструктуру среды, когда линейные размеры представительного элемента бесконечно малы.

Уравнения движения жидкости в напряжениях в декартовой системе координат имеют вид:

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j} + \rho \left(F_i - \frac{dv_i}{dt} \right) = 0, \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (4)$$

где F_i — компоненты вектора плотности массовой силы.

Для замыкания системы уравнений (1), (3), (4) добавим уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} = 0. \quad (5)$$

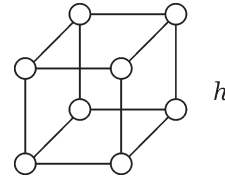


Рис. 1. Схематическое изображение представительного элемента среды

В качестве простого примера течения микроструктурной жидкости, ниже рассмотрено установившееся ламинарное движение в круглой трубе.

СТАЦИОНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ В КРУГЛОЙ ТРУБЕ

Рассмотрим движение исследуемой среды в круглой трубе [4], вызванное постоянным на произвольном участке длины L трубы градиентом давления $\partial p / \partial z = -\Delta p / L$ (рис. 2).

$$v_r \equiv v_\varphi \equiv 0, \quad v_z = v_z(r). \quad (6)$$

Связь между касательным напряжением p_{rz} и скоростью деформации с учетом величин порядка h^2 представим в виде:

$$p_{rz} = \mu \left[\frac{dv_z}{dr} + \frac{h^2}{6} \frac{d^3 v_z}{dr^3} \right]. \quad (7)$$

Уравнение равновесия жидкого элемента в напряжениях в осесимметричном случае дает обыкновенное дифференциальное уравнение для p_{rz} :

$$\frac{dp_{rz}}{dr} + \frac{p_{rz}}{r} = -\frac{\Delta p}{L}. \quad (8)$$

Интегрирование (8) дает:

$$p_{rz} = -\frac{\Delta p}{2L} r + \frac{C}{r}, \quad (9)$$

где постоянная C равна нулю в силу ограниченности напряжения p_{rz} на оси трубы.

Таким образом, дифференциальное уравнение для скорости имеет вид:

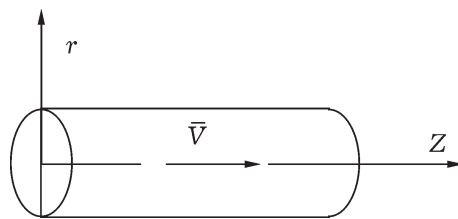


Рис. 2. Течение в круглой трубе

$$\frac{dv_z}{dr} + \frac{h^2}{6} \frac{d^3 v_z}{dr^3} = -\frac{\Delta p}{2\mu L} r, \quad (10)$$

интегрируя которое получим:

$$v_z(r) = -\frac{\Delta p}{4\mu L} r^2 + C_1 + C_2 \sin\left(\sqrt{6} \frac{r}{h}\right) + C_3 \cos\left(\sqrt{6} \frac{r}{h}\right). \quad (11)$$

Для определения постоянных C_1, C_2, C_3 достаточно трех граничных условий, в качестве которых возьмем — условие прилипания на границе, условие симметрии движения относительно оси трубы и условие совпадения скорости жидкости со скоростью твердых частиц при их качении по стенке трубы:

$$v_z(r)|_{r=R} = 0, \quad (12)$$

$$\left. \frac{dv_z}{dr} \right|_{r=0} = 0, \quad (13)$$

$$-\left. \frac{d^2 v_z}{dr^2} \right|_{r=R} + \left. \frac{d}{3} \frac{d^3 v_z}{dr^3} \right|_{r=R} = 0, \quad (14)$$

где d — характерный размер (диаметр) твердых частиц.

Исходя из (12)—(14), найдем выражение для скорости:

$$v_z(r) = \frac{\Delta p R^2}{4\mu L} \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 + \left(\frac{h}{R}\right)^2 \frac{\cos\left(\sqrt{6} \frac{R}{h}\right) - \cos\left(\sqrt{6} \frac{r}{h}\right)}{3 \cos\left(\sqrt{6} \frac{R}{h}\right) + \sqrt{6} \frac{d}{h} \sin\left(\sqrt{6} \frac{R}{h}\right)} \right]. \quad (15)$$

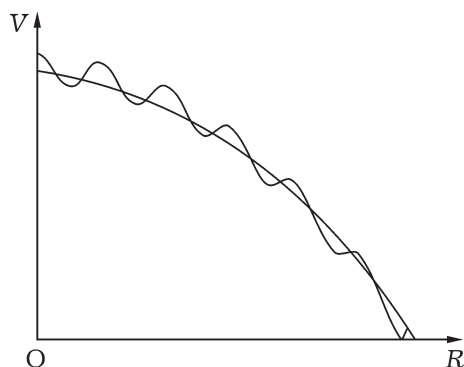


Рис. 3. Влияние микроструктуры на скорость течения вязкой жидкости в круглой трубе

Выражение (15) для скорости среды в круглой трубе при $h \rightarrow 0$ дает распределение Пуазейля скорости продольного течения обычной (без микроструктуры) жидкости. Качественное сравнение влияния наполнителя на скорость течения жидкости в круглой трубе следует из графиков, построенных в безразмерном виде для случаев обычной вязкой жидкости и жидкости с учетом наполнителя (рис. 3).

Приведем выражение для расхода рассматриваемой среды в круглом сечении трубы:

$$Q = \frac{\pi \Delta p R^4}{8\mu L} \left[1 + \left(\frac{h}{R}\right)^2 \left(\frac{2 \cos\left(\sqrt{6} \frac{R}{h}\right) - \frac{4}{\sqrt{6}} \frac{h}{R} \sin\left(\sqrt{6} \frac{R}{h}\right)}{3 \cos\left(\sqrt{6} \frac{R}{h}\right) + \sqrt{6} \frac{d}{h} \sin\left(\sqrt{6} \frac{R}{h}\right)} + \frac{\frac{2}{3} \left(\frac{h}{R}\right)^2 \left[1 - \cos\left(\sqrt{6} \frac{R}{h}\right) \right]}{3 \cos\left(\sqrt{6} \frac{R}{h}\right) + \sqrt{6} \frac{d}{h} \sin\left(\sqrt{6} \frac{R}{h}\right)} \right) \right]. \quad (16)$$

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ ТЕЧЕНИЕ КРОВИ В УПРУГО-ДЕФОРМИРУЕМЫХ СОСУДАХ

Совместное движение жидкости в сосуде и стенок сосуда описываются уравнениями типа Навье–Стокса, неразрывности и движения стенки сосуда в цилиндрических координатах, которые связаны между собой совместными граничными условиями. Сформулируем совместные уравнения движения в безразмерном виде [7—8]. Для этих уравнений введем следующие характерные величины:

$$z = Lz_1, r = Rr_1, v_z = v^* v_{z1}, v_r = v^* \frac{R^2}{L^2} v_{r1}, \quad (17)$$

$$t = \frac{L}{C_0} t_1, p = \frac{L\mu v^*}{R^2} p_1, \rho = \frac{L\mu v^*}{R^2} \rho_1,$$

где L и R — характерные длина и радиус сосуда; C_0 — скорость звука в жидкости; v^* — характерная осевая скорость, t — время. Характерная скорость поперечного движения $v^* R^2 / L^2$ получена исходя из того, что характерное время T_R^* установления поперечного движения связано с соответствующим временем установления продольного движения соотношением $T_R^* = T_L^* R / L$.

Пусть u^* — характерное радиальное смещение стенки сосуда, H — толщина стенки. Введем следующие безразмерные переменные для уравнений движения материала стенки сосуда:

$$r = Rr_1, z = Lz_1, u_r = u^* u_{r1}, u_z = u^* \frac{H}{R} u_{z1},$$

$$t = \frac{L}{a} t_1, a = \sqrt{\frac{\lambda_1 + 2\mu_1}{\rho_w}}, \quad (18)$$

где u_r, u_z — радиальное и осевое смещение стенки; λ_1, μ_1 — параметры Ламе; ρ_w — плотность материала стенки сосуда.

С учетом (17) уравнения движения жидкости имеют вид:

$$\rho_1 \left[\delta^3 \alpha \frac{\partial v_{r1}}{\partial t_1} + \delta^4 \alpha^2 v_{r1} \frac{\partial v_{r1}}{\partial r_1} + \delta^3 \alpha^2 v_{z1} \frac{\partial v_{r1}}{\partial z_1} \right] =$$

$$= -\frac{\partial p_1}{\partial r_1} + \left(2 + \frac{\lambda}{\mu} \right) \delta^3 \frac{\partial^2 v_{r1}}{\partial r_1^2} + \delta^5 \frac{\partial^2 v_{r1}}{\partial z_1^2} +$$

$$+ \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} \right) \delta^2 \frac{\partial^2 v_{z1}}{\partial r_1 \partial z_1} + \left(2 + \frac{\lambda}{\mu} \right) \delta^3 \frac{1}{r_1} \frac{\partial v_{r1}}{\partial r_1} -$$

$$- \left(2 + \frac{\lambda}{\mu} \right) \delta^3 \frac{v_{r1}}{r_1^2} + \frac{1}{6} \left(\left(2 + \frac{\lambda}{\mu} \right) \delta^3 \beta^2 \frac{\partial^4 v_{r1}}{\partial r_1^4} + \right.$$

$$\left. + \delta^7 \beta^2 \frac{\partial^4 v_{r1}}{\partial z_1^4} + \delta^2 \beta^2 \frac{\partial^4 v_{z1}}{\partial r_1^3 \partial z_1} + \right.$$

$$\left. + \frac{\lambda}{\mu} \delta^4 \beta^2 \frac{\partial^4 v_{z1}}{\partial r_1 \partial z_1^3} + 2\delta^3 \beta^2 \frac{1}{r_1} \frac{\partial^3 v_{r1}}{\partial r_1^3} \right),$$

$$\rho_1 \left[\alpha \frac{\partial v_{z1}}{\partial t_1} + \delta \alpha^2 v_{r1} \frac{\partial v_{z1}}{\partial r_1} + \alpha^2 v_{z1} \frac{\partial v_{z1}}{\partial z_1} \right] =$$

$$= -\frac{\partial p_1}{\partial z_1} + \frac{\partial^2 v_{z1}}{\partial r_1^2} + \left(2 + \frac{\lambda}{\mu} \right) \delta^2 \frac{\partial^2 v_{z1}}{\partial z_1^2} +$$

$$+ \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} \right) \delta^3 \frac{\partial^2 v_{r1}}{\partial r_1 \partial z_1} + \frac{1}{r_1} \frac{\partial v_{z1}}{\partial r_1} + \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} \right) \delta^3 \frac{1}{r_1} \frac{\partial v_{r1}}{\partial z_1} +$$

$$+ \frac{1}{6} \left(\beta^2 \frac{\partial^4 v_{z1}}{\partial r_1^4} + \left(2 + \frac{\lambda}{\mu} \right) \delta^4 \beta^2 \frac{\partial^4 v_{z1}}{\partial z_1^4} + \right.$$

$$+ \frac{\lambda}{\mu} \delta^3 \beta^2 \frac{\partial^4 v_{r1}}{\partial r_1^3 \partial z_1} + \delta^5 \beta^2 \frac{\partial^4 v_{r1}}{\partial r_1 \partial z_1^3} +$$

$$\left. + \beta^2 \frac{1}{r_1} \frac{\partial^3 v_{z1}}{\partial r_1^3} + \delta^5 \beta^2 \frac{1}{r_1} \frac{\partial^3 v_{r1}}{\partial z_1^3} \right).$$

Уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t_1} + \delta \alpha \frac{1}{r_1} \frac{\partial}{\partial r_1} (\rho_1 r_1 v_{r1}) + \alpha \frac{\partial}{\partial z_1} (\rho_1 v_{z1}) = 0. \quad (20)$$

Для уравнений деформирования стенок сосуда получим:

$$\delta \gamma \left(1 - \frac{b^2}{a^2} \right) \frac{\partial^2 u_{z1}}{\partial r_1 \partial z_1} + \frac{\partial^2 u_{r1}}{\partial r_1^2} + \frac{1}{r_1} \frac{\partial u_{r1}}{\partial r_1} - \frac{u_{r1}}{r_1^2} +$$

$$+ \delta^2 \frac{b^2}{a^2} \frac{\partial^2 u_{r1}}{\partial z_1^2} = \delta^2 \frac{\partial^2 u_{r1}}{\partial t_1^2},$$

$$\delta \left(1 - \frac{b^2}{a^2} \right) \left(\frac{1}{r_1} \frac{\partial u_{r1}}{\partial z_1} + \frac{\partial^2 u_{z1}}{\partial r_1 \partial z_1} \right) + \delta^2 \gamma \frac{\partial^2 u_{z1}}{\partial z_1^2} +$$

$$+ \gamma \frac{b^2}{a^2} \left(\frac{1}{r_1} \frac{\partial u_{z1}}{\partial r_1} + \frac{\partial^2 u_{z1}}{\partial r_1^2} \right) = \delta^2 \gamma \frac{\partial^2 u_{z1}}{\partial t_1^2}, \quad (21)$$

где $\gamma = H/R, \delta = R/L, \alpha = v^*/C_0, b^2 = \mu_1/\rho_w$.

Граничные условия на внутренней стенке сосуда (при $r_1 = 1 + \varepsilon u_{r1}|_{r_1=1}$), в которых напряжения выражены через перемещения со стороны стенки и через скорости со стороны жидкости, также запишем в безразмерном виде:

$$\frac{\lambda_1}{\mu_1} \left(\delta \gamma \frac{\partial u_{z1}}{\partial z_1} + \frac{\partial u_{r1}}{\partial r_1} + \frac{u_{r1}}{r_1} \right) + 2 \frac{\partial u_{r1}}{\partial r_1} =$$

$$= B \left[-p_1 + \left(2 + \frac{\lambda}{\mu} \right) \delta^3 \frac{\partial v_{r1}}{\partial r_1} + \frac{\lambda}{\mu} \left(\delta^3 \frac{v_{r1}}{r_1} + \delta^2 \frac{\partial v_{z1}}{\partial z_1} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{6} \left(\left(2 + \frac{\lambda}{\mu} \right) \delta^3 \beta^2 \frac{\partial^3 v_{r1}}{\partial r_1^3} + \frac{\lambda}{\mu} \delta^4 \beta^2 \frac{\partial^3 v_{z1}}{\partial z_1^3} \right) \right],$$

$$\gamma \frac{\partial u_{z1}}{\partial r_1} + \delta \frac{\partial u_{r1}}{\partial z_1} =$$

$$= B \left[\delta^4 \frac{\partial v_{r1}}{\partial z_1} + \delta \frac{\partial v_{z1}}{\partial r_1} + \frac{1}{6} \left(\delta^6 \beta^2 \frac{\partial^3 v_{r1}}{\partial z_1^3} + \delta \beta \frac{\partial^3 v_{z1}}{\partial r_1^3} \right) \right], \quad (22)$$

где $B = \mu v^* L / \mu_1 u^* R, \varepsilon = u^*/R$.

На внутренней границе также имеют место кинематические условия совпадения движения жидкости и стенки сосуда:

$$\delta \alpha v_{r1} = \varepsilon \frac{\partial u_{r1}}{\partial t_1}, \quad \alpha v_{z1} = \delta \varepsilon \gamma \frac{\partial u_{z1}}{\partial t_1}. \quad (23)$$

Граничные условия на внешней стенке сосуда (при $r_1 = 1 + \gamma + \varepsilon u_{r1}|_{r_1=1+\gamma}$) имеют вид:

$$\frac{\lambda_1}{\mu_1} \left(\delta \gamma \frac{\partial u_{z1}}{\partial z_1} + \frac{\partial u_{r1}}{\partial r_1} + \frac{u_{r1}}{r_1} \right) + 2 \frac{\partial u_{r1}}{\partial r_1} = 0,$$

$$\gamma \frac{\partial u_{z1}}{\partial r_1} + \delta \frac{\partial u_{r1}}{\partial z_1} = 0. \quad (24)$$

Заметим, что в полученных уравнениях величины δ , α , β и ε считаются малыми по сравнению с единицей. Для решения совместной системы уравнений движения жидкости и стенок сосуда необходимо добавить еще граничные условия на торцах $z = 0$, $z = L$, которые определяются исходя из характера конкретной задачи. Начальные условия состоят в задании скорости движения жидкости, давления и перемещения стенок сосуда в начальный момент времени. С точки зрения систем уравнений в частных производных уравнения (19)—(21) являются существенно нелинейными, поэтому аналитическое их решение не представляется возможным. Для построения приближенного решения аналитическим способом, воспользуемся аппаратом теории малого параметра.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПУЛЬСОВЫХ ДВИЖЕНИЙ КРОВИ В СОСУДАХ

Полагая малыми параметры δ , α , β и ε проведем исследование общей задачи в нулевом и первом приближениях [7].

Нулевое приближение. Считая в уравнениях (19)—(24) равными нулю все члены, содержащие указанные параметры, получим соответственно:

$$\frac{\partial p_1^0}{\partial r_1} = 0, \quad (25)$$

$$\frac{\partial p_1^0}{\partial z_1} = \frac{\partial^2 v_{z1}^0}{\partial r_1^2} + \frac{1}{r_1} \frac{\partial v_{z1}^0}{\partial r_1},$$

$$\frac{\partial p_1^0}{\partial t_1} = 0, \quad (26)$$

$$\frac{\partial^2 u_{r1}^0}{\partial r_1^2} + \frac{1}{r_1} \frac{\partial u_{r1}^0}{\partial r_1} - \frac{u_{r1}^0}{r_1^2} = 0, \quad (27)$$

$$\frac{1}{r_1} \frac{\partial u_{z1}^0}{\partial r_1} + \frac{\partial^2 u_{z1}^0}{\partial r_1^2} = 0,$$

при $r_1 = 1$:

$$\left(2 + \frac{\lambda_1}{\mu_1}\right) \frac{\partial u_{r1}^0}{\partial r_1} + \frac{\lambda_1}{\mu_1} \frac{u_{r1}^0}{r_1} = -B p_1^0, \quad \frac{\partial u_{z1}^0}{\partial r_1} = 0, \quad (28)$$

при $r_1 = 1 + \gamma$:

$$\left(2 + \frac{\lambda_1}{\mu_1}\right) \frac{\partial u_{r1}^0}{\partial r_1} + \frac{\lambda_1}{\mu_1} \frac{u_{r1}^0}{r_1} = 0, \quad \frac{\partial u_{z1}^0}{\partial r_1} = 0. \quad (29)$$

В нулевом приближении жидкость движется в продольном направлении $v_{z1}^0 \neq 0$. Давление не изменяется по радиусу, а зависит от z_1 и t_1 ; плотность жидкости постоянна по времени. Для случая задания в сечении градиента давления $\partial p_1^0 / \partial z_1 = -\Delta p / L$ поле скоростей меняется по r_1 так же как в течении Пуазейля (см. рис. 3).

$$v_{z1}^0(r_1) = \frac{\Delta p R^2}{4\mu L} [1 - r_1^2]. \quad (30)$$

В рассматриваемом квазистатическом приближении $\delta = 0$, $\alpha = 0$ учет величин порядка β^2 приводит к полученному ранее распределению (15) скорости в сечении сосуда:

$$v_{z1}^0(r_1) = \frac{\Delta p R^2}{4\mu L} \left[1 - r_1^2 + \beta^2 \frac{\cos\left(\frac{\sqrt{6}}{\beta}\right) - \cos\left(\frac{\sqrt{6}r_1}{\beta}\right)}{3 \cos\left(\frac{\sqrt{6}}{\beta}\right) + \sqrt{6} \frac{d_1}{\beta} \sin\left(\frac{\sqrt{6}}{\beta}\right)} \right], \quad (31)$$

где $d_1 = d / R$.

В нулевом приближении стенка сосуда деформируется следующим образом. Продольное перемещение определяется решением второго из уравнений (27):

$$u_{z1}^0 = \frac{C_1}{r_1} + C_2, \quad (32)$$

при граничных условиях (28)—(29) так, что $C_1 = 0$ и $u_{z1}^0 = C = const$. Таким образом, в продольном направлении стенка сосуда или покоится ($C = 0$) или перемещается как жесткое целое. Этот факт соответствует известной гипотезе плоских сечений, согласно которой стенки сосуда в некотором сечении расширяются или сжимаются в радиальном направлении независимо от соседних сечений. В радиальном направлении стенки сосуда перемещаются квазистатически по закону, определяемому решением первого из уравнений (27):

$$u_{r1}^0 = \frac{C_1}{r_1} + C_2 r_1, \quad (33)$$

что позволяет вычислить изменение объема элемента сосуда в некотором сечении за счет мгновенно приложенного давления p_1^0 .

Первое приближение. В первом приближении исследование совместной нестационар-

ной задачи течения жидкости с учетом микроструктуры в упруго-деформируемом сосуде приводит к системе уравнений в частных производных по t_1, r_1, z_1 для давления и компонент скорости:

$$\frac{\partial p_1^1}{\partial r_1} = 0,$$

$$\rho_1^1 \alpha \frac{\partial v_{z_1}^1}{\partial t_1} = -\frac{\partial p_1^1}{\partial z_1} + \frac{\partial^2 v_{z_1}^1}{\partial r_1^2} + \frac{1}{r_1} \frac{\partial v_{z_1}^1}{\partial r_1} + \frac{\beta^2}{6} \left(\frac{\partial^4 v_{z_1}^0}{\partial r_1^4} + \frac{1}{r_1} \frac{\partial^3 v_{z_1}^0}{\partial r_1^3} \right), \quad (34)$$

$$\frac{\partial \rho_1^1}{\partial t_1} + \delta \alpha \frac{1}{r_1} \frac{\partial}{\partial r_1} (\rho_1^1 r_1 v_{r_1}^1) + \alpha \frac{\partial}{\partial z_1} (\rho_1^1 v_{z_1}^1) = 0, \quad (35)$$

а также для компонент перемещения стенок сосуда:

$$\frac{\partial^2 u_{r_1}^1}{\partial r_1^2} + \frac{1}{r_1} \frac{\partial u_{r_1}^1}{\partial r_1} - \frac{u_{r_1}^1}{r_1^2} = 0,$$

$$\delta \left(1 - \frac{b^2}{a^2} \right) \left(\frac{1}{r_1} \frac{\partial u_{r_1}^0}{\partial z_1} + \frac{\partial^2 u_{r_1}^0}{\partial r_1 \partial z_1} \right) + \gamma \frac{b^2}{a^2} \left(\frac{1}{r_1} \frac{\partial u_{z_1}^1}{\partial r_1} + \frac{\partial^2 u_{z_1}^1}{\partial r_1^2} \right) = 0. \quad (36)$$

При учете граничных условий при $r_1 = 1$ и $r_1 = 1 + \gamma$ необходимо принимать во внимание общий порядок точности вычислений в уравнениях, что приводит к учету граничных условий в нулевом приближении. В самом деле:

$$\begin{aligned} F(x_0 + \delta \xi) &= F^0(x_0 + \delta \xi) + \delta F^1(x_0 + \delta \xi) + o(\delta) = \\ &= F^0(x_0) + \delta \xi \frac{\partial F^0(x_0)}{\partial x} + \delta F^1(x_0) + o(\delta). \end{aligned} \quad (37)$$

Из (36) следует, что в первом приближении стенка сосуда деформируется в радиальном направлении квазистатически, как и в нулевом приближении. В продольном направлении появляется перемещение $u_{z_1}^1$, определяемое распределением давления $p_1^1(z_1)$ и не зависящее от радиуса r_1 . Таким образом, в первом приближении по δ, β^2 для деформирования стенок сосуда выполняется квазистатическая гипотеза плоских сечений, и тем самым граничные условия для скорости те-

чения жидкости принимает вид условий прилипания:

при $r_1 = 1$:

$$v_{r_1}^1 = 0, \quad v_{z_1}^1 = 0, \quad (38)$$

Для исследования поля скоростей $v_{r_1}^1, v_{z_1}^1$ течения жидкости в сосуде упростим систему уравнений (34)-(35) путем ее осреднения по площади поперечного сечения. Для этого проинтегрируем указанные уравнения по r_1 в пределах от нуля до единицы. Редуцированная система уравнений имеет вид:

$$\begin{aligned} -f \frac{\partial p_1^1}{\partial z_1} &= \frac{\partial M_1^1}{\partial t_1} + \frac{\Lambda}{2D} M_1^1 |w_1^1| + \frac{\beta^2}{6} 2\pi \left(r_1 \frac{\partial^3 v_{z_1}^0}{\partial r_1^3} \right)_{r_1=1}, \\ -f \frac{\partial p_1^1}{\partial t_1} &= c^2 \frac{\partial M_1^1}{\partial z_1}, \end{aligned} \quad (39)$$

где $D = 2R, f = \pi R^2$ — площадь поперечного сечения; w — средняя по сечению скорость:

$$w(z, t) = \int_f v_z(r, z, t) df;$$

$M = \rho w f$ — массовый расход в сечении; Λ — коэффициент гидравлического сопротивления; c — скорость распространения пульсовых волн в сосуде.

Система уравнений в частных производных (39) для давления p_1^1 жидкости в сосуде и массового расхода M_1^1 имеет гиперболический тип и допускает распространение волн расширения-сжатия сосудов.

$$p_1^1 = f_1(z_1 + ct_1) + f_2(z_1 - ct_1). \quad (40)$$

При $\beta \rightarrow 0$ система уравнений (39) описывает классическую одномерную задачу распространения волн гидроудара [6], для которых выполняется условие:

$$\Delta p = \rho c \Delta w, \quad (41)$$

связывающее превышения давления и скорости течения жидкости в пульсовой волне.

Как следует из (39), слагаемое, определяемое микроструктурой (эритроцитами) может быть вычислено исходя из квазистатического распределения v_z^0 скорости в нулевом приближении:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^3 v_z^0}{\partial r_1^3} \right|_{r_1=1} &= \\ &= -\frac{\Delta p R^5 6\sqrt{6}}{2\mu L} \frac{\sin(\sqrt{6}/\beta)}{3 \cos(\sqrt{6}/\beta) + \sqrt{6} d_1 \sin(\sqrt{6}/\beta)}. \end{aligned} \quad (42)$$

При малом β выражение в правой части (42) упрощается:

$$\left. \frac{\partial^3 v_z^0}{\partial r_1^3} \right|_{r_1=1} = -\frac{\Delta p R^5 6\sqrt{6}}{2\mu L} \frac{1}{\sqrt{6}d_1}, \quad (43)$$

и система (39) принимает вид:

$$\begin{aligned} -f \frac{\partial p_1^1}{\partial z_1} &= \frac{\partial M_1^1}{\partial t_1} + 2 \frac{\Lambda}{\pi D^3} M_1^1 |w_1^1| - \beta^2 \frac{\Delta p R^5}{\mu L d_1}, \\ -f \frac{\partial p_1}{\partial t_1} &= c^2 \frac{\partial M_1^1}{\partial z_1}. \end{aligned} \quad (44)$$

Как следует из (44), учитываемая в задаче микроструктура крови играет ту же роль, что и движущий жидкость перепад давлений и таким образом микроструктура крови уменьшает гидравлическое сопротивление движению крови в сосудах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Регирер С. А. Гидродинамика кровообращения. М.: Мир. 1971. 267 с.
2. Педли Т. Гидродинамика крупных кровеносных сосудов. М.: Мир. 1983. 400 с.
3. Вольмир А. С. Оболочки в потоке жидкости и газа: Задачи гидроупругости. М.: Наука. 1979. 320 с.
4. Воронков А. А. Особенности течения линейно-вязких жидкостей с учетом наполнителя из твердых частиц. // Математические модели и операторные уравнения. Воронеж: ВорГУ. 2003. Т. 2. С. 24—34.
5. Савицкий Н. Н. Биофизические основы кровообращения и клинические методы их изучения. Л.: Медицина. 1974. 404 с.
6. Вервейко Н. Д. Лучевая теория упруговязкопластических волн и волн гидроудара. Воронеж: ВорГУ. 1997. 204 с.
7. Файзуллаев Д. Ф., Наврузов К. Гидродинамика пульсирующих потоков. Ташкент: Фан. 1986. 190 с.
8. Сумец П. П. Математическое моделирование лучевым методом распространения волн в трубопроводах с учетом их особенностей: Дис. канд. физ.-мат. наук. Воронеж. 2003. 146 с.