УДК 537.86:519.23

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СОВМЕСТНЫХ ОЦЕНОК ПАРАМЕТРОВ СИГНАЛА*

© 2003 А. П. Трифонов, А. В. Захаров, А. М. Воробьев

Воронежский государственный университет

Рассмотрены асимптотические методы вычисления характеристик оценок максимального правдоподобия при различных условиях регулярности решающей статистики. На основе аддитивно-мультипликативного представления моментов решающей статистики получены общие асимптотические выражения для характеристик совместных оценок параметров сигнала при частичном или полном нарушении условий регулярности.

ВВЕДЕНИЕ

Во многих разделах науки и техники актуальна задача измерения (оценки) параметров сигналов, искаженных случайными помехами. Например, задача оценки параметров сигналов возникает в радиофизике, радиоастрономии, гидроакустике, сейсмологии и геологии, а также в различных приложениях радиоэлектроники — в радиолокации и радионавигации, в радиосвязи, радиоуправлении, телеметрии, в технической диагностике, при управлении производственными процессами и др. Одним из наиболее конструктивных методов синтеза алгоритмов оценки параметров сигналов на фоне помех является метод *максимального правдоподобия* [1—4]. Применение метода максимального правдоподобия позволят получить относительно простые и весьма эффективные алгоритмы оценки параметров сигналов, требующие минимального количества априорной информации. Однако, окончательный вывод о возможности использования оценок максимального правдоподобия в различных приложениях можно сделать лишь на основе исследования характеристик оценок. Поэтому важное значение приобретают методы расчета характеристик оценок параметров сигналов, в том числе и совместных оценок максимального правдоподобия.

Целесообразность применения тех или иных методов расчета характеристик совместных оценок параметров сигналов существенно зависит от аналитических свойств решающей статистики исследуемого алгоритма оценки. В частности, при исследовании точности оценок максимального правдоподобия (ОМП) существенным является свойство регулярности решающей статистики алгоритма оценки — логарифма функционала отношения правдоподобия (ФОП) как функции оцениваемых параметров сигнала [4—7 и др.]. Гауссовский логарифм ФОП является регулярным по заданному параметру, если существуют, по крайней мере, непрерывные вторые производные первых двух моментов логарифма ФОП, взятые по этому параметру [4—7]. Параметры сигнала, для которых указанные условия регулярности выполняются, называют регулярными [6, 7]. Используя метод малого параметра (МП) [3, 4, 6], можно найти асимптотически точные (с ростом отношения сигнал/шум (ОСШ)) выражения для характеристик *совместных ОМП регулярных параметров* сигнала, наблюдаемого на фоне помех.

Однако, существует широкий класс сигналов, называемых разрывными [5—7] или неаналитическими [8]. Условия регулярности логарифма ФОП по некоторым параметрам разрывных сигналов не выполняются. Такие параметры, следуя [7, 9], будем называть разрывными. Простейшими примерами разрывных параметров являются время прихода и длительность прямоугольных видео- и радиоимпульсов, частота узкополосного радиосигнала с равномерным в ограниченной полосе частот спектром, время задержки некоторых дискретных сложных сигналов и др. [7, 8, 10, 11]. Метод МП [3, 4, 6] нельзя использовать для нахождения характеристик ОМП

* Приведенные результаты получены при поддержке CRDF и Минобразования РФ (проект VZ-010-0).

разрывных параметров, так как указанный метод предполагает регулярность логарифма ФОП. В противном случае получаем, например, нулевое значение дисперсии оценки разрывного параметра и другие некорректные результаты.

Для расчета асимптотически точных (с ростом ОСШ) выражений для характеристик *ОМП разрывного параметра* сигнала в [6 (п. 5.3), 7 (гл. 6)] предложен метод локально-марковской аппроксимации (ЛМА). Идея метода ЛМА сводится к аппроксимации логарифма ФОП или его приращений марковским или локально-марковским случайным процессом. Последующее использование математического аппарата теории марковских процессов позволяет получить асимптотически точные выражения для характеристик ОМП разрывного параметра сигнала. Однако, метод ЛМА непосредственно применим только для расчета характеристик *ОМП одного разрывного параметра сигнала* при условии, что остальные параметры априори известны.

На практике обработка сигналов производится, как правило, в условиях априорной неопределенности, когда кроме информативных параметров сигнала, подлежащих оценке, неизвестны и другие (неинформативные) параметры. Это приводит к необходимости совместного оценивания нескольких неизвестных параметров сигнала, некоторые из которых могут быть разрывными. Метод ЛМА [6, 7] неприменим для расчета характеристик совместных оценок нескольких разрывных параметров.

В [7, 9] предложена методика вычисления асимптотически точных (с ростом ОСШ) выражений для характеристик *совместных ОМП одного разрывного и нескольких регулярных параметров*. Однако результаты [7, 9] справедливы только для случая оценки параметров квазидетерминированных сигналов. Характеристики совместных оценок, полученные в этих работах неприменимы в более общем случае, когда обрабатываемый сигнал имеет случайную субструктуру [12]. Кроме того, результаты [7, 9] неприменимы и для расчета характеристик совместных ОМП нескольких разрывных и нескольких регулярных параметров сигнала.

Таким образом, общие методы расчета характеристик *совместных ОМП нескольких разрывных параметров* сигнала в настоящее время не известны. Не существует также общих методов расчета характеристик *совместных ОМП нескольких разрывных и одного или нескольких регулярных параметров* сигнала. Характеристики совместных оценок нескольких разрывных и регулярных параметров получены в настоящее время только для некоторых частных приложений. Отметим также, что методика [7, 9] вычисления характеристик совместных ОМП одного разрывного и нескольких регулярных параметров требует дальнейшего обобщения на широкий класс сигналов со случайной субструктурой [12]. Все это затрудняет анализ эффективности радиофизических информационных систем с использованием разрывных моделей сигналов.

Указанные трудности при расчете характеристик совместных ОМП разрывных параметров сигнала можно преодолеть, если моменты логарифма ФОП, как функции разрывных параметров сигнала, допускают *аддитивно-мультипликативное представление*. В этом случае математическое ожидание, корреляционная функция и другие моменты логарифма ФОП выражаются в виде суммы конечного числа слагаемых, каждое из которых является произведением функций только одного параметра. Тогда для нахождения асимптотически точных (с ростом ОСШ) выражений для характеристик совместных ОМП разрывных параметров сигнала можно использовать рассматриваемый далее метод *локально-аддитивной аппроксимации* (ЛАА). Метод ЛАА позволяет свести задачу нахождения характеристик *совместных* оценок разрывных параметров сигнала к более простой задаче отыскания характеристик *раздельных* оценок соответствующих параметров. При этом для вычисления характеристик раздельных ОМП разрывных параметров сигнала можно, с учетом необходимых обобщений, использовать метод ЛМА.

Использование метода ЛАА также позволяет обобщить методику [7, 9] вычисления характеристик совместных ОМП одного разрывного и нескольких регулярных параметров на случай *совместного оценивания произвольного числа разрывных и регулярных параметров* сигнала. Для этого необходимо, чтобы моменты логарифма ФОП, как функции разрывных параметров сигнала, допускали *аддитивно-мультипликативное представление*.

Отметим, что аддитивно-мультипликативное представление моментов логарифма ФОП возможно для широкого класса параметров различных физических сигналов. Например, при оценке параметров импульса с гауссовской случайной субструктурой [12], встречающегося в радио и гидролокации, в связи, в радиоастрономии и др., такое представление моментов логарифма ФОП осуществляется как по временным, так и по частотным параметрам импульса. К этим параметрам относятся время прихода, длительность, моменты появления и исчезновения импульса, а также центральная частота и ширина полосы частот спектральной плотности его случайной субструктуры.

В п.I данной работы на основе метода МП [3, 4, 6] получены асимптотически точные (с ростом ОСШ) выражения для характеристик совместных ОМП *регулярных* параметров сигнала. В п. II на основе предлагаемого здесь метода ЛАА и метода ЛМА [6, 7] найдены асимптотические характеристики совместных ОМП *разрывных* параметров сигнала при наличии аддитивно-мультипликативного представления моментов логарифма ФОП. В п.III выполнено обобщение полученных результатов на случай совместных ОМП *разрывных и регулярных параметров* сигнала при наличии аддитивно-мультипликативного представления моментов логарифма ФОП по разрывным параметрам.

I. ХАРАКТЕРИСТИКИ СОВМЕСТНЫХ ОЦЕНОК РЕГУЛЯРНЫХ ПАРАМЕТРОВ СИГНАЛА

1. Оценки максимального правдоподобия параметров сигнала и локальные представления моментов решающей статистики

Постановка задачи оценки параметров сигнала

Пусть на вход устройства оценки в течение интервала времени $t \in [0\ ;T]$ поступает сигнал $s(t,\mathbf{\Theta}_0)$, характеризующийся вектором информационных параметров $\mathbf{\Theta}_0 = \|\ \Theta_{01}, \Theta_{02}, \ldots, \Theta_{0r}\|$, $r \geq 1$. Параметры Θ_{01}, Θ_{02}, ..., Θ_{0r} сигнала неизвестны и принимают значения из априорной области определения $\mathbf{\Theta}_0 \in \Re_\Theta$. Сигнал $s(t,\mathbf{\Theta}_0)$ наблюдается на фоне шума (случайной помехи) $n(t)$, так что обработке доступна лишь случайная смесь $x(t) = s(t,\mathbf{\Theta}_0) \otimes n(t)$ сигнала и шума. На основе реализации наблюдаемых данных $x(t)$ и имеющейся априорной информации необходимо измерить (оценить) параметры Θ_{0i}, $i = 1,2,..,r$ принимаемого сигнала $s(t,\mathbf{\Theta}_0)$.

Алгоритм оценки максимального правдоподобия

Согласно методу максимального правдоподобия [1—4], для получения совместных оценок (измерения) r неизвестных параметров Θ_{01}, $\Theta_{02}, \ldots, \Theta_{0r}$ следует на основе наблюдаемых данных $x(t)$ формировать функционал отношения правдоподобия (ФОП) $M(\mathbf{\Theta})$ или логарифм ФОП $L(\mathbf{\Theta}) = \ln M(\mathbf{\Theta})$ как функции r оцениваемых параметров $\mathbf{\Theta} = \|\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_r\|$. Тогда [1—6, 10], совместные оценки максимального правдоподобия Θ_{1m}, Θ_{2m}, ..., Θ_{rm} параметров Θ_{01}, Θ_{02}, ..., Θ_{0r} вычисляются как координаты положения абсолютного (наибольшего) максимума ФОП $M(\mathbf{\Theta}) \equiv M(\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_r)$ или логарифма ФОП $L(\mathbf{\Theta}) \equiv L(\ \Theta_1, \Theta_2, \ldots,\ \ \Theta_r)$ в пределах априорной области значений $\mathbf{\Theta} \in \Re_\Theta$:

$$(\Theta_{1m}, \Theta_{2m}, \ldots, \Theta_{rm}) = \arg\sup_{\mathbf{\Theta}\in\Re_\Theta} M(\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_r) = \\ = \arg\sup_{\mathbf{\Theta}\in\Re_\Theta} L(\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_r). \tag{1a}$$

Вектор совместных ОМП $\mathbf{\Theta}_m = \|\Theta_{1m}, \Theta_{2m}, \ldots, \Theta_{rm}\|$ параметров сигнала можно записать в виде [1—4 и др.]

$$\mathbf{\Theta}_m = \arg\sup_{\mathbf{\Theta}\in\Re_\Theta} M(\mathbf{\Theta}) = \arg\sup_{\mathbf{\Theta}\in\Re_\Theta} L(\mathbf{\Theta}). \tag{1б}$$

Выражение для ФОП (логарифма ФОП) можно найти, исходя из известного вероятностного (статистического) описания сигнала и шума.

Пусть имеется выборка $X = \|x_1, x_2, \ldots,\ \ x_N\|$, $x_i = x(t_i)$ из наблюдаемых данных $x(t)$ в моменты времени $t_i = i\Delta$, где $\Delta = T/N$ — временной шаг выборки. Обозначим $W(\mathbf{X}|\mathbf{\Theta})$ — условная плотность вероятности выборки $\mathbf{X}$ при условии, что вектор неизвестных параметров принимаемого сигнала равен $\mathbf{\Theta}$, а $W_0(\mathbf{X})$ — плотность вероятности выборки $\mathbf{X}$ при отсутствии сигнала в наблюдаемых данных. Плотность вероятности $W(\mathbf{X}|\mathbf{\Theta})$, рассматриваемая как функция параметра $\mathbf{\Theta}$, называется функцией правдоподобия, а отношение $\Pi(\mathbf{\Theta}) = W(\mathbf{X}|\mathbf{\Theta}) / W_0(\mathbf{X})$ называется отношением правдоподобия [1—4].

Рассмотрим анализ сигналов в непрерывном времени, когда обрабатывается непрерывная реализация $x(t)$ наблюдаемых данных. Тогда вместо отношения правдоподобия вводят предел

$$M(\boldsymbol{\Theta}) = \lim_{\substack{\Delta \to 0 \\ N \to \infty}} \Pi(\boldsymbol{\Theta}) = \lim_{\substack{\Delta \to 0 \\ N \to \infty}} [W(\mathbf{X}|\boldsymbol{\Theta}) / W_0(\mathbf{X})], \quad (2)$$

вычисляемый при постоянном значении $N\Delta = T$. Функционал $M(\boldsymbol{\Theta})$ (2) называют функционалом отношения правдоподобия (ФОП), а его логарифм $L(\boldsymbol{\Theta}) = \ln M(\boldsymbol{\Theta})$ является логарифмом ФОП. Согласно определению (2), ФОП $M(\boldsymbol{\Theta})$ и логарифм ФОП $L(\boldsymbol{\Theta})$ характеризуют плотность вероятности значений $\boldsymbol{\Theta}$ параметров принимаемого сигнала при заданной реализации наблюдаемых данных $x(t)$.

Характеристики решающей статистики — логарифма ФОП

Эффективность ОМП определяется статистическими свойствами логарифма ФОП. При анализе характеристик ОМП удобно представить логарифм ФОП в виде суммы $L(\boldsymbol{\Theta}) = S(\boldsymbol{\Theta}) + N(\boldsymbol{\Theta})$, где $S(\boldsymbol{\Theta}) = \langle L(\boldsymbol{\Theta}) \rangle$ — сигнальная функция (детерминированная составляющая), а $N(\boldsymbol{\Theta}) = L(\boldsymbol{\Theta}) - \langle L(\boldsymbol{\Theta}) \rangle$ — шумовая функция (флуктуационная составляющая логарифма ФОП). Здесь $\langle \ \rangle$ означает усреднение по реализациям наблюдаемых данных (по реализациям логарифма ФОП) при фиксированном истинном значении $\boldsymbol{\Theta}_0 = \|\Theta_{01}, \Theta_{02}, ..., \Theta_{0r}\|$ оцениваемых параметров сигнала [4, 6, 12].

Обозначим $A_S = \max S(\boldsymbol{\Theta})$ — величина абсолютного максимума сигнальной функции на интервале $\boldsymbol{\Theta} \in \mathfrak{R}_\Theta$, а $\sigma_N^2 = \langle N^2(\boldsymbol{\Theta}_0) \rangle$ — дисперсия шумовой функции при $\boldsymbol{\Theta} = \boldsymbol{\Theta}_0$. Не уменьшая общности результатов анализа, считаем, что $A_S > 0$. Учитывая, что ОМП инвариантна относительно нормировки логарифма ФОП на постоянную величину, введем нормированный логарифм ФОП

$$L_{\text{н}}(\boldsymbol{\Theta}) = L(\boldsymbol{\Theta}) / A_S \quad (3)$$

и представим его в виде суммы

$$L_{\text{н}}(\boldsymbol{\Theta}) = S_{\text{н}}(\boldsymbol{\Theta}) + \varepsilon N_{\text{н}}(\boldsymbol{\Theta}), \quad (4)$$

где $\varepsilon = \sigma_N / A_S$, а $S_{\text{Н}}(\boldsymbol{\Theta}) = S(\boldsymbol{\Theta}) / A_S$ и $N_{\text{н}}(\boldsymbol{\Theta}) = N(\boldsymbol{\Theta}) / \sigma_N$ — сигнальная и шумовая функции, нормированные так, что $\max S_{\text{н}}(\boldsymbol{\Theta}) = 1$, $\langle N_{\text{н}}^2(\boldsymbol{\Theta}_0) \rangle = 1$.

Следуя [1—7, 9—12 и др.] будем считать, что логарифм ФОП $L(\boldsymbol{\Theta})$ является гауссовским случайным полем [13, 14]. Тогда для вычисления характеристик совместных ОМП (1), в силу гауссовости логарифма ФОП, достаточно ограничиться учетом поведения первых двух моментов логарифма ФОП — сигнальной функции $S(\boldsymbol{\Theta})$ и кореляционной функции $K(\boldsymbol{\Theta}_1, \boldsymbol{\Theta}_2) = \langle N(\boldsymbol{\Theta}_1) N(\boldsymbol{\Theta}_2) \rangle$ шумовой функции $N(\boldsymbol{\Theta})$. Здесь обозначено $\boldsymbol{\Theta}_j = \|\Theta_{j1}, \Theta_{j2}, ..., \Theta_{jr}\|$, $j = 1, 2$. Вместо функций $S(\boldsymbol{\Theta})$ и $K(\boldsymbol{\Theta}_1, \boldsymbol{\Theta}_2)$ можно рассматривать нормированную сигнальную функцию $S_{\text{н}}(\boldsymbol{\Theta}) = S(\boldsymbol{\Theta}) / A_S$ и корреляционную функцию $K_{\text{н}}(\boldsymbol{\Theta}_1, \boldsymbol{\Theta}_2) = \langle N_{\text{н}}(\boldsymbol{\Theta}_1) N_{\text{н}}(\boldsymbol{\Theta}_2) \rangle = K(\boldsymbol{\Theta}_1, \boldsymbol{\Theta}_2) / \sigma_N^2$ нормированной шумовой функции.

Пусть сигнальная функция $S(\boldsymbol{\Theta})$ (и, следовательно, $S_{\text{н}}(\boldsymbol{\Theta})$) в пределах априорной области $\boldsymbol{\Theta} \in \mathfrak{R}_\Theta$ имеет единственный максимум в точке $\boldsymbol{\Theta} = \boldsymbol{\Theta}_0$ истинных значений оцениваемых параметров сигнала, так что $S(\boldsymbol{\Theta}_0) = A_S > 0$ и точка $\boldsymbol{\Theta} = \boldsymbol{\Theta}_0$ является внутренней точкой области определения $\mathfrak{R}_\Theta$. Считаем также, что реализации шумовой функции $N(\boldsymbol{\Theta})$ (и, следовательно, $N_{\text{н}}(\boldsymbol{\Theta})$) непрерывны с вероятностью 1. На практике эти условия обычно выполняются [3—7, 12 и др.]. Тогда выходное отношение сигнал/шум (ОСШ) z для алгоритма оценки (1) запишется в виде [4, 6]

$$z = S(\boldsymbol{\Theta}_0) \Big/ \sqrt{\langle N^2(\boldsymbol{\Theta}_0) \rangle} = A_S / \sigma_N = 1/\varepsilon. \quad (5)$$

На практике любое устройство оценки целесообразно использовать только в условиях, когда выходное ОСШ велико, что обеспечивает высокую эффективность оценок. При этом ОСШ на входе устройства обработки может быть мало. Далее будем считать, что ОСШ (5) настолько велико, что аномальные ошибки [4,6] отсутствуют и достигается *высокая апостериорная точность* оценок [4, 6, 7]. При этом ОМП $\boldsymbol{\Theta}_m$ (1) расположены в малой окрестности точки $\boldsymbol{\Theta} = \boldsymbol{\Theta}_0$ максимума сигнальной функции, а при $z \to \infty$ оценка $\boldsymbol{\Theta}_m$ сходится к $\boldsymbol{\Theta}_0$ в среднеквадратическом [4—6]. Тогда для определения характеристик ОМП (1) достаточно исследовать поведение сигнальной функции $S_{\text{н}}(\boldsymbol{\Theta})$ и корреляционной функции $K_{\text{н}}(\boldsymbol{\Theta}_1, \boldsymbol{\Theta}_2)$ шумовой функции $N_{\text{н}}(\boldsymbol{\Theta})$ в *малой окрестности* точки $\boldsymbol{\Theta} = \boldsymbol{\Theta}_0$, причем с ростом ОСШ z величина этой окрестности уменьшается.

Конкретизируем ***локальные*** (в малой окрестности точки $\boldsymbol{\Theta} = \boldsymbol{\Theta}_0$) ***представления первых двух моментов логарифма ФОП*** при оценке параметров сигнала. Считаем, что параметры Θ_i, $i = 1, 2, .., r$ являются ***регуляр-***

ными, т.е. моменты логарифма ФОП непрерывно дифференцируемы по этим параметрам [3, 4, 6, 7, 9]. Следовательно, при $\delta_\theta = \max_{i=1,2,..,r} |\Theta_i - \Theta_{0i}| \to 0$ нормированные сигнальная и шумовая функции представляются в виде разложения в r-мерный ряд Тейлора:

$$S_н(\mathbf{\Theta}) = = S_0 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} S''_{ij}(\Theta_i - \Theta_{0i})(\Theta_j - \Theta_{0j}) + o(\delta_\theta^2),$$

$$N_н(\mathbf{\Theta}) = N_0 + \sum_{i=1}^{r} N'_i(\Theta_i - \Theta_{0i}) + + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} N''_{ij}(\Theta_i - \Theta_{0i})(\Theta_j - \Theta_{0j}) + o(\delta_\theta^2), \tag{6}$$

где $o(\delta)$ — величина большего порядка малости, чем δ,

$$S_0 = S_н(\mathbf{\Theta}_0), S''_{ij} = \partial^2 S_н(\mathbf{\Theta}) / \partial\Theta_i \partial\Theta_j \big|_{\mathbf{\Theta}=\mathbf{\Theta}_0},$$
$$N_0 = N_н(\mathbf{\Theta}_0), N'_i = \partial N_н(\mathbf{\Theta}) / \partial\Theta_i \big|_{\mathbf{\Theta}=\mathbf{\Theta}_0},$$
$$N''_{ij} = \partial^2 N_н(\mathbf{\Theta}) / \partial\Theta_i \partial\Theta_j \big|_{\mathbf{\Theta}=\mathbf{\Theta}_0}. \tag{7}$$

В (6) учтено, что сигнальная функция $S_н(\mathbf{\Theta})$ непрерывно дифференцируема и достигает максимума в точке $\mathbf{\Theta} = \mathbf{\Theta}_0$, поэтому $S'_i = = \partial S_н(\mathbf{\Theta}) / \partial\Theta_i \big|_{\mathbf{\Theta}=\mathbf{\Theta}_0} = 0$. Воспользовавшись (6), нетрудно записать и разложение корреляционной функции $K_н(\mathbf{\Theta}_1, \mathbf{\Theta}_2) = \langle N_н(\mathbf{\Theta}_1) N_н(\mathbf{\Theta}_2)\rangle$ при $\delta_\theta \to 0$.

2. Применение метода малого параметра для вычисления характеристик совместных оценок регулярных параметров

Рассмотрим асимптотически точные (с ростом ОСШ (5)) выражения для характеристик совместных ОМП (1) регулярных параметров Θ_{0i}, $i = 1,2,..,r$.

Так как реализации логарифма ФОП $L(\mathbf{\Theta})$ непрерывно дифференцируемы по параметрам $\Theta_i, i = 1,2,..,r$, то оценки $\Theta_{im}, i = 1,2,..,r$ регулярных параметров сигнала можно найти из решения системы уравнений правдоподобия [3, 4, 6]

$$\partial L_н(\mathbf{\Theta}) / \partial\Theta_j \big|_{\mathbf{\Theta}=\mathbf{\Theta}_m} = 0,\ j = 1,2,..,r, \tag{8}$$

при выполнении условий $\partial^2 L_н(\mathbf{\Theta}) / \partial\Theta_j^2 \big|_{\mathbf{\Theta}=\mathbf{\Theta}_m} < 0$, $j = 1,2,..,r$. С учетом (4) систему уравнений (8) можно переписать в виде

$$[\partial S_н(\mathbf{\Theta}) / \partial\Theta_j + \varepsilon \partial N_н(\mathbf{\Theta}) / \partial\Theta_j]\big|_{\mathbf{\Theta}=\mathbf{\Theta}_m} = 0, \quad j = 1,2,..,r. \tag{9}$$

Приближенное решение системы уравнений (9) при больших ОСШ z (5) можно найти методом малого параметра (МП) [3, 4, 6]. Учтем, что сигнальная функция $S_н(\mathbf{\Theta})$ достигает максимума в точке $\mathbf{\Theta} = \mathbf{\Theta}_0$. Поэтому при $\varepsilon = 0$ (нулевое приближение) решение системы уравнений (9) совпадает с истинными значениями оцениваемых параметров, т.е. $\Theta_{im} = \Theta_{0i}$, $i = 1,2,..,r$.

При наличии высокой апостериорной точности оценок, когда ОСШ велико, оценки Θ_{im}, $i = 1,2,..,r$ (1) находятся в малой окрестности истинных значений Θ_{0i} оцениваемых параметров, причем с ростом ОСШ z величина δ_θ этой окрестности уменьшается. Поэтому решение системы (9) при больших ОСШ z можно искать в виде ряда по степеням малого параметра $\varepsilon = 1/z << 1$ [3,4]:

$$\Theta_{im} = \Theta_{0i} + \varepsilon\Theta'_i + \varepsilon^2\Theta''_i + \ldots, \quad i = 1,2,..,r \tag{10}$$

где $\Theta'_i, \Theta''_2, \ldots$ — поправки к «нулевому» приближению $\Theta_{im} = \Theta_{0i}$ решения системы (9). По той же причине для нахождения асимптотически точных (с ростом ОСШ z) выражений для ОМП (1) в системе уравнений (9) можно использовать разложения (6) нормированных сигнальной и шумовой функций логарифма ФОП.

Подставляя (6) в систему уравнений (9) и решая эту систему с использованием представления (10) ОМП Θ_{im}, находим $\Theta'_i = \sum_{j=1}^{r} N'_j \hat{A}_{ij} / \det \mathbf{A}$ [4]. Здесь $\mathbf{A} = \|A_{ij}\|$ — матрица размером $r \times r$ с элементами $A_{ij} = -S''_{ij}$, $i, j = 1,2,..,r$ (7), $\det \mathbf{A}$ — определитель матрицы $\mathbf{A}$, а $\hat{A}_{ij}$ — алгебраическое дополнение матрицы $\mathbf{A}$.

Таким образом, ОМП Θ_{im}, $i = 1,2,..,r$ при больших ОСШ z в первом приближении можно представить в виде

$$\Theta_{im} = \Theta_{0i} + \varepsilon\sum_{j=1}^{r} N'_j \hat{A}_{ij} / \det \mathbf{A}. \tag{11}$$

В силу гауссовости логарифма ФОП, случайные величины N'_j являются гауссовскими и из (11) получаем, что совместные ОМП Θ_{1m}, $\Theta_{2m}, \ldots, \Theta_{rm}$ (1) в первом приближении являются гауссовскими случайными величинами. Совместная плотность вероятности таких оценок определяется как

$$W(\Theta_{1m}, \Theta_{2m}, ..\Theta_{rm}) = \frac{z^r}{\sqrt{(2\pi)^r}} \sqrt{\det(\mathbf{A}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{A}^T)} \times \times \exp\left[-\frac{z^2}{2}(\mathbf{\Theta}_m - \mathbf{\Theta}_0)^T \mathbf{A}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{A}^T(\mathbf{\Theta}_m - \mathbf{\Theta}_0)\right], \tag{12}$$

где $\mathbf{K} = \|K_{ij}\|$ — матрица размером $r \times r$ с элементами $K_{ij} = \langle N_i' N_j' \rangle = [\partial^2 K_н(\mathbf{\Theta}_1, \mathbf{\Theta}_2) / \partial\Theta_{1i}\partial\Theta_{2j}]\big|_{\mathbf{\Theta}_1=\mathbf{\Theta}_2=\mathbf{\Theta}_0}$, $i, j = 1, 2, .., r$, а «Т» и «−1» означают операции транспонирования и обращения матрицы соответственно.

Используя плотность вероятности (12), находим условные (при фиксированном $\mathbf{\Theta}_0$) вектор смещений $\mathbf{b} = \|b_i\|$ и матрицу рассеяний (корреляционную матрицу ошибок оценок) $\mathbf{V} = \|V_{ij}\|$ с элементами $b_i = \langle \Theta_{im} - \Theta_{0i} \rangle$ и $V_{ij} = \langle (\Theta_{im} - \Theta_{0i})(\Theta_{jm} - \Theta_{0j}) \rangle$, $i, j = 1, 2, .., r$:

$$\begin{gathered} \mathbf{b} = 0,\ \mathbf{V} = (\mathbf{A}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{A}^T)^{-1} / z^2, \\ b_i = 0,\ V_{ij} = \sum_{k=1}^{r}\sum_{m=1}^{r} \hat{A}_{ki}\hat{A}_{mj}K_{km} / z^2(\det \mathbf{A})^2. \end{gathered} \tag{13}$$

Таким образом, совместные ОМП регулярных параметров являются асимптотически несмещенными. При $r = 1$ из (13) находим условное рассеяние $V \equiv V_{11} = \langle (\Theta_{1m} - \Theta_{01})^2 \rangle$ оценки одного регулярного параметра [3, 4]:

$$V = \frac{1}{z^2}\left\{ \frac{\partial^2 K_Н(\Theta_{11}, \Theta_{21})}{\partial\Theta_{11}\partial\Theta_{21}} \Bigg/ \left[\frac{\partial^2 S_н(\Theta)}{\partial\Theta^2}\right]^2 \right\}\Bigg|_{\Theta=\Theta_{11}=\Theta_{21}=\Theta_{01}}. \tag{14}$$

В случае $r = 2$ совместной оценки двух регулярных параметров сигнала из (13) получаем

$$V_{ij} = \sum_{k=1}^{2}\sum_{m=1}^{2} \frac{\partial^2 K_н(\Theta_1, \Theta_2)}{\partial\Theta_{1k}\partial\Theta_{2m}} \frac{\partial^2 S_н(\Theta)}{\partial\Theta_{3-k}\partial\Theta_{3-i}} \frac{\partial^2 S_н(\Theta)}{\partial\Theta_{3-m}\partial\Theta_{3-j}} \times$$
$$\times \frac{1}{z^2}\left[\frac{\partial^2 S_н(\Theta)}{\partial\Theta_1^2} \frac{\partial^2 S_н(\Theta)}{\partial\Theta_2^2} - \left(\frac{\partial^2 S_н(\Theta)}{\partial\Theta_1\partial\Theta_2}\right)^2 \right]^{-2}\Bigg|_{\Theta=\Theta_1=\Theta_2=\Theta_0}. \tag{15}$$

Выражения (11)—(15) для характеристик совместных ОМП (1) регулярных параметров являются асимптотически точными, их точность возрастает с увеличением ОСШ z (5).

II. ХАРАКТЕРИСТИКИ СОВМЕСТНЫХ ОЦЕНОК РАЗРЫВНЫХ ПАРАМЕТРОВ СИГНАЛА ПРИ АДДИТИВНО-МУЛЬТИПЛИКАТИВНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ МОМЕНТОВ РЕШАЮЩЕЙ СТАТИСТИКИ

1. Локальные представления моментов решающей статистики при оценке разрывных параметров

Пусть вместо регулярных параметров $\mathbf{\Theta}_0$ неизвестны и подлежат оценке p разрывных параметров $\mathbf{l}_0 = \|l_{01}, l_{02}, \dots, l_{0p}\|$ сигнала $s(t, \mathbf{l}_0)$, причем вектор параметров $\mathbf{l}_0$ принимает значения из заданной p-мерной априорной области определения $\Re_l$. На основе наблюдаемых данных $x(t) = s(t, \mathbf{l}_0) \otimes n(t)$ и имеющейся априорной информации необходимо измерить (оценить) параметры l_{0i}, $i = 1, 2, .., p$ принимаемого сигнала.

Обозначим $L(\mathbf{l}) \equiv L(l_1, l_2, \dots, l_p)$ — логарифм ФОП как функция p оцениваемых параметров $\mathbf{l} = \|l_1, l_2, \dots, l_p\|$. Аналогично (1), совместные ОМП $l_{1m}, l_{2m}, \ \dots, l_{pm}$ параметров $l_{01}, l_{02}, \dots, l_{0p}$ являются координатами положения абсолютного (наибольшего) максимума логарифма ФОП $L(l_1, l_2, \dots, l_p)$ в пределах области значений $\mathbf{l} \in \Re_l$. Тогда вектор совместных ОМП $\mathbf{l}_m = \| l_{1m}, l_{2m}, .., l_{pm} \|$ параметров сигнала можно записать в виде [1—4]

$$\mathbf{l}_m = \arg\sup_{\mathbf{l} \in \Re_l} L(\mathbf{l}). \tag{16а}$$

Вероятностные характеристики ОМП (16) определяются статистическими свойствами решающей статистики алгоритма оценки — логарифма ФОП $L(\mathbf{l})$. Рассмотрим характеристики решающей статистики алгоритма оценки (16).

Представим функционал $L(\mathbf{l})$ в виде суммы $L(\mathbf{l}) = S(\mathbf{l}) + N(\mathbf{l})$ сигнальной функции (детерминированной составляющей) $S(\mathbf{l}) = \langle L(\mathbf{l}) \rangle$ и шумовой функции (флуктуационной составляющей) $N(\mathbf{l}) = L(\mathbf{l}) - \langle L(\mathbf{l}) \rangle$. Здесь $\langle\ \rangle$ означает усреднение по реализациям наблюдаемых данных (по реализациям логарифма ФОП) при фиксированных истинных значениях $\mathbf{l}_0$ оцениваемых параметров сигнала [4, 6, 12].

Как и в случае оценки регулярных параметров, будем считать, что логарифм ФОП $L(\mathbf{l})$ является гауссовским случайным полем [13, 14]. Тогда для анализа совместных ОМП (16), в силу гауссовости логарифма ФОП, достаточно ограничиться рассмотрением сигнальной функции $S(\mathbf{l})$ и корреляционной функции $K(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2) = \langle N(\mathbf{l}_1) N(\mathbf{l}_2) \rangle$ шумовой функции $N(\mathbf{l})$, где обозначено $\mathbf{l}_j = \|l_{j1}, l_{j2}, \dots, l_{jp}\|$, $j = 1, 2$. Отметим, что добавление случайной величины к логарифму ФОП не изменяет значение ОМП. Следовательно, оценку (16) можно представить в виде

$$\mathbf{l}_m = \arg\sup_{\mathbf{l} \in \Re_l} \Delta(\mathbf{l}), \tag{16б}$$

где $\Delta(\mathbf{l}) \equiv \Delta(l_1, l_2, \dots, l_p) = L(\mathbf{l}) - L(\mathbf{l}^*)$ — гауссовский функционал приращений логарифма

ФОП, а $\mathbf{l}^* = \left\| l_1^*, l_2^*, ..., l_p^* \right\|$ — фиксированное значение вектора параметров $\mathbf{l}$. Поэтому при анализе совместных ОМП (16), вместо корреляционной функции $K(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2)$ логарифма ФОП, можно рассматривать корреляционную функцию $K_\Delta(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2) = \left\langle [\Delta(\mathbf{l}_1) - \langle \Delta(\mathbf{l}_1) \rangle][\Delta(\mathbf{l}_2) - \langle \Delta(\mathbf{l}_2) \rangle] \right\rangle$ его приращений $\Delta(\mathbf{l})$.

Пусть сигнальная функция $S(\mathbf{l})$ в пределах априорной области $\mathbf{l} \in \Re_l$ имеет единственный максимум в точке $\mathbf{l} = \mathbf{l}_0$ истинных значений оцениваемых параметров сигнала, причем $A_S = S(\mathbf{l}_0) > 0$ и точка $\mathbf{l} = \mathbf{l}_0$ является внутренней точкой области $\Re_l$. Считаем также, что реализации шумовой функции $N(\mathbf{l})$ непрерывны с вероятностью 1. На практике эти условия обычно выполняются [3—7, 12 и др.]. Тогда выходное отношение сигнал/шум (ОСШ) для алгоритма оценки (16) запишется в виде

$$z = S(\mathbf{l}_0) \Big/ \sqrt{\langle N^2(\mathbf{l}_0) \rangle} = A_S / \sigma_N, \qquad (17)$$

где $\sigma_N^2 = \langle N^2(\mathbf{l}_0) \rangle$ — дисперсия шумовой функции при $\mathbf{l} = \mathbf{l}_0$. Будем считать, что ОСШ (17) настолько велико, что аномальные ошибки [4] отсутствуют и достигается *высокая апостериорная точность* оценок [4, 6, 7]. При этом ОМП $\mathbf{l}_m$ (16) расположена в малой окрестности точки $\mathbf{l} = \mathbf{l}_0$ максимума сигнальной функции, а при $z \to \infty$ оценка $\mathbf{l}_m$ сходится к $\mathbf{l}_0$ в среднеквадратическом [4—6]. Тогда для определения характеристик ОМП (16) достаточно учесть поведение сигнальной функции $S(\mathbf{l})$ и корреляционной функции $K_\Delta(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2)$ приращений логарифма ФОП $L(\mathbf{l})$ в малой окрестности точки $\mathbf{l} = \mathbf{l}_0$, причем с ростом ОСШ z величина этой окрестности уменьшается.

Поэтому конкретизируем ***локальные*** (в малой окрестности точки $\mathbf{l} = \mathbf{l}_0$) ***представления первых двух моментов логарифма ФОП*** при оценке разрывных параметров сигнала.

Рассмотрим класс разрывных параметров, для которых сечения $S_i(l_i) = S(\mathbf{l})\Big|_{l_k = l_{0k}, k=1,2,..,p, k\neq i}$, $i = 1, 2, .., p$ сигнальной функции по каждому из параметров в окрестности точки $\mathbf{l} = \mathbf{l}_0$ максимума сигнальной функции допускают асимптотическое представление

$$S_i(l_i) = A_S \begin{cases} 1 - d_{1i}\left|l_i - l_{0i}\right| + o(\delta_i), & \text{если} \quad l_i < l_{0i}; \\ 1 - d_{2i}\left|l_i - l_{0i}\right| + o(\delta_i), & \text{если} \quad l_i \geq l_{0i}; \end{cases}$$

$$\text{при} \quad \delta_i = \left|l_i - l_{0i}\right| \to 0, \qquad (18)$$

а соответствующие сечения $K_{\Delta i}(l_{1i}, l_{2i}) = K_\Delta(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2)\Big|_{l_{jk} = l_{0k}, k=1,2,..,p, k\neq i, j=1,2}$ корреляционной функции $K_\Delta(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2)$ приращений логарифма ФОП при $\delta_{ni}^* = \max(\left|l_{1i} - l_{0i}\right|, \left|l_{2i} - l_{0i}\right|, \left|l_i^* - l_{0i}\right|) \to 0$ представляются в виде

$$K_{\Delta i}(l_{1i}, l_{2i}) = \begin{cases} \begin{cases} B_{1i} \min(\left|l_{1i} - l_i^*\right|, \left|l_{2i} - l_i^*\right|) + C_{1i} + o(\delta_{ni}^*), \\ \quad \text{если} \quad l_{1i}, l_{2i} < l_{0i}; \\ B_{2i} \min(\left|l_{1i} - l_i^*\right|, \left|l_{2i} - l_i^*\right|) + C_{2i} + o(\delta_{ni}^*), \\ \quad \text{если} \quad l_{1i}, \ l_{2i} \geq l_{0i}; \end{cases} \\ \quad \text{при} \ (l_{1i} - l_i^*)(l_{2i} - l_i^*) \geq 0; \\ 0, \text{при} \ (l_{1i} - l_i^*)(l_{2i} - l_i^*) < 0. \end{cases} \qquad (19)$$

Здесь $d_{ki} > 0$, $B_{ki} > 0$, $C_{ki} \geq 0$, $k = 1, 2$, $i = 1, 2, ..., p$, причем константы C_{ki} могут зависеть от выбранных значений l_i^*, а $o(\delta)$ — величина большего порядка малости, чем δ. Из (18), (19) видно, что моменты логарифма ФОП не дифференцируемы по разрывным параметрам в точке $\mathbf{l} = \mathbf{l}_0$, так как производные функций (18), (19) в этой точке имеют разрывы первого рода. Это не позволяет воспользоваться методом МП [3, 4, 6] для вычисления характеристик оценок разрывных параметров сигнала.

Некоторые примеры корреляционных функций, удовлетворяющих выражению (19), приведены в [15].

Для применимости метода ЛАА полагаем, что сигнальная функция $S(\mathbf{l})$ и корреляционная функция $K(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2)$ логарифма ФОП в окрестности точки $\mathbf{l} = \mathbf{l}_0$ допускают ***аддитивно-мультипликативные представления***

$$S(\mathbf{l}) = \sum_{k=1}^{u} \sum_{j=1}^{a_k} \prod_{i=t_{jk}+1}^{t_{(j+1)k}} V_{ki}(l_i),$$

$$K(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2) = \sum_{k=1}^{v} \sum_{j=1}^{\alpha_k} \prod_{i=\theta_{jk}+1}^{\theta_{(j+1)k}} U_{ki}(l_{1i}, l_{2i}), \qquad (20)$$

где $0 = t_{1k} < t_{2k} < ... < t_{(a_k+1)k} = p$, $0 = \theta_{1k} < \theta_{2k} < ... < \theta_{(\alpha_k+1)k} = p$. Здесь производные функций $V_{ki}(l_i)$, $U_{ki}(l_{1i}, l_{2i})$, $i = 1, 2, .., p$ непрерывны слева и справа от точки l_{0i}, но могут иметь разрывы первого рода в этой точке.

В частном случае $a_k = \alpha_k = 1$ из (20) получаем

$$S(\mathbf{l}) = \sum_{k=1}^{u} \prod_{i=1}^{p} V_{ki}(l_i), \ K(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2) = \sum_{k=1}^{v} \prod_{i=1}^{p} U_{ki}(l_{1i}, l_{2i}). \qquad (21)$$

Если $a_k = \alpha_k = 1$ и $u = \upsilon = 1$, то моменты (20) факторизуются по оцениваемым параметрам сигнала и допускают *мультипликативное представление*

$$S(\mathbf{l}) = \prod_{i=1}^{p} V_{1i}(l_i) = \prod_{i=1}^{p} S_i(l_i),$$

$$K(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2) = \prod_{i=1}^{p} U_{1i}(l_{1i}, l_{2i}) = \prod_{i=1}^{p} K_i(l_{1i}, l_{2i}),$$

где $S_i(l_i) = V_{1i}(l_i)$ и $K_i(l_{1i}, l_{2i}) = U_{1i}(l_{1i}, l_{2i})$ — сечения сигнальной функции и корреляционной функции шумовой функции логарифма ФОП. Наконец, при $a_k = \alpha_k = p$ аддитивно-мультипликативное представление (20) моментов логарифма ФОП переходит в *аддитивное представление*

$$S(\mathbf{l}) = \sum_{k=1}^{u} \sum_{i=1}^{p} V_{ki}(l_i) = \sum_{i=1}^{p} S_i(l_i) - (n-1)A_S,$$

$$K(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2) = \sum_{k=1}^{v} \sum_{i=1}^{p} U_{ki}(l_{1i}, l_{2i}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{p} K_i(l_{1i}, l_{2i}) - (n-1)\sigma_N^2.$$

2. Применение метода локально-аддитивной аппроксимации для вычисления характеристик совместных оценок разрывных параметров

Найдем асимптотически точные (с ростом ОСШ (17)) выражения для характеристик совместных ОМП (16) разрывных параметров l_i, $i = 1, 2, .., p$ при наличии аддитивно-мультипликативного представления (20) моментов логарифма ФОП. Будем считать, что ОСШ (17) настолько велико, что достигается высокая апостериорная точность оценок [4, 6] и для расчета характеристик ОМП (16) достаточно учитывать локальное поведение моментов логарифма ФОП $L(\mathbf{l})$ в малой окрестности точки $\mathbf{l}_0$. Разложим функции $V_{ki}(l_i)$ и $U_{ki}(l_{1i}, l_{2i})$ в ряд Тейлора слева и справа от точек l_{0i}. Подставляя эти разложения в (20) и учитывая лишь слагаемые, имеющие первый порядок малости по $\delta_i(\delta_{ni})$, получаем

$$S(\mathbf{l}) = \sum_{i=1}^{p} S_i l_i) - (p-1)A_S + o(\delta)$$
$$\text{при}\, \delta = \max_{i=1,2,..,p} \delta_i \to 0, \tag{22}$$

$$K(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2) = \sum_{i=1}^{p} K_i(l_{1i}, l_{2i}) - (p-1)\sigma_N^2 + o(\delta_n)$$

$$\text{при}\, \delta_n = \max_{i=1,2,..,p} \delta_{ni} \to 0,\ \ \delta_{ni} = \max(|l_{1i} - l_{0i}|, |l_{2i} - l_{0i}|).$$

Таким образом, моменты логарифма ФОП $L(\mathbf{l})$ допускают локально-аддитивное представление (22) в окрестности точки $\mathbf{l}_0$.

Обозначим $M_i(l_i)$, $i = 1, 2, .., p$ — статистически независимые совместно гауссовские случайные процессы, математические ожидания $S_{Mi}(l_i)$ и корреляционные функции $K_{Mi}(l_{1i}, l_{2i})$ которых в окрестности точек $l_i = l_{0i}$ представляются в виде

$$S_{Mi}(l_i) = S_i(l_i) - (p-1)A_S / p,$$
$$K_{Mi}(l_{1i}, l_{2i}) = K_i(l_{1i}, l_{2i}) - (p-1)\sigma_N^2 / p. \tag{23}$$

Здесь функции $S_i(l_i)$ и $K_i(l_{1i}, l_{2i})$ удовлетворяют условиям (18), (19). Тогда, согласно (22), случайное поле $L(\mathbf{l})$ сходится по распределению к сумме $M(\mathbf{l}) = \sum_{i=1}^{p} M_i(l_i)$ статистически независимых случайных процессов $M_i(l_i)$ при $\delta \to 0$. Как отмечалось выше, характеристики ОМП (16) при больших ОСШ z определяются поведением логарифма ФОП $L(\mathbf{l})$ в малой окрестности точки $\mathbf{l} = \mathbf{l}_0$, причем при $z \to \infty$ величина этой окрестности стремится к нулю. Будем считать, что ОСШ z настолько велико, а величины δ_i указанных окрестностей точек $l_i = l_{0i}$ настолько малы, что на интервалах $l_i \in [l_{0i} - \delta_i; l_{0i} + \delta_i]$ справедливы представления (23) моментов случайных процессов $M_i(l_i)$. Тогда совместную плотность вероятности $W(l_{1m}, l_{2m}, ..l_{pm})$ оценок $l_{1m}, l_{2m}, ..., l_{pm}$ (16) можно аппроксимировать произведением

$$W(l_1, l_2, ..., l_p) = \prod_{i=1}^{p} W_i(l_i) \tag{24}$$

плотностей вероятности $W_i(l_i)$ раздельных оценок

$$l_{ig} = \arg\sup_{l_i \in [l_{0i} - \delta_i; l_{0i} + \delta_i]} M_i(l_i), \quad i = 1, 2, .., p. \tag{25}$$

Здесь δ_i — величина окрестности точки $l_i = l_{0i}$, причем $\delta_i \to 0$ при $z \to \infty$. Точность представления (24), (25) при фиксированном δ_i возрастает с увеличением ОСШ z.

Таким образом, характеристики совместных ОМП l_{im} (16) разрывных параметров l_{0i} асимптотически (с ростом ОСШ) совпадают с соответствующими характеристиками раздельных оценок l_{ig} (25) этих же параметров.

Для нахождения характеристик раздельных оценок l_{ig}, $i = 1, 2, .., p$ (25) разрывных параметров сигнала используем метод ЛМА [6, 7]. Введем в рассмотрение гауссовские случайные процессы $\Delta_i(l_i) = M_i(l_i) - M_i(l_i^*)$, $l_i^* \in [l_{0i} - \delta_i; l_{0i} + \delta_i]$ с математическими ожиданиями $S_i(l_i) - S_i(l_i^*)$ и корреляционными функциями $K_{\Delta i}(l_{1i}, l_{2i})$. Из (19) следует, что отрезки реализаций случайных процессов $\Delta_i(l_i)$ на интервалах $[l_{0i} - \delta_i; l_i^*)$ и $[l_i^*; l_{0i} + \delta_i]$ не коррелированны и, в силу гауссовости процессов $\Delta_i(l_i)$, статистически независимы. Тогда функцию распределения оценки (25) можно представить в виде [6, 7]

$$F_i(l_i^*) = P[l_{ig} < l_i^*] = \int_0^\infty P_{2i}(u)dP_{1i}(u), \qquad (26)$$

где $P_{1i}(u) = P\left[\sup_{l_i \in [l_{0i}-\delta_i; l_i^*)} \Delta_i(l_i) < u\right]$ и $P_{2i}(u) = P\left[\sup_{l_i \in [l_i^*; l_{0i}+\delta_i]} \Delta_i(l_i) < u\right]$ — функции распределения абсолютного максимума случайного процесса $\Delta_i(l_i)$ на интервалах $[l_{0i} - \delta_i; l_i^*)$ и $[l_i^*; l_{0i} + \delta_i]$ соответственно.

Используя теорему Дуба [16] в формулировке Кайлатца [17] и учитывая представления (18), (19) сечений моментов логарифма ФОП, можно показать, что случайные процессы $\Delta_i(l_i)$ на интервале $[l_i^*; l_{0i} + \delta_i]$ являются гауссовскими марковскими процессами диффузионного типа [14]. Воспользовавшись марковскими свойствами процесса $\Delta_i(l_i)$ находим распределения $P_{1i}(u)$, $P_{2i}(u)$. Подставляя эти выражения в (26), находим условные (при фиксированном l_{0i}) функции распределения $F_i(l_i)$ оценок (25), как это сделано в [15]:

$$F_i(l_i) = \begin{cases} \Psi(|l_i - l_{0i}|, z_{1i}, z_{2i}, \chi_i) \\ \text{при } \ l_{0i} - \delta_i \le l_i < l_{0i}; \\ 1 - \Psi(|l_i - l_{0i}|, z_{2i}, z_{1i}, 1/\chi_i) \\ \text{при } \ l_{0i} \le l_i \le l_{0i} + \delta_i; \end{cases} \quad i = 1, 2, .., p, \qquad (27)$$

$$\Psi(l_i, z_{1i}, z_{2i}, \chi_i) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi|l_i|}} \int_0^\infty \int_0^\infty \left\{ \exp\left[-\frac{(u - z_{1i}|l_i| - \zeta)^2}{2|l_i|}\right] - \right.$$
$$\left. - \exp(2z_{1i}u) \exp\left[-\frac{(u + z_{1i}|l_i| + \zeta)^2}{2|l_i|}\right] \right\} \times$$
$$\times \left\{ \Phi\left(\frac{z_{2i}\delta_i + \zeta\chi_i}{\sqrt{\delta_i}}\right) - \exp(-2z_{2i}\chi_i\zeta) \Phi\left(\frac{z_{2i}\delta_i - \zeta\chi_i}{\sqrt{\delta_i}}\right) \right\} \times$$
$$\times \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi(\delta_i - |l_i|)}} \exp\left[-\frac{[z_{1i}(\delta_i - |l_i|) + u]^2}{2(\delta_i - |l_i|)}\right] + \right.$$
$$\left. + 2z_{1i} \exp(-2z_{1i}u) \Phi\left(\frac{z_{1i}(\delta_i - |l_i|) - u}{\sqrt{\delta_i - |l_i|}}\right) \right\} du d\zeta, \qquad (28)$$

где $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \exp(-t^2/2)\, dt / \sqrt{2\pi}$ — интеграл вероятности,

$$z_{1i} = A_S d_{1i} \big/ \sqrt{B_{1i}},\ z_{2i} = A_S d_{2i} \big/ \sqrt{B_{2i}},\ \chi_i = \sqrt{B_{1i}/B_{2i}}.$$

Выражение (27) громоздко и неудобно для практических расчетов. Учтем, что отношения z_{1i} и z_{2i} в (27) являются величинами порядка z. Полагая, что ОСШ z весьма велико, аналогично [6, 7, 15] находим асимптотические выражения для условных (при фиксированном l_{0i}) плотностей вероятности $W_i(l_i)$ оценок (25)

$$W_i(l_i) = \begin{cases} 2z_{1i}^2 W_0[2z_{1i}^2(l_{0i} - l_i), 1/R_i] & \text{при } \ l_i < l_{0i}; \\ 2z_{2i}^2 W_0[2z_{2i}^2(l_i - l_{0i}), R_i] & \text{при } \ l_i \ge l_{0i}; \end{cases}$$
$$i = 1, 2, .., p, \qquad (29)$$

$$W_0(x, u) = \Phi\left(\sqrt{\frac{|x|}{2}}\right) - 1 + \frac{2+u}{u} \exp\left(|x| \frac{1+u}{u^2}\right) \times$$
$$\times \left\{ 1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{|x|}{2}} \left[\frac{2+u}{u}\right]\right) \right\},$$

где $R_i = B_{1i}d_{2i} \big/ d_{1i}B_{2i} = \chi_i z_{2i} / z_{1i}$. Точность выражения (29) возрастает с увеличением ОСШ z (с увеличением отношений z_{1i} и z_{2i}).

Таким образом, при больших ОСШ z совместная плотность вероятности $W(l_{1m}, l_{2m}, \dots, l_{pm})$ ОМП $l_{1m}, l_{2m}, \dots, l_{pm}$ (16) представляется в виде произведения (24) функций $W_i(l_i)$ (29), которые имеют смысл маргинальных плотностей вероятности оценок l_{im}, $i = 1, 2, .., p$ (16). Следовательно, совместные ОМП l_{im} (16) разрывных параметров l_{0i}, $i = 1, 2, .., p$ асимптотически (с ростом ОСШ z) статистически независимы. Используя распределения (29), находим условные (при фиксированном $\mathbf{l}_0$) смещения $b_i = \langle l_{im} - l_{0i} \rangle$ и рассеяния $V_i = \langle (l_{im} - l_{0i})^2 \rangle$ оценок l_{im} (16):

$$b_i = \frac{2R_i + 1}{2z_{2i}^2(R_i + 1)^2} - \frac{R_i(R_i + 2)}{2z_{1i}^2(R_i + 1)^2},$$
$$V_i = \frac{5R_i^2 + 6R_i + 2}{2z_{2i}^4(R_i + 1)^3} + \frac{R_i(2R_i^2 + 6R_i + 5)}{2z_{1i}^4(R_i + 1)^3}. \qquad (30)$$

При этом в силу асимптотической статистической независимости оценок l_{im} (16), получаем $V_{ij} = \langle (l_{im} - l_{0i})(l_{jm} - l_{0j}) \rangle = 0$. Точность формул (30) возрастает с увеличением ОСШ z (с увеличением z_{1i}, z_{2i}).

Из (12) следует, что распределение совместных ОМП (1) регулярных параметров сигнала является асимптотически гауссовским при $z \to \infty$. Из (29) видно, что асимптотическое распределение ОМП (16) разрывных параметров сигнала существенно отличается от гауссовского.

Отметим, что моменты случайных процессов $\Delta_i(l_i) = M_i(l_i) - M_i(l_i^*)$ в окрестности точек $l_i = l_{0i}$ совпадают с соответствующими моментами случайных процессов $\Delta_{mi}(l_i) = \Delta(\mathbf{l})\big|_{l_k = l_{0k}, k=1,2,..,p, k\neq i}$, которые являются сечениями функционала приращений $\Delta(\mathbf{l}) = L(\mathbf{l}) - L(\mathbf{l}^*)$ логарифма ФОП плоскостями, проходящими через точку $\mathbf{l} = \mathbf{l}_0$. Поэтому статистические *характеристики оценок* l_{ig} *(25) и совместных ОМП* l_{im} *(16) асимптотически (с ростом ОСШ z) совпадают с характеристиками раздельных ОМП*

$$l_{im0} = \arg\sup_{l_i} L(\mathbf{l})\big|_{l_k = l_{0k}, k=1,2,..,p, k\neq i}$$

параметров l_{0i} сигнала. Здесь под раздельной оценкой понимается ОМП, найденная при условиях, когда все параметры сигнала, кроме оцениваемого, априори известны.

III. ХАРАКТЕРИСТИКИ СОВМЕСТНЫХ ОЦЕНОК РАЗРЫВНЫХ И РЕГУЛЯРНЫХ ПАРАМЕТРОВ

1. Оценки максимального правдоподобия и локальные представления моментов решающей статистики

Пусть неизвестны и подлежат совместной оценке $r \geq 1$ регулярных параметров $\mathbf{\Theta}_0 = \|\Theta_{01}, \Theta_{02}, ..., \Theta_{0r}\|$ и $p \geq 1$ разрывных параметров $\mathbf{l}_0 = \|l_{01}, l_{02}, ..., l_{0p}\|$ сигнала $s(t, \mathbf{l}_0, \mathbf{\Theta}_0)$. Обозначим $\Re = \Re_l \cup \Re_\Theta$ — априорная область возможных значений $(\mathbf{l}_0, \mathbf{\Theta}_0)$ оцениваемых параметров, где $\Re_l$ и $\Re_\Theta$ — априорные области возможных значений разрывных $\mathbf{l}_0$ и регулярных $\mathbf{\Theta}_0$ параметров сигнала.

Введем логарифм ФОП $L(\mathbf{l}, \mathbf{\Theta}) \equiv L(l_1, l_2, ..., l_p, \Theta_1, \Theta_2, .., \Theta_r)$ как функцию векторов $\mathbf{l} = \|l_1, l_2, ..., l_p\|$ и $\mathbf{\Theta} = \|\Theta_1, \Theta_2, ..., \Theta_r\|$ разрывных и регулярных параметров сигнала. Совместные ОМП $l_{1m}, l_{2m}, .., l_{pm}$ и $\Theta_{1m}, \Theta_{2m}, .., \Theta_{rm}$ разрывных и регулярных параметров сигнала являются координатами положения абсолютного максимума логарифма ФОП $L(l_1, l_2, .., l_p, \Theta_1, \Theta_2, .., \Theta_r)$ в пределах априорной области $\Re$. Тогда, аналогично (1), (16), векторы совместных ОМП $\mathbf{l}_m = \|l_{1m}, l_{2m}, .., l_{pm}\|$ и $\mathbf{\Theta}_m = \|\Theta_{1m}, \Theta_{2m}, .., \Theta_{rm}\|$ разрывных и регулярных параметров сигнала можно представить в виде [1—4]

$$(\mathbf{l}_m, \mathbf{\Theta}_m) = \arg\sup_{(\mathbf{l},\mathbf{\Theta})\in\Re} L(\mathbf{l}, \mathbf{\Theta}) = \arg\sup_{\mathbf{l}\in\Re_l, \mathbf{\Theta}\in\Re_\Theta} L(\mathbf{l}, \mathbf{\Theta}). \quad (31)$$

Если регулярные параметры $\mathbf{\Theta}_0$ априори известны, то совместные ОМП $\mathbf{l}_{m0} = \|l_{1m0}, l_{2m0}, .., l_{pm0}\|$ разрывных параметров $\mathbf{l}_0$ сигнала запишутся как [1—4]

$$\mathbf{l}_{m0} = \arg\sup_{\mathbf{l}\in\Re_l} L(\mathbf{l}, \mathbf{\Theta}_0) = \arg\sup_{\mathbf{l}\in\Re_l} L_0(\mathbf{l}), \quad (32)$$

где $L_0(\mathbf{l}) = L(\mathbf{l}, \mathbf{\Theta}_0) / A_S$ — нормированный логарифм ФОП при $\mathbf{\Theta} = \mathbf{\Theta}_0$. Оценки (32) совпадают с совместными ОМП (16), рассмотренными в п.II. Тогда характеристики совместных ОМП (32) разрывных параметров $\mathbf{l}_0$ при априори известных регулярных параметрах $\mathbf{\Theta}_0$ можно найти с помощью методов ЛАА и ЛМА, как это сделано в п.II. В результате асимптотические характеристики совместных ОМП (32) определяются из (24), (27)—(30).

Если разрывные параметры $\mathbf{l}_0$ априори известны, то совместные ОМП $\mathbf{\Theta}_{m0} = \|\Theta_{1m0}, \Theta_{2m0}, .., \Theta_{rm0}\|$ регулярных параметров $\mathbf{\Theta}_0$ определяются как

$$\mathbf{\Theta}_{m0} = \arg\sup_{\mathbf{\Theta}\in\Re_\Theta} L(\mathbf{l}_0, \mathbf{\Theta}). \quad (33)$$

Оценки (33) совпадают с совместными ОМП (1), рассмотренными в п. I. Характеристики совместных оценок (33) регулярных параметров $\mathbf{\Theta}_0$ при априори известных разрывных параметрах $\mathbf{l}_0$ можно найти с помощью метода МП [3, 4, 6], как это сделано в п. I. В результате асимптотические характеристики совместных ОМП (33) определяются из (12)—(15).

Однако, метод МП и метод ЛМА непосредственно неприменимы для нахождения характеристик совместных ОМП $(\mathbf{l}_m, \mathbf{\Theta}_m)$ (31) разрывных и регулярных параметров сигнала. Получим далее асимптотически точные (с ростом ОСШ z) выражения для характеристик совместных ОМП (31) *произвольного числа* разрывных и регулярных параметров сигнала.

Для анализа характеристик ОМП (31) представим логарифм ФОП в виде суммы $L(\mathbf{l}, \mathbf{\Theta}) = S(\mathbf{l}, \mathbf{\Theta}) + N(\mathbf{l}, \mathbf{\Theta})$ сигнальной $S(\mathbf{l}, \mathbf{\Theta}) = \langle L(\mathbf{l}, \mathbf{\Theta}) \rangle$

и шумовой $N(\mathbf{l},\Theta) = L(\mathbf{l},\Theta) - \langle L(\mathbf{l},\Theta)\rangle$ функций. Аналогично п. I, II полагаем, что логарифм ФОП $L(\mathbf{l},\Theta)$ является гауссовским случайным полем [13, 14]. В силу гауссовости логарифма ФОП, ограничимся рассмотрением сигнальной функции $S(\mathbf{l},\Theta)$, корреляционной функции $K(\mathbf{l}_1,\Theta_1,\mathbf{l}_2,\Theta_2) = \langle N(\mathbf{l}_1,\Theta_1)N(\mathbf{l}_2,\Theta_2)\rangle$ шумовой функции $N(\mathbf{l},\Theta)$, а также корреляционной функции $K_\Delta(\mathbf{l}_1,\Theta_1,\mathbf{l}_2,\Theta_2) = \langle[\Delta(\mathbf{l}_1,\Theta_1) - \langle\Delta(\mathbf{l}_1,\Theta_1)\rangle][\Delta(\mathbf{l}_2,\Theta_2) - \langle\Delta(\mathbf{l}_2,\Theta_2)\rangle]\rangle$ приращений $\Delta(\mathbf{l},\Theta) = L(\mathbf{l},\Theta) - L(\mathbf{l}^*,\Theta^*)$ логарифма ФОП. Здесь обозначено: $\mathbf{l}^* = \|l_1^*, l_2^*, \ldots, l_p^*\|$ и $\Theta^* = \|\Theta_1^*, \Theta_2^*, \ldots, \Theta_r^*\|$ — фиксированные значения разрывных и регулярных параметров сигнала.

Аналогично п. I, II полагаем, что сигнальная функция $S(\mathbf{l},\Theta)$ в пределах априорной области $\Re$ имеет единственный максимум в точке $\mathbf{l} = \mathbf{l}_0$, $\Theta = \Theta_0$, причем эта точка является внутренней точкой области $\Re$, а реализации шумовой функции $N(\mathbf{l},\Theta)$ непрерывны с вероятностью 1. Тогда выходное ОСШ для алгоритма оценки (31) запишется в виде [3, 4]

$$z = S(\mathbf{l}_0,\Theta_0)\Big/\sqrt{\langle N^2(\mathbf{l}_0,\Theta_0)\rangle} = A_S / \sigma_N, \quad (34)$$

где $A_S = S(\mathbf{l}_0,\Theta_0) > 0$, а $\sigma_N^2 = \langle N^2(\mathbf{l}_0,\Theta_0)\rangle$ — дисперсия шумовой функции при $\mathbf{l} = \mathbf{l}_0$, $\Theta = \Theta_0$. Считаем, что ОСШ z (34) настолько велико, что достигается *высокая апостериорная точность* оценок [4,6,7]. При этом совместные ОМП $\mathbf{l}_m$, Θ_m (31) расположены в малой окрестности точки $\mathbf{l} = \mathbf{l}_0$, $\Theta = \Theta_0$ максимума сигнальной функции, а при $z \to \infty$ оценки $\mathbf{l}_m$ и Θ_m сходятся к значениям $\mathbf{l}_0$ и Θ_0 в среднеквадратическом [4—6]. Тогда для определения характеристик ОМП (31) достаточно учитывать поведение сигнальной функции $S(\mathbf{l},\Theta)$ и корреляционной функции $K(\mathbf{l}_1,\Theta_1,\mathbf{l}_2,\Theta_2)$ или $K_\Delta(\mathbf{l}_1,\Theta_1,\mathbf{l}_2,\Theta_2)$ в малой окрестности точки $\mathbf{l} = \mathbf{l}_0$, $\Theta = \Theta_0$, причем с ростом ОСШ z величина этой окрестности уменьшается.

Конкретизируем ***локальные*** (в малой окрестности точки $\mathbf{l} = \mathbf{l}_0$, $\Theta = \Theta_0$) ***представления первых двух моментов логарифма ФОП*** при совместной оценке разрывных и регулярных параметров сигнала.

Пусть *разрывные параметры* $\mathbf{l}$ принадлежат к классу параметров, свойства которых рассмотрены в п. II. Тогда сечения $S_i(l_i) = S(\mathbf{l},\Theta_0)\big|_{l_k = l_{0k}, k=1,2,..p, k\neq i}$, $i = 1,2,..,p$ сигнальной функции $S(\mathbf{l},\Theta)$ по каждому из разрывных параметров l_i в окрестности точки $\mathbf{l} = \mathbf{l}_0$ имеют асимптотическое представление (18). Сечения $K_{\Delta i}(l_{1i}, l_{2i}) = K_\Delta(\mathbf{l}_1,\Theta_0,\mathbf{l}_2,\Theta_0)\big|_{l_{jk} = l_{0k}, k=1,2,..,p, k\neq i, j=1,2}$ корреляционной функции приращений логарифма ФОП $L(\mathbf{l},\Theta_0)$ в окрестности точки $\mathbf{l} = \mathbf{l}_0$ допускают асимптотическое представление (19). Из (18), (19) следует, что моменты логарифма ФОП $L(\mathbf{l},\Theta)$ не дифференцируемы по разрывным параметрам в точке $\mathbf{l} = \mathbf{l}_0$, $\Theta = \Theta_0$. Это не позволяет воспользоваться методом малого параметра [3, 4, 6] для вычисления характеристик совместных ОМП (31) разрывных и регулярных параметров сигнала.

Следуя п.II, также полагаем, что сигнальная функция $S(\mathbf{l}) = S(\mathbf{l},\Theta_0)$ и корреляционная функция $K(\mathbf{l}_1,\mathbf{l}_2) = K(\mathbf{l}_1,\Theta_0,\mathbf{l}_2,\Theta_0)$ логарифма ФОП $L(\mathbf{l},\Theta_0)$ в окрестности точки $\mathbf{l} = \mathbf{l}_0$ допускают аддитивно-мультипликативные представления (20).

Для рассмотрения локальных представлений моментов логарифма ФОП по *регулярным параметрам* Θ введем нормированный логарифм ФОП

$$L_\text{н}(\mathbf{l},\Theta) = L(\mathbf{l},\Theta) / A_S. \quad (35)$$

Функционал (35) представим в виде суммы

$$L_\text{н}(\mathbf{l},\Theta) = S_\text{н}(\mathbf{l},\Theta) + \varepsilon N_\text{н}(\mathbf{l},\Theta), \quad (36)$$

где $\varepsilon = \sigma_N / A_S = 1/z$, а $S_\text{н}(\mathbf{l},\Theta) = S(\mathbf{l},\Theta)/A_S$ и $N_\text{н}(\mathbf{l},\Theta) = N(\mathbf{l},\Theta)/\sigma_N$ — сигнальная и шумовая составляющие, нормированные так, что $\max S_\text{н}(\mathbf{l},\Theta) = 1$, $\langle N_\text{н}^2(\mathbf{l}_0,\Theta_0)\rangle = 1$. Согласно определению регулярных параметров [3, 4, 6, 7, 9], моменты нормированного логарифма ФОП $L_\text{н}(\mathbf{l},\Theta)$ непрерывно дифференцируемы по параметрам Θ_i, $i = 1,2,..,r$. Следовательно, для всех $\mathbf{l} \in \Re_l$ и $\delta_\theta = \max\limits_{i=1,2,..,r} |\Theta_i - \Theta_{0i}| \to 0$ нормированные сигнальная и шумовая составляющие представляются в виде разложения в r-мерный ряд Тейлора:

$$\begin{gathered} S_\text{н}(\mathbf{l},\Theta) = S_0(\mathbf{l}) + \sum_{i=1}^{r} S'_{0i}(\mathbf{l})(\Theta_i - \Theta_{0i}) + \\ + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} S''_{0ij}(\mathbf{l})\ (\Theta_i - \Theta_{0i})(\Theta_j - \Theta_{0j}) + o(\delta_\theta^2), \\ N_\text{н}(\mathbf{l},\Theta) = N_0(\mathbf{l}) + \sum_{i=1}^{r} N'_{0i}(\mathbf{l})(\Theta_i - \Theta_{0i}) + \\ + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} N''_{0ij}(\mathbf{l})(\Theta_i - \Theta_{0i})(\Theta_j - \Theta_{0j}) + o(\delta_\theta^2), \end{gathered} \quad (37)$$

где $S_0(\mathbf{l}) = S_\text{н}(\mathbf{l},\Theta_0)$ и $N_0(\mathbf{l}) = N_\text{н}(\mathbf{l},\Theta_0)$ — сигнальная и шумовая составляющие нормированного логарифма ФОП $L_0(\mathbf{l}) = L(\mathbf{l},\Theta_0)/A_S$,

$$
\begin{aligned}
S'_{0i}(\mathbf{l}) &= \partial S_{н}(\mathbf{l},\boldsymbol{\Theta}) / \partial \Theta_i \big|_{\boldsymbol{\Theta}=\boldsymbol{\Theta}_0}, \\
S''_{0ij}(\mathbf{l}) &= \partial^2 S_{н}(\mathbf{l},\boldsymbol{\Theta}) / \partial \Theta_i \partial \Theta_j \big|_{\boldsymbol{\Theta}=\boldsymbol{\Theta}_0}, \\
N'_{0i}(\mathbf{l}) &= \partial N_{н}(\mathbf{l},\boldsymbol{\Theta}) / \partial \Theta_i \big|_{\boldsymbol{\Theta}=\boldsymbol{\Theta}_0}, \\
N''_{0ij}(\mathbf{l}) &= \partial^2 N_{н}(\mathbf{l},\boldsymbol{\Theta}) / \partial \Theta_i \partial \Theta_j \big|_{\boldsymbol{\Theta}=\boldsymbol{\Theta}_0}.
\end{aligned} \tag{38}
$$

Обозначим

$$
\begin{gathered}
K'_{0i}(\mathbf{l}_1,\mathbf{l}_2) \equiv \langle N'_{0i}(\mathbf{l}_1) N_0(\mathbf{l}_2) \rangle = \\
= \partial K_{н}(\mathbf{l}_1,\boldsymbol{\Theta}_1,\mathbf{l}_2,\boldsymbol{\Theta}_2) / \partial \Theta_{1i} \big|_{\boldsymbol{\Theta}_1=\boldsymbol{\Theta}_2=\boldsymbol{\Theta}_0}, \\
K''_{0ij}(\mathbf{l}_1,\mathbf{l}_2) \equiv \langle N'_{0i}(\mathbf{l}_1) N'_{0j}(\mathbf{l}_2) \rangle = \\
= \partial^2 K_{н}(\mathbf{l}_1,\boldsymbol{\Theta}_1,\mathbf{l}_2,\boldsymbol{\Theta}_2) / \partial \Theta_{1i} \partial \Theta_{2j} \big|_{\boldsymbol{\Theta}_1=\boldsymbol{\Theta}_2=\boldsymbol{\Theta}_0},
\end{gathered}
$$

— производные корреляционной функции $K_{н}(\mathbf{l}_1,\boldsymbol{\Theta}_1,\mathbf{l}_2,\boldsymbol{\Theta}_2) = \langle N_{н}(\mathbf{l}_1,\boldsymbol{\Theta}_1) N_{н}(\mathbf{l}_2,\boldsymbol{\Theta}_2) \rangle = K(\mathbf{l}_1,\boldsymbol{\Theta}_1,\mathbf{l}_2,\boldsymbol{\Theta}_2)/\sigma_N^2$ нормированной шумовой функции $N_{н}(\mathbf{l},\boldsymbol{\Theta})$. Следуя [7, 9], ограничимся рассмотрением класса регулярных параметров $\boldsymbol{\Theta}$, для которых в окрестности точки $\mathbf{l}=\mathbf{l}_0$ справедливы асимптотические представления

$$
\begin{gathered}
S'_{0i}(\mathbf{l}) = o(\delta^{\phi_1}) \quad \text{и} \quad S''_{0ij}(\mathbf{l}) = S''_{0ij}(\mathbf{l}_0) + o(\delta^{\phi_2}) \\
\text{при} \quad \delta = \max_{i=1,2,\ldots,p} |l_i - l_{0i}| \to 0,
\end{gathered} \tag{39а}
$$

$$
\begin{gathered}
K'_{0i}(\mathbf{l}_1,\mathbf{l}_2) = K'_{0i}(\mathbf{l}_0,\mathbf{l}_0) + o(\delta_n^{\phi_3}) \text{ и} \\
K''_{0ij}(\mathbf{l}_1,\mathbf{l}_2) = K''_{0ij}(\mathbf{l}_0,\mathbf{l}_0) + o(\delta_n^{\phi_4}) \\
\text{при } \delta_n = \max_{i=1,2,\ldots,p} (|l_{1i} - l_{0i}|, |l_{2i} - l_{0i}|) \to 0.
\end{gathered} \tag{39б}
$$

Здесь $\mathbf{l}_k = \|l_{k1}, l_{k2}, \ldots, l_{kp}\|$, $\boldsymbol{\Theta}_k = \|\Theta_{k1}, \Theta_{k2}, \ldots, \Theta_{kp}\|$, $k = 1,2$ — векторы разрывных и регулярных параметров, а ϕ_j, $j = 1,2,3,4$ — постоянные величины, удовлетворяющие условию $\phi_j > 1/2$.

Представления (39) справедливы для широкого класса регулярных параметров радиофизических сигналов [3—10 и др.]. В частности, для рассматриваемых в [4, 6, 7, 9 и др.] регулярных параметров квазидетерминированных сигналов, а также для регулярных параметров импульсный сигналов со случайной субструктурой [12], условия (39) выполняются. Кроме того, для квазидетерминированных сигналов, в силу известной связи между сигнальной составляющей и корреляционной функцией шумовой составляющей логарифма ФОП [4, 6, 7], достаточно рассматривать только условия (39а) для производных $S'_{0i}(\mathbf{l})$ и $S''_{0ij}(\mathbf{l})$, как это делается в [7, 9]. При выполнении (39а) условия (39б) для производных $K'_{0i}(\mathbf{l}_1,\mathbf{l}_2)$ и $K''_{0ij}(\mathbf{l}_1,\mathbf{l}_2)$ в случае обработки квазидетерминированных сигналов также выполняются.

В [7, 9] предложена методика вычисления асимптотически точных (с ростом ОСШ) выражений для характеристик *совместных ОМП одного разрывного и нескольких регулярных параметров* квазидетерминированных сигналов, удовлетворяющих условиям (39а). Введение дополнительно к [7, 9] условий (39б) позволяет обобщить методику [7, 9] на более широкий класс радиофизических сигналов, а также на случаи неоптимального построения алгоритмов оценки. В частности, полученные далее результаты, применимы для совместных оценок разрывных и регулярных параметров стохастических импульсных сигналов с гауссовской случайной субструктурой [12], включая квазиправдоподобные оценки параметров этих сигналов.

Используя обобщение методики [7,9] на более широкий класс сигналов и рассмотренный в п. II метод ЛАА, найдем асимптотически точные (с ростом ОСШ z) выражения для характеристик совместных ОМП *произвольного числа p разрывных и произвольного числа r регулярных* параметров сигнала, удовлетворяющих условиям (18), (19), (20), (39).

2. Характеристики совместных оценок разрывных параметров сигнала при неизвестных регулярных параметрах

Получим вначале асимптотически точные (с ростом ОСШ z) выражения для характеристик ОМП $\mathbf{l}_m$ (31) разрывных параметров сигнала. Для этого с учетом (35) перепишем оценку $\mathbf{l}_m$ в виде

$$
\mathbf{l}_m = \arg\sup_{\mathbf{l} \in \Re_l} L_m(\mathbf{l}), \quad L_m(\mathbf{l}) = \sup_{\boldsymbol{\Theta} \in \Re_\Theta} L_{н}(\mathbf{l},\boldsymbol{\Theta}). \tag{40}
$$

Отметим, что в условиях высокой апостериорной точности оценок, когда ОСШ z велико, совместные ОМП $(\mathbf{l}_m, \boldsymbol{\Theta}_m)$ параметров сигнала расположены в малой окрестности точки $(\mathbf{l}_0, \boldsymbol{\Theta}_0)$, а при $z \to \infty$ ОМП $\mathbf{l}_m$ и $\boldsymbol{\Theta}_m$ сходятся к значениям $\mathbf{l} = \mathbf{l}_0$ и $\boldsymbol{\Theta} = \boldsymbol{\Theta}_0$ в среднеквадратическом. Тогда для определения асимптотических характеристик ОМП (40) достаточно учитывать поведение функционалов $L_{н}(\mathbf{l},\boldsymbol{\Theta})$ и $L_m(\mathbf{l})$ в малой окрестности значений $\mathbf{l} = \mathbf{l}_0$, $\boldsymbol{\Theta} = \boldsymbol{\Theta}_0$.

При фиксированном $\mathbf{l}$ и $\Theta \to \Theta_0$ ($\delta_\theta = \max_{i=1,2,..,r} |\Theta_i - \Theta_{0i}| \to 0$) аппроксимируем нормированный логарифм ФОП (35) отрезком его r-мерного разложения в ряд Тейлора. Согласно (36), (37) получаем

$$\begin{aligned} L_{\text{н}}(\mathbf{l}, \Theta) = S_0(\mathbf{l}) + \varepsilon N_0(\mathbf{l}) + \sum_{i=1}^{r} [S'_{0i}(\mathbf{l}) + \varepsilon N'_{0i}(\mathbf{l})] \times \\ \times (\Theta_i - \Theta_{0i}) + \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} [S''_{0ij}(\mathbf{l}) + \varepsilon N''_{0ij}(\mathbf{l})] \times \\ \times (\Theta_i - \Theta_{0i})(\Theta_j - \Theta_{0j}) / 2 + o(\delta_\theta^2). \end{aligned} \quad (41)$$

При фиксированном $\mathbf{l}$ координаты $\Theta_{1g}, \Theta_{2g}, .., \Theta_{rg}$ положения наибольшего максимума логарифма ФОП (41) по переменным $\Theta_1, \Theta_2, .., \Theta_r$ являются решениями системы уравнений

$$[\partial L_{\text{н}}(\mathbf{l}, \Theta) / \partial \Theta_i]\big|_{\Theta_j = \Theta_{jg}, j=1,2,..,r} = 0, \quad i = 1, 2, .., r. \quad (42)$$

Ограничиваясь в (41) явно выписанными членами ряда и подставляя аппроксимацию (41) в (42), получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} -\sum_{j=1}^{r} \left[S''_{0ij}(\mathbf{l}) + \varepsilon N''_{0ij}(\mathbf{l})\right](\Theta_{jg} - \Theta_{0j}) = \\ = S'_{0i}(\mathbf{l}) + \varepsilon N'_{0i}(\mathbf{l}), \\ i = 1, 2, .., r. \end{aligned} \quad (43)$$

Аналогично [7, 9] найдем решение системы уравнений (43). При $\varepsilon = 0$ (нулевое приближение) получаем $\Theta_{ig} = \Theta^*_{ig}$ [4, 6, 7], где

$$\begin{aligned} \Theta^*_{ig} = \Theta_{0i} + \sum_{j=1}^{r} S'_{0j}(\mathbf{l}) \hat{A}_{ij}(\mathbf{l}) / \det \mathbf{A}(\mathbf{l}), \\ i = 1, 2, .., r, \end{aligned} \quad (44)$$

$\mathbf{A}(\mathbf{l}) = \|A_{ij}(\mathbf{l})\|$ — матрица размером $r \times r$ с элементами $A_{ij}(\mathbf{l}) = -S''_{0ij}(\mathbf{l})$, $i, j = 1, 2, .., r$ (38), $\det \mathbf{A}(\mathbf{l})$ — определитель матрицы $\mathbf{A}(\mathbf{l})$, а $\hat{A}_{ij}(\mathbf{l})$ — алгебраическое дополнение матрицы $\mathbf{A}(\mathbf{l})$. При больших ОСШ z величина $\varepsilon = 1/z$ является малым параметром и решение системы уравнений (43) в общем случае можно искать в виде ряда по степеням ε [3, 4, 6, 7 и др.]:

$$\Theta_{ig} = \Theta^*_{ig} + \varepsilon \Theta'_i + \varepsilon^2 \Theta''_i + \ldots, \quad i = 1, 2, .., r. \quad (45)$$

В силу малости параметра ε, ограничимся в (45) первыми двумя слагаемыми (первое приближение по ε) и подставим (45) в (43). Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, аналогично [3, 4, 6, 7, 9] находим

$$\Theta_{ig} = \Theta_{0i} + \sum_{j=1}^{r} [S'_{0j}(\mathbf{l}) + \varepsilon N'_{0j}(\mathbf{l})] \hat{A}_{ij}(\mathbf{l}) / \det \mathbf{A}(\mathbf{l}). \quad (46)$$

Подставляя (46) в (41) и пренебрегая слагаемыми большего порядка малости, чем ε, находим представление функционала $L_m(\mathbf{l})$ (40) в первом приближении по ε:

$$\begin{aligned} L_m(\mathbf{l}) = S_0(\mathbf{l}) + \sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{r} S'_{0j}(\mathbf{l}) S'_{0i}(\mathbf{l}) \hat{A}_{ij}(\mathbf{l}) / \det \mathbf{A}(\mathbf{l}) + \\ + \sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}\sum_{m=1}^{r} S''_{0ij}(\mathbf{l}) S'_{0k}(\mathbf{l}) S'_{0m}(\mathbf{l}) \frac{\hat{A}_{ik}(\mathbf{l}) \hat{A}_{jm}(\mathbf{l})}{2[\det \mathbf{A}(\mathbf{l})]^2} + \\ + \varepsilon \left\{ N_0(\mathbf{l}) + 2\sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{r} S'_{0j}(\mathbf{l}) N'_{0i}(\mathbf{l}) \hat{A}_{ij}(\mathbf{l}) / \det \mathbf{A}(\mathbf{l}) + \right. \\ + \sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}\sum_{m=1}^{r} [N''_{0ij}(\mathbf{l}) S'_{0k}(\mathbf{l}) + 2 S''_{0ij}(\mathbf{l}) N'_{0k}(\mathbf{l})] \times \\ \left. \times S'_{0m}(\mathbf{l}) \hat{A}_{ik}(\mathbf{l}) \hat{A}_{jm}(\mathbf{l}) / 2[\det \mathbf{A}(\mathbf{l})]^2 \right\}. \end{aligned} \quad (47)$$

Исследуем теперь поведение функционала $L_m(\mathbf{l})$ (47) при $\mathbf{l} \to \mathbf{l}_0$. Для этого функционал $L_m(\mathbf{l})$ представим в виде суммы

$$L_m(\mathbf{l}) = S_m(\mathbf{l}) + \varepsilon N_m(\mathbf{l}), \quad (48)$$

где $S_m(\mathbf{l}) = \langle L_m(\mathbf{l}) \rangle$ — сигнальная, а $N_m(\mathbf{l}) = [L_m(\mathbf{l}) - \langle L_m(\mathbf{l}) \rangle] / \varepsilon$ — нормированная шумовая составляющие. Из (47) с учетом (39) находим асимптотические аппроксимации сигнальной и шумовой составляющих функционала (47) при $\delta = \max_{i=1,2,..,p} |l_i - l_{0i}| \to 0$:

$$\begin{aligned} S_m(\mathbf{l}) = S_0(\mathbf{l}) + o(\delta), \\ N_m(\mathbf{l}) = N_0(\mathbf{l}) + \sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{r} S'_{0j}(\mathbf{l}) N'_{0i}(\mathbf{l}) \hat{A}_{ij}(\mathbf{l}) / \det \mathbf{A}(\mathbf{l}) + \\ + \sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}\sum_{m=1}^{r} S''_{0ij}(\mathbf{l}) N'_{0k}(\mathbf{l}) S'_{0m}(\mathbf{l}) \frac{\hat{A}_{ik}(\mathbf{l}) \hat{A}_{jm}(\mathbf{l})}{[\det \mathbf{A}(\mathbf{l})]^2} + o(\delta). \end{aligned} \quad (49)$$

Из (49) следует, что функционал $L_m(\mathbf{l})$, в силу гауссовости нормированной шумовой составляющей $N_0(\mathbf{l})$, является асимптотически (при $z \to \infty$, $\varepsilon \to 0$ и $\delta \to 0$) гауссовским случайным полем с математическим ожиданием $S_m(\mathbf{l})$ (49) и корреляционной функцией $K_m(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2) = \langle N_m(\mathbf{l}_1) N_m(\mathbf{l}_2) \rangle$, допускающей асимптотическое представление

$$\begin{aligned} K_m(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2) = K_0(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2) + \sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{r} K'_{0i}(\mathbf{l}_0, \mathbf{l}_0) \times \\ \times [S'_{0j}(\mathbf{l}_1) + S'_{0j}(\mathbf{l}_2)] \hat{A}_{ij}(\mathbf{l}_0) / \det \mathbf{A}(\mathbf{l}_0) + \end{aligned}$$

$$+\sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}\sum_{m=1}^{r} K'_{0k}(\mathbf{l}_0,\mathbf{l}_0)[S''_{0ij}(\mathbf{l}_1)S'_{0m}(\mathbf{l}_1)+$$

$$+S''_{0ij}(\mathbf{l}_2)S'_{0m}(\mathbf{l}_2)]\hat{A}_{ik}(\mathbf{l}_0)\hat{A}_{jm}(\mathbf{l}_0)/[\det\mathbf{A}(\mathbf{l}_0)]^2+o(\delta_n)$$

$$\text{при } \delta_n=\max_{i=1,2,..,p}(|l_{1i}-l_{0i}|,|l_{2i}-l_{0i}|)\to 0. \qquad (50)$$

Здесь $K_0(\mathbf{l}_1,\mathbf{l}_2)=\langle N_0(\mathbf{l}_1)N_0(\mathbf{l}_2)\rangle$ - корреляционная функция шумовой составляющей $N_0(\mathbf{l})$ функционала $L_н(\mathbf{l},\Theta_0)$, а $K'_{0i}(\mathbf{l}_1,\mathbf{l}_2)=\langle N'_{0i}(\mathbf{l}_1)N_0(\mathbf{l}_2)\rangle$ — корреляционная функция шумовой составляющей и ее производной, удовлетворяющая условию (39б). Тогда функционал $\Delta_m(\mathbf{l})=$ $=L_m(\mathbf{l})-L_m(\mathbf{l}^*)$, $\mathbf{l}^*\in\Re_l$ также является гауссовским случайным полем, математическое ожидание $S_{m\Delta}(\mathbf{l})$ и корреляционная функция $K_{m\Delta}(\mathbf{l}_1,\mathbf{l}_2)$ которого, согласно (49), (50), допускают асимптотические представления

$$S_{m\Delta}(\mathbf{l})=S_0(\mathbf{l})-S_0(\mathbf{l}^*)+o(\delta^*)$$

$$\text{при } \delta^*=\max_{i=1,2,..,p}(|l_i^*-l_{0i}|,|l_i-l_{0i}|)\to 0,$$

$$K_{m\Delta}(\mathbf{l}_1,\mathbf{l}_2)=K_0(\mathbf{l}_1,\mathbf{l}_2)-K_0(\mathbf{l}_1,\mathbf{l}^*)-$$

$$-K_0(\mathbf{l}^*,\mathbf{l}_2)+K_0(\mathbf{l}^*,\mathbf{l}^*)+o(\delta_n^*) \qquad (51)$$

$$\text{при } \delta_n^*=\max_{i=1,2,..,p}(|l_i^*-l_{0i}|,|l_{1i}-l_{0i}|,|l_{2i}-l_{0i}|)\to 0.$$

Из (51) следует, что математическое ожидание и корреляционная функция приращений $\Delta_m(\mathbf{l})$ функционала $L_m(\mathbf{l})$ (40) асимптотически (при $z\to\infty$, $\delta^*\to 0$) совпадают с математическим ожиданием и корреляционной функцией приращений $\Delta_0(\mathbf{l})=L_0(\mathbf{l})-L_0(\mathbf{l}^*)$ гауссовского функционала $L_0(\mathbf{l})=L_н(\mathbf{l},\Theta_0)$. Тогда функционал приращений $\Delta_m(\mathbf{l})$ решающей статистики $L_m(\mathbf{l})$ исследуемого алгоритма оценки (40) сходится по распределению (при $z\to\infty$, $\delta^*\to 0$) к функционалу приращений $\Delta_0(\mathbf{l})$ решающей статистики $L_0(\mathbf{l})$ алгоритма (32) совместных оценок $\mathbf{l}_{m0}$ разрывных параметров сигнала при априори известных регулярных параметрах. Следовательно, *характеристики совместных ОМП* $\mathbf{l}_m$ (31), (40) *разрывных параметров* $\mathbf{l}_0$ *сигнала при неизвестных регулярных параметрах* Θ_0 *асимптотически (с ростом ОСШ* z *) совпадают с характеристиками соответствующих совместных ОМП* $\mathbf{l}_{m0}$ (32) *разрывных параметров при априори известных регулярных параметрах сигнала.*

Выражения для характеристик совместных ОМП разрывных параметров $\mathbf{l}_{m0}$ можно записать, воспользовавшись результатами п.II. Таким образом, асимптотически точные (с ростом ОСШ z) выражения для характеристик совместных ОМП $\mathbf{l}_m$ (31), (40) определяются из (24), (27)—(30).

3. Характеристики совместных оценок регулярных параметров сигнала при неизвестных разрывных параметрах

Найдем теперь асимптотически точные (с ростом ОСШ z) выражения для характеристик ОМП Θ_m (31) регулярных параметров сигнала. Для этого перепишем оценку Θ_m в виде

$$\Theta_m=\arg\sup_{\Theta\in\Re_\Theta} L_M(\Theta),$$
$$L_M(\Theta)=L_н(\mathbf{l}_m,\Theta)=L(\mathbf{l}_m,\Theta)/A_S, \qquad (52)$$

где $\mathbf{l}_m$ — вектор совместных ОМП (31), (40) разрывных параметров сигнала.

Оценки Θ_{mi}, $i=1,2,..,r$ (52) регулярных параметров сигнала являются решениями системы уравнений правдоподобия [3, 4]

$$\partial L_M(\Theta)/\partial\Theta_j\Big|_{\Theta_i=\Theta_{im},i=1,2,..,r}=0,\quad j=1,2,\ldots,r. \qquad (53)$$

При высокой апостериорной точности оценок, когда ОСШ z велико, оценки Θ_{mi} (52) находятся в малой окрестности истинных значений Θ_0 оцениваемых регулярных параметров сигнала, причем с ростом ОСШ z величина δ_θ этой окрестности уменьшается. Поэтому для нахождения асимптотически точного (с ростом ОСШ z) решения системы уравнений (53) достаточно использовать аппроксимацию функционала $L_M(\Theta)$ (52) при $\Theta\to\Theta_0$ ($\delta_\theta\to 0$).

Характеристики совместных ОМП $\mathbf{l}_m=\|l_{1m},l_{2m},..,l_{pm}\|$ разрывных параметров сигнала получены в п.II и определяются из (24), (27)—(30). Из (27)—(30) следует, что оценки l_{im}, $i=1,2,..,p$ разрывных параметров при больших ОСШ z можно представить в виде

$$l_{im}=l_{0i}+\varepsilon^2\upsilon_i+o(\varepsilon^2), \qquad (54)$$

где $\varepsilon=1/z\ll 1$ — малый параметр, а υ_i — случайные величины, первые два момента которых конечны и не зависят от $\varepsilon(z)$. Например, при $z_{1i}=z_{2i}=z$, $R_i=1$ из (29), (30) находим, что $\langle\upsilon_i\rangle=0$, $\langle\upsilon_i^2\rangle=13/8$. Ограничиваясь в (54), в силу малости параметра ε, первыми двумя слагаемыми (первое приближение) и подставляя в (41) вместо параметров l_i их оценки l_{im} (54), получаем приближенное выражение для функционала $L_M(\Theta)=L_н(\mathbf{l}_m,\Theta)$ (52) при

$\Theta \to \Theta_0$. Подставляя это выражение в (53), получаем систему уравнений правдоподобия

$$\sum_{j=1}^{r} S''_{0ij}(\mathbf{l}_0 + \varepsilon^2 \boldsymbol{\upsilon})(\Theta_{jm} - \Theta_{0j}) + S'_{0i}(\mathbf{l}_0 + \varepsilon^2 \boldsymbol{\upsilon}) + \varepsilon U_i(\varepsilon) +$$
$$+\varepsilon N'_{0i}(\mathbf{l}_0) + \varepsilon \sum_{j=1}^{r} N''_{0ij}(\mathbf{l}_0 + \varepsilon^2 \boldsymbol{\upsilon})(\Theta_{jm} - \Theta_{0j}) = 0, \quad (55)$$

где

$$U_i(\varepsilon) = N'_{0i}(\mathbf{l}_0 + \varepsilon^2 \boldsymbol{\upsilon}) - N'_{0i}(\mathbf{l}_0), \quad i = 1,2,\ldots,r, \quad (56)$$

— приращения производной шумовой составляющей $N_0(\mathbf{l})$, а $\boldsymbol{\upsilon} = \|\upsilon_1, \upsilon_2, .., \upsilon_p\|$ — случайный вектор, компоненты которого являются случайными величинами υ_i, $i = 1,2,..,p$.

Приближенное решение системы уравнений (55) при больших ОСШ z можно найти аналогично [7,9]. При $\varepsilon = 0$ (нулевое приближение) решение системы (55) совпадает с истинным значением регулярных параметров сигнала, т.е. $\Theta_{im} = \Theta_{0i}$, $i = 1,2,..,p$. Так как при больших ОСШ z параметр $\varepsilon = 1/z$ является малым, то решение системы уравнений (55), аналогично (45), можно искать в виде ряда по степеням ε:

$$\Theta_{im} = \Theta_{0i} + \varepsilon \Theta'_{im} + \varepsilon^2 \Theta''_{im} + \ldots, \quad i = 1,2,\ldots,r. \quad (57)$$

Подставляя (57) в (55) и приравнивая коэффициенты при первой степени ε, получаем систему уравнений для поправки Θ'_{im} первого приближения в (57):

$$-\sum_{j=1}^{r} S''_{0ij}(\mathbf{l}_0 + \varepsilon^2 \boldsymbol{\upsilon})\Theta'_{im} = N'_{0i}(\mathbf{l}_0) + U_i(\varepsilon). \quad (58)$$

Из (39) следует, что при $\varepsilon \to 0$ справедливо представление

$$S''_{0ij}(\mathbf{l}_0 + \varepsilon^2 \boldsymbol{\upsilon}) = S''_{0ij}(\mathbf{l}_0) + o(\varepsilon^{2n}), \quad n > 1/2. \quad (59)$$

С другой стороны, функционал $U_i(\varepsilon)$ (56) как функция параметра ε при фиксированном значении $\boldsymbol{\upsilon}$ является гауссовским случайным процессом с корреляционной функцией

$$K_{Ui}(\varepsilon) = \left\langle N'^2_{0i}(\mathbf{l}_0 + \varepsilon^2 \boldsymbol{\upsilon}) \right\rangle -$$
$$-2\left\langle N'_{0i}(\mathbf{l}_0 + \varepsilon^2 \boldsymbol{\upsilon}) N'_{0i}(\mathbf{l}_0) \right\rangle + \left\langle N'^2_{0i}(\mathbf{l}_0) \right\rangle.$$

Эта корреляционная функция, согласно (39), допускает асимптотическое представление $K_{Ui}(\varepsilon) = o(\varepsilon^{2n})$, $n > 1/2$ при $\varepsilon \to 0$. Поэтому, воспользовавшись теоремой о локальных свойствах реализаций гауссовского случайного процесса [18], получаем $N'_{0i}(\mathbf{l}_0 + \varepsilon^2 \boldsymbol{\upsilon}) = N'_{0i}(\mathbf{l}_0) + o(|\varepsilon|^{1/2})$. Отсюда следует, что

$$U_i(\varepsilon) = o(|\varepsilon|^{1/2}) \quad \text{при}\ \varepsilon \to 0. \quad (60)$$

Используя представления (59), (60), систему уравнений (58) с точностью слагаемых порядка $o(|\varepsilon|^{1/2})$ можно записать в виде $-\sum_{j=1}^{r} S''_{0ij}(\mathbf{l}_0)\Theta'_{im} = N'_{0i}(\mathbf{l}_0)$, $i = 1,2,\ldots,r$. Решение этой системы равно $\Theta'_{im} = \sum_{j=1}^{r} N'_{0j}(\mathbf{l}_0)\hat{A}_{ij}(\mathbf{l}_0) / \det \mathbf{A}(\mathbf{l}_0)$.

Следовательно, в первом приближении ОМП Θ_{im} (57) при больших ОСШ z можно представить в виде

$$\Theta_{im} = \Theta_{0i} + \varepsilon \sum_{j=1}^{r} N'_{0j}(\mathbf{l}_0)\hat{A}_{ij}(\mathbf{l}_0) / \det \mathbf{A}(\mathbf{l}_0). \quad (61)$$

Из сравнения (61) и (11) следует, что при больших ОСШ z оценки $\mathbf{\Theta}_m$ (52) и $\mathbf{\Theta}_{m0}$ (33) совпадают в первом приближении по ε и характеристики оценок (52) и (33) в указанном приближении также совпадают.

Таким образом, *характеристики совместных ОМП* $\mathbf{\Theta}_m$ (31), (52) *регулярных параметров* $\mathbf{\Theta}_0$ *сигнала при неизвестных разрывных параметрах* $\mathbf{l}_0$ *асимптотически (с ростом ОСШ z) совпадают с характеристиками соответствующих совместных ОМП* $\mathbf{\Theta}_{m0}$ (33) *регулярных параметров при априори известных разрывных параметрах сигнала.* Выражения для характеристик совместных ОМП регулярных параметров $\mathbf{\Theta}_{m0}$ можно найти аналогично [3, 4, 6] методом малого параметра, как это сделано в п. I. Таким образом, асимптотически точные (с ростом ОСШ z) выражения для характеристик совместных ОМП $\mathbf{\Theta}_m$ (31), (52) определяются из (12)—(15).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тихонов В.И.* Оптимальный прием сигналов. М.: Радио и связь, 1983. 320 с.

2. *Сосулин Ю.Г.* Теоретические основы радиолокации и радионавигации. М.: Радио и связь, 1992. 304 с.

3. *Куликов Е.И.* Методы измерения случайных процессов. М.: Радио и связь, 1986. 272 с.

4. *Куликов Е.И., Трифонов А.П.* Оценка параметров сигналов на фоне помех. М.: Сов. радио, 1978. 296 с.

5. *Ибрагимов И.А., Хасьминский Р.З.* Асимптотическая теория оценивания. М.: Наука, 1979. 528 с.

6. *Трифонов А.П., Шинаков Ю.С.* Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех. М.: Радио и связь, 1986. 264 с.

7. Прикладная теория случайных процессов и полей / Васильев К.К., Драган Я.П., Казаков В.А. и др.; Под ред. К. К. Васильева, В. А. Омельченко. Ульяновск: УлГТУ, 1995. 256 с.

8. *Фомин А.Ф.* Помехоустойчивость систем передачи непрерывных сообщений. М.: Сов. радио, 1975. 352 с.

9. *Трифонов А.П., Бутейко В.К.* Характеристики совместных оценок параметров сигнала при частичном нарушении условий регулярности // Радиотехника и электроника. 1991. Т. 36. № 2. С. 319—327.

10. *Фалькович С.Е., Хомяков Э.Н.* Статистическая теория измерительных радиосистем. М.: Радио и связь, 1981. 246 с.

11. *Трифонов А.П., Бутейко В.К.* Совместная оценка двух параметров разрывного сигнала на фоне белого шума // Радиотехника и электроника. 1989. Т. 34. № 11. С. 2323—2329.

12. *Трифонов А.П., Нечаев Е.П., Парфенов В.И.* Обнаружение стохастических сигналов с неизвестными параметрами. Воронеж: Изд-во ВГУ, 1991. 246 с.

13. *Тихонов В.И.* Статистическая радиотехника. М.: Радио и связь, 1982. 624 с.

14. *Левин Б.Р.* Теоретические основы статистической радиотехники. М.: Радио и связь, 1989. 656 с.

15. *Трифонов А.П., Захаров А.В.* Эффективность совместных оценок параметров сигналов при нарушении условий регулярности решающей статистики // Вестник Воронежского государственного университета. Сер. Физика. Математика. 2002. № 1. С. 59—68.

16. *Тихонов В.И., Миронов М.А.* Марковские процессы. М.: Сов. радио, 1977. 488 с.

17. *Kailath T.* Some Integral Equations with Nonrational Kernels // IEEE Trans. on Inform. Theory. 1966. V. IT-12. № 4. P. 442—447.

18. *Крамер Г., Лидбеттер М.* Стационарные случайные процессы / Пер с англ. под ред. Ю. К. Беляева. М.: Мир, 1969. 400 с.