УДК 517.929

О НАПОЛНЕННОСТИ ПОДАЛГЕБРЫ АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНЫХ МЕР, СОСРЕДОТОЧЕННЫХ В КОНУСЕ*

© 2003 В. А. Скопин

Липецкий государственный технический университет

Пусть $g \in L_1(\mathbb{S})$, где $\mathbb{S}$ — конус в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Доказано, что если мера $\delta + g\lambda$ обратима в алгебре ограниченных мер, то $(\delta + g\lambda)^{-1} = \delta + f\lambda$ с некоторой $f \in L_1(\mathbb{S})$. Здесь λ — мера Лебега, а δ — мера Дирака. Аналогичное утверждение справедливо и для операторов. При $n = 1$ и для мер более общего вида это утверждение перестает быть верным.

Пусть абсолютно непрерывная мера μ сосредоточена в некотором конусе $\mathbb{S} \subset \mathbb{R}^n$. Тогда оператор T_μ свертки с мерой μ действует в пространствах $L_p(\mathbb{R}^n)$ и является *причинным* относительно конуса $\mathbb{S}$. Это означает, что для каждой функции $x \in L_p$ и любого $t \in \mathbb{R}^n$ значение функции $(Tx)(t)$ в настоящий момент t определяется только значениями функции x на множестве $t - \mathbb{S}$, т.е. прошлым в смысле теории относительности.

В настоящей заметке доказывается (теорема 9), что подалгебра абсолютно непрерывных мер, сосредоточенных в конусе (с присоединенной единицей), наполнена в алгебре всех ограниченных мер. Иными словами, если абсолютно непрерывная мера, сосредоточенная в конусе $\mathbb{S}$, обратима, то обратная к ней также сосредоточена в этом конусе.

Аналогичный результат для операторов содержится в теореме 11. В ней утверждается, что оператор, обратный к оператору свертки с абсолютно непрерывной мерой, сосредоточенной в конусе $\mathbb{S}$, также является оператором свертки с некоторой абсолютно непрерывной мерой, сосредоточенной в том же самом конусе $\mathbb{S}$. Отметим, что теорема 11 не является очевидным следствием теоремы 9, поскольку, хотя алгебры мер и операторов свертки изоморфны, этот изоморфизм непрерывен лишь в одну сторону.

Доказательства существенно используют свойства обратимости причинных операторов свертки [1], а также наполненность подалгебры абсолютно непрерывных мер (с присоединенной единицей) в алгебре всех ограниченных мер на $\mathbb{R}^n$ [2, 3].

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта № VZ-010-0 Министерства образования РФ и CRDF.

Символом $\mathbb{R}^n$ обозначим n-мерное действительное арифметическое пространство. Через $L_p = L_p(\mathbb{R}^n) = L_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, $1 \leq p \leq \infty$, обозначим пространство классов совпадающих почти всюду измеримых функций $x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, ограниченных по обычным нормам. Символом $\mathbf{B}(L_p)$ обозначим алгебру всех линейных ограниченных операторов, действующих в L_p.

Обозначим через $C = C(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ пространство непрерывных функций $x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, ограниченных по норме

$$\|x\|_C = \sup_{t \in R^n} |x(t)|.$$

Подпространство пространства $C(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, состоящее из функций с компактным носителем, будем обозначать $C_{00} = C_{00}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. Подпространство $C_{00}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, состоящее из функций с носителем в компактном множестве $K \subset \mathbb{R}^n$, будем обозначать $C_K = C_K(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$.

Мерой или *комплексной мерой* на $\mathbb{R}^n$ называют (см., например, [2]) всякий линейный функционал $\mu : C_{00}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ такой, что его ограничение на $C_K(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ непрерывно по норме пространства C для каждого компактного множества $K \subset \mathbb{R}^n$. Традиционно для значения $\mu(x)$ меры μ на функции x используют обозначение $\int x d\mu$.

Обозначим через $C_{00}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ действительное подпространство $C_{00}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, состоящее из непрерывных функций $x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ с компактным носителем. Меру μ называют *действительной*, если $\int x d\mu \in \mathbb{R}$ для всех $x \in C_{00}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

Пусть $S \subseteq \mathbb{R}^n$ — замкнутое множество. Говорят, что *носитель меры* μ *содержится в* S (или мера μ *сосредоточена* в S), если для любого компактного подмножества $K \subseteq \mathbb{R}^n \setminus S$ и для любой функции $x \in C_K(\mathbb{R}^n)$ имеем $\int x d\mu = 0$.

Меру μ на $\mathbb{R}^n$ называют *ограниченной* или *конечной*, если она непрерывна по норме C на всем $C_{00}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$.

Обозначим через $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{M}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ множество всех ограниченных комплексных мер на $\mathbb{R}^n$.

Меру λ, определенную формулой

$$\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}^n} x(t)\,dt, \quad x \in C_{00}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}),$$

где интеграл понимается в смысле Римана, называют [2] *мерой Лебега*. Меру $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ называют [2] *абсолютно непрерывной* (по отношению к мере Лебега λ), если существует функция $g \in L_1(\mathbb{R}^n)$, такая что

$$\int x d\mu = \int x g d\lambda$$

для всех $x \in C_{00}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. В этом случае функцию g называют *плотностью* меры μ, и последнее равенство коротко записывают как

$$d\mu(t) = g(t) d\lambda(t) \text{ или } \mu = g\lambda.$$

Очевидно, если g и f совпадают почти всюду относительно меры λ, то $g\lambda = f\lambda$.

Пусть мера μ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега λ. Тогда для $x \in C_{00}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ мы имеем

$$\left|\int x d\mu\right| = \left|\int x g d\lambda\right| \le \|g\|_{L_1} \|x\|_C .$$

Поэтому $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$.

Обозначим через $\mathcal{M}_{ac} = \mathcal{M}_{ac}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ множество всех абсолютно непрерывных мер на $\mathbb{R}^n$.

Пусть $\mu, \nu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. *Сверткой мер* μ и ν называют (подробнее см., например, [2] или [3]) меру $\mu * \nu$ такую, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} x d(\mu * \nu) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} x(t+s) d\nu(t)\right) d\mu(s) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} x(t+s) d\mu(t)\right) d\nu(s)$$

для всех $x \in C_{00}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$.

Предложение 1 ([см. [2, гл. 8, § 3, 1]). или [3, 4.1.3] *Пространство* $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ *является коммутативной банаховой алгеброй с операцией свертки в качестве умножения. В частности, для* $\mu, \nu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ *имеем* $\mu * \nu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ *и*

$$\|\mu * \nu\| \le \|\mu\| \cdot \|\nu\|.$$

Единицей алгебры $\mathcal{M}$ *является мера* $\delta(x) = x(0)$.

Предложение 2 (см. [2, гл. 8, § 4, 2, предложение 6] или [3, 4.1.4]). *Множество* $\mathcal{M}_{ac}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ *образует замкнутый идеал алгебры* $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, *то есть* $\mathcal{M}_{ac}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ — *замкнутое подпространство в* $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, *и* $\mu * \nu \in \mathcal{M}_{ac}$ *для* $\mu \in \mathcal{M}_{ac}$ *и* $\nu \in \mathcal{M}$.

Пусть $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. Рассмотрим оператор

$$(T_\mu x)(t) = \int x(t-s)\,d\mu(s) = \int x(s)\,d\mu(t-s). \quad (1)$$

Оператор T_μ называют *оператором свертки*. Функцию $T_\mu x$ называют *сверткой* μ и x обозначают символом $\mu * x$. Оператор T_μ действует во многих функциональных пространствах. Особенно важен случай, когда мера μ принадлежит $\mathcal{M}_{ac}$.

Предложение 3 ([см., например, [3, 4.4.1]). Пусть $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ и $1 \le p \le \infty$. Тогда оператор T_μ действует из $L_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ в $L_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ и $|T_\mu| \le |\mu|$.

Следствие 4. *Пусть* $g \in L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ *и* $1 \le p \le \infty$. *Рассмотрим оператор* G, *определенный формулой*

$$(Gx)(t) = \int_{R^n} g(t-s)x(s)ds = \int_{R^n} g(s)x(t-s)ds. \quad (2)$$

Очевидно, это — оператор свертки с мерой $g\lambda \in \mathcal{M}_{ac}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$.

Оператор G *действует из* $L_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ *в* $L_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ *и* $|G| \le |g|_{L_1}$.

Подмножество $\mathbb{S} \subset \mathbb{R}^n$ называют *конусом*, если $\mathbb{S} + \mathbb{S} = \mathbb{S}$ и $\lambda\mathbb{S} \subseteq \mathbb{S}$ для всех $\lambda \ge 0$. Конус $\mathbb{S}$ называют *воспроизводящим*, если $\mathbb{S} - \mathbb{S} = \mathbb{R}^n$. Далее мы полагаем, что в $\mathbb{R}^n$ фиксирован некоторый замкнутый (в топологическом смысле) воспроизводящий конус $\mathbb{S}$.

Через $\mathbb{S}^0$ будем обозначать внутренность множества $\mathbb{S}$.

Обозначим через $\mathcal{M}_{ac}(\mathbb{S}) = \mathcal{M}_{ac}(\mathbb{S}, \mathbb{C})$ подмножество всех мер из $\mathcal{M}_{ac}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ с носителем в конусе $\mathbb{S}$.

Обозначим символами $\tilde{\mathcal{M}}_{ac}(\mathbb{R}^n)$ и $\tilde{\mathcal{M}}_{ac}(\mathbb{S}^n)$ алгебры $\mathcal{M}_{ac}(\mathbb{R}^n)$ и $\mathcal{M}_{ac}(\mathbb{S})$ с присоединенными единицами. Очевидно, их можно реализовать как подалгебры алгебр $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ и $\mathcal{M}(\mathbb{S})$:

$$\tilde{\mathcal{M}}_{ac}(\mathbb{R}^n) = \{\alpha\delta + \mu : \alpha \in \mathbb{C}, \mu \in \mathcal{M}_{ac}(\mathbb{R}^n)\}$$

$$\tilde{\mathcal{M}}_{ac}(\mathbb{S}) = \{\alpha\delta + \mu : \alpha \in \mathbb{C}, \mu \in \mathcal{M}_{ac}(\mathbb{S})\}.$$

Подалгебру $\mathcal{A}$ называют *наполненной* подалгеброй алгебры $\mathcal{B}$, если для любого $a \in \mathcal{A}$ из существования $a^{-1} \in \mathcal{B}$ следует, что $a^{-1} \in \mathcal{A}$.

Теорема 5 ([3, 4.1.10] и [4, лемма 57]).

(a) *Множество* $\tilde{\mathcal{M}}_{ac}(\mathbb{R}^n)$ *является наполненной подалгеброй с единицей банаховой алгебры* $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. *При этом для любой обратимой меры* $\alpha\delta + \mu$, *где* $\alpha \in \mathbb{C}$, $\mu \in \mathcal{M}_{ac}(\mathbb{R}^n)$, *имеем* $(\alpha\delta + \mu)^{-1} = \alpha^{-1}\delta + \nu$ *с некоторой* $\nu \in \mathcal{M}_{ac}(\mathbb{R}^n)$. *(Отметим, что если мера* $\alpha\delta + \mu$ *обратима, то* $\alpha \neq 0$, *см., например, [3, 4.2.7].)*

(b) *Множество* $\tilde{\mathcal{M}}_{ac}(\mathbb{S}^n)$ *является подалгеброй с единицей банаховой алгебры* $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$.

В пространстве L_p рассмотрим семейство замкнутых подпространств

$$(L_p)_t = \{x \in L_p : x(s) = 0 \text{ при } s \in t - S\}, \quad t \in \mathbb{R}^n.$$

Ограниченный линейный оператор $T : L_p \to L_p$ называют [3, 4, 5, 6] *причинным* (относительно конуса $\mathbb{S}$), если для любого $t \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$T(L_p)_t \subseteq (L_p)_t.$$

Обозначим через $L_1(\mathbb{S}) = L_1(\mathbb{S}, \mathbb{C})$ подпространство пространства $L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, состоящее из функций, равных нулю вне конуса $\mathbb{S}$. Очевидно, в случае, когда $g \in L_1(\mathbb{S}, \mathbb{C})$, оператор (2) является *причинным.*

Обозначим через $\mathbf{B}_{\mathbb{S}}(L_p)$ множество всех операторов, причинных относительно $\mathbb{S}$. Очевидно, $\mathbf{B}_S(L_p)$ — замкнутая подалгебра алгебры $\mathbf{B}(L_p)$. Спектр оператора $T \in \mathbf{B}_{\mathbb{S}}(L_p)$ будем называть *причинным спектром* и обозначать $\sigma_{\mathbb{S}}(T)$. Отметим, что причинный спектр оператора (2) вычислен в [4]. Свойства операторов, причинных относительно конуса, изучались также в [6].

Предложение 6. *Отображение* $\mu \mapsto T_\mu$ *из* $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ *в* $\mathbf{B}(L_p)$ *является инъективным морфизмом банаховых алгебр (определение морфизма алгебр см. в [7, гл. 1, § 1, 1] или [3, 1.4.6]); здесь* T_μ *— оператор свертки с мерой* μ, *см. формулу (1). В частности, отображение* $\mu \mapsto T_\mu$ *непрерывно и*

$$T_{\mu * \nu} = T_\mu T_\nu. \qquad (3)$$

Доказательство. Все, кроме инъективности доказано в [3, 4.4.7]. Докажем инъективность. Пусть $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ и $\mu \neq 0$. Покажем, что в этом случае $T_\mu \neq 0$. Известно (см., например, [3, 4.4.6]), что $\|T_\mu : L_1 \to L_1\| = \|\mu\|$. Но в нашем случае $\|\mu\| \neq 0$. Значит, существует $f \in L_1$, такая что $T_\mu f \neq 0$. Из того, что $C_{00}(\mathbb{R}^n)$ плотно в $L_1(\mathbb{R}^n)$ и непрерывности T_μ следует что найдется функция $x \in C_{00}(\mathbb{R}^n) \subset L_p(\mathbb{R}^n)$, такая что $T_\mu x \neq 0$. Значит, $\|T_\mu : L_p \to L_p\| \neq 0$. □

Теорема 7 ([4, предложение 92 и лемма 59]). *Пусть* $g \in L_1(\mathbb{R}^n)$ *и* $\mathbb{S} \subset \mathbb{R}^n$ *— замкнутый воспроизводящий конус. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(a) Оператор $T_{g\lambda}$ *является причинным относительно конуса* $\mathbb{S}$;

(b) Функция g *принадлежит* $L_1(\mathbb{S})$;

(c) Носитель меры $g\lambda$ *содержится в конусе* $\mathbb{S}$.

Теорема 8 ([1]). *Пусть* $n \geq 2$ *и* $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{R}^n$ *— замкнутый воспроизводящий конус. Пусть* $g \in L_1(\mathbb{S}, \mathbb{C})$. *Тогда для оператора свертки*

$$(Gx)(t) = \int_{\mathbb{S}} g(s)x(t-s)\,ds$$

имеем $\sigma_{\mathbb{S}}(G) = \sigma(G)$.

Теорема 9. *Пусть* $n \geq 2$ *и* $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{R}^n$ *— замкнутый воспроизводящий конус. Подалгебра* $\tilde{\mathcal{M}}_{ac}(\mathbb{S})$ *является наполненной подалгеброй алгебры* $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Пусть $\mu \in \mathcal{M}_{ac}(\mathbb{S})$, $\alpha \in \mathbb{C}$ и элемент $\alpha\delta + \mu$ обратим. Тогда, согласно теореме 5, существует мера $\nu \in \mathcal{M}_{ac}(\mathbb{R}^n)$, для которой $(\alpha\delta + \mu)^{-1} = \alpha^{-1}\delta + \nu$. Поэтому, согласно предложению 6, оператор $\alpha + T_\mu$ обратим в $\mathbf{B}(L_p)$ и $(\alpha + T_\mu)^{-1} = \alpha^{-1} + T_\nu$. Следовательно, как утверждает теорема 8, оператор $\alpha^{-1} + T_\nu$ является причинным. Поэтому $\nu \in \mathcal{M}_{ac}(\mathbb{S})$ согласно теореме 7. □

Следующий пример показывает, что при $n = 1$ заключение теоремы 9 может не иметь места.

Пример 1. Рассмотрим меру $\mu(t) = e^{-t}H(t)$, где $H(t)$ — характеристическая функция полуоси $[0, +\infty)$. Очевидно, $\mu \in \tilde{\mathcal{M}}_{ac}(\mathbb{S})$, где $\mathbb{S} = [0, +\infty)$. Используя формулы [3, 4.2.7 и 4.3.3] для спектра меры μ, легко видеть, что спектр меры μ в алгебре $\tilde{\mathcal{M}}_{ac}(\mathbb{R})$ есть окружность $\{z : |z - 1/2| = 1/2\}$, в то время как ее спектр в подалгебре $\tilde{\mathcal{M}}_{ac}(\mathbb{S})$ есть круг $\{z : |z - 1/2| \leq 1/2\}$. В частности, мера $\delta/2 - \mu$ обратима в $\tilde{\mathcal{M}}_{ac}(\mathbb{R})$, но $(\delta/2 - \mu)^{-1}$ не сосредоточена в конусе $S = [0, +\infty)$.

Следующий пример показывает, что свойство, описанное в теореме 9, тесно связано с абсолютной непрерывностью рассматриваемых в ней мер. А именно, для дискретных мер подобное утверждение не имеет места.

Пример 2. Для $t \in \mathbb{R}^n$ обозначим через δ_t меру $\delta_t(x) = x(t)$, $x \in C_{00}(\mathbb{R}^n)$. *Дискретной* мерой называют меру вида $\mu = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \delta_{t_k}$, где

$t_k \in \mathbb{R}^n$ при $k \in N$, и $\sum_{k=1}^{\infty} |a_n| < \infty$. Обозначим символом $\mathcal{M}_d(\mathbb{R}^n)$ подмножество всех дискретных мер. Известно (см., например, [3, 4.1.8]), что $\mathcal{M}_d(\mathbb{R}^n)$ — замкнутая подалгебра алгебры $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. Нетрудно показать [3, 4.1.8] и [4, лемма 57], что подмножество $\mathcal{M}_d(\mathbb{S})$ дискретных мер, сосредоточенных в конусе $\mathbb{S}$, также является подалгеброй алгебры $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. Однако, эта подалгебра не является наполненной. Действительно, пусть $h \in \mathbb{S}$ и $h \notin -\mathbb{S}$. Очевидно, мера δ_h принадлежит $\mathcal{M}_d(\mathbb{S})$ и обратима. Но $(\delta_h)^{-1} = \delta_{-h}$ не принадлежит подалгебре $\mathcal{M}_d(\mathbb{S})$.

Аналог теоремы 9 имеет место и для операторов (теорема 11). Для доказательства нам понадобится следующее предложение.

Предложение 10 ([3, 4.5.5]). *Множество*

$$\tilde{\mathcal{A}}_{ac} = \{\alpha + T_\mu : \alpha \in \mathbb{C}, \mu \in \mathcal{M}_{ac}\}$$

является наполненной подалгеброй алгебры $\mathbf{B}(L_p)$.

Теорема 11. *Пусть* $n \geq 2$, *а* $\mathbb{S} \subset \mathbb{R}^n$ *— замкнутый воспроизводящий конус и* $g \in L_1(\mathbb{S})$. *Пусть оператор* $\alpha + T_{g\lambda}$, *где* $\alpha \in \mathbb{C}$, *обратим. Тогда*

$$(\alpha + T_{g\lambda})^{-1} = \alpha^{-1} + T_{k\lambda},$$

для некоторой функции $k \in L_1(\mathbb{S})$.

Доказательство. Пусть оператор $\alpha + T_{g\lambda}$ обратим. Тогда по предложениям 10 и 6 обратима мера $\alpha\delta + \lambda \in \mathcal{M}_{ac}(\mathbb{S})$. Значит, согласно теореме 5, существует функция $k \in L_1(\mathbb{R}^n)$, такая что $(\alpha\delta + g\lambda)^{-1} = \alpha^{-1}\delta + k\lambda$ или, в терминах операторов, $(\alpha + T_{g\lambda})^{-1} = \alpha^{-1} + T_{k\lambda}$. Согласно теореме 8, оператор $\alpha^{-1} + T_{k\lambda}$ является причинным. Остается заметить что $k \in L_1(\mathbb{S})$ по теореме 7. □

Используя примеры 1 и 2, легко построить примеры операторов, для которых заключение теоремы 11 не имеет места.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Скопин В.А.* Об эквивалентности причинной и обычной обратимости для интегральных операторов свертки // Дифференциальные уравнения. 2001. Т. 37. № 9. С. 1265—1272.

2. *Бурбаки Н.* Интегрирование. Меры на локально компактных пространствах. Продолжение меры. Интегрирование мер. Меры на отделимых пространствах. Гл. 3—5, 9. Пер. с франц. М.: Наука, 1977. 600 с.

3. *Kurbatov V.G.* Functional Differential Operators and Equations. Dordrecht−Boston−London: Kluwer Academic Publishers, 1999. 432 c.

4. *Студеникин А.А.* Операторы свертки с мерой, сконцентрированной в подполугруппе. Липецк, 1998. 130 с. Деп. в ВИНИТИ 19.06.98, № 1871-В98.

5. *Willems J.C.* The Analysis of Feedback Systems. Cambridge: MIT Press, 1971. 188 p.

6. *Криштал И.А.* Спектральный анализ каузальных операторов. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Воронеж: ВГУ, 2003. 112 с.

7. *Бурбаки Н.* Спектральная теория. Сводка результатов: Пер. с франц. М.: Мир, 1972. 183 с.