ВЕСТНИК ВГУ, Серия физика, математика, 2003, № 2

УДК 517.988

О РАВНОМЕРНОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ МЕТРИК, ПОРОЖДЕННЫХ РЕШЕНИЯМИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА МОНЖА-АМПЕРА*

© 2003 Н. М. Ратинер

Воронежский государственный университет

В статье изучаются решения задачи Коши для эволюционного уравнения типа Монжа-Ампера на цилиндре $[0,T]\times V$, где (V,g) — компактное риманово многообразие. Получены оценки вторых производных решения по пространственным переменным. На основании этих оценок доказана равномерная эквивалентность метрик, представляющих собой сумму метрики g и тензора Гессе решения задачи Коши.

Пусть (V,g) — гладкое компактное риманово многообразие, $\dim V = m$. Пусть на многообразии V задана связность, и, значит, определена операция ковариантного дифференцирования. Мы предполагаем, что это связность Леви–Чивита, т.е единственная симметричная связность на римановом многообразии, для которой тензор кручения равен нулю и ковариантная производная метрического тензора g равна нулю.

Пусть $u(x)$ функция на V. Ковариантная производная $\nabla_i u$ от функции u по направлению базисного векторного поля $\frac{\partial}{\partial x^i}$ в локальных координатах $(x^1,\dots,x^m)$ есть, по определению, производная по направлению этого векторного поля, т.е. просто частная производная: $\nabla_i u = \frac{\partial u}{\partial x^i} = u_i$. Набор частных производных функции $(u_1,\dots,u_m)$ меняется как ковариантный тензор, поэтому вторая ковариантная производная вычисляется по формуле:

$$\nabla_j\nabla_i u = u_{ij} - \Gamma_{ij}^k \nabla_k u,$$

где $u_{ij} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j}$ — частные производные функции u, Γ_{ij}^k — символы Кристофеля данной связности. Здесь, как и всюду в дальнейшем, используется обычное правило суммирования по повторяющимся индексам, один из которых должен стоять вверху, а один внизу. Заметим, что для симметричной связности символы Кристофеля симметричны по нижним индексам, поэтому смешанные вторые ковариантные производные от функции симметричны: $\nabla_{ij} u = \nabla_{ji} u$. Для производных третьего порядка и выше имеют место коммутационные формулы, содержащие коэффициенты тензора Римана. Например, для третьих производных имеет место формула:

$$\nabla_{ijk} u = \nabla_{jik} u + R_{kij}^l \nabla_l u, \tag{1}$$

где R_{kij}^l — коэффициенты тензора Римана $R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}$, здесь X, Y, Z — векторные поля, $[X,Y]$ — коммутатор векторных полей.

Пусть $u(x)$ дважды дифференцируемая функция на V, рассмотрим квадратичную форму g_u, матрица которой в локальных координатах $g_{ij} + \nabla_{ij} u$, где $\nabla_{ij} u$ — ковариантные производные функции u второго порядка. Если квадратичная форма g_u положительна определена, то функция u называется *допустимой*, а g_u представляет собой новую метрику на V. Пусть $|g_{ij}|$ и $|g_{ij} + \nabla_{ij} u|$ — определители метрик g и g_u, они задают формы объема на многообразии V, поэтому их частное $M(u) = |g_{ij} + \nabla_{ij} u| / |g_{ij}|$, является положительной функцией. Полученный оператор $u \to M(u)$ принято называть оператором Монжа–Ампера, по аналогии с классическим оператором Монжа–Ампера.

Рассмотрим на цилиндре $[0,T]\times V$ функцию $u(t,x)$, которая при каждом фиксированном $t \in [0,T]$ является допустимой на V и, стало быть, при каждом t задает метрику $g_{u(t,\cdot)}$ на V. Можно применить оператор Монжа–Ампера к функции $u(t,x)$, в результате получается функция двух переменных $M(u)(t,x)$.

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 01-01-00425

В локальных координатах для простоты будем обозначать через g^u_{ij} и g^{ij}_u коэффициенты этой метрики и обратной к ней, опуская зависимость от (t,x).

В статье изучается эволюционное уравнение

$$-\frac{\partial u}{\partial t}+\ln M(u)=f(t,x,u), \quad (t,x)\in[0,T]\times V, \quad (2)$$

с начальным условием:

$$u(0,x)=u_0(x). \quad (3)$$

Вопросы разрешимости стационарного уравнения типа Монжа−Ампера с правыми частями различного вида возникают в некоторых вопросах римановой геометрии, таких как гипотеза Калаби, существование метрик Эйнштейна, см. например [1], [2], [4]. Эволюционное уравнение (2) описывает семейство метрик, обладающих определенными свойствами в зависимости от выбора правой части уравнения.

В работе доказана равномерная эквивалентность метрик, порожденных решениями задачи (2—3):

Теорема 1. *Пусть $u(t,x)$ — решение задачи (2—3), принадлежащее пространству $C([0,T],C^4(V))\bigcap C^1([0,T],C^2(V))\bigcap C^2([0,T],C(V))$. Предположим, что функция $f(t,x,u)$, стоящая в правой части уравнения, ограничена и имеет ограниченные производные до второго порядка включительно по всем переменным, причем $f'_u(t,x,u)\ge\delta>0$ на $[0,T]\times V\times R^1$. Тогда метрики, порожденные решением $u(t,\cdot)$ задачи (2-3) равномерно эквивалентны, т.е. существуют константы c_1 и c_2, зависящие от диаметра многообразия V, метрики g, тензора кривизны, правой части f, ее производных до второго порядка включительно, числа δ, начальной функции u_0 и ее производных до второго порядка включительно, и не зависящие от точки (t,x), такие, что*

$$c_1 g_{ij}\xi^i\xi^j\le g^u_{ij}\xi^i\xi^j\le c_2 g_{ij}\xi^i\xi^j; \quad (4)$$

$$1/c_2 g^{ij}\xi_i\xi_j\le g^{ij}_u\xi_i\xi_j\le 1/c_1 g^{ij}\xi_i\xi_j. \quad (5)$$

для любого $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_m)\in R^m$.

Эта теорема получается из следующей оценки на оператор Лапласа:

Теорема 2. *Пусть $u(t,x)$ — решение задачи (2—3), принадлежащее пространству $C([0,T],C^4(V))\bigcap C^1([0,T],C^2(V))\bigcap C^2([0,T],C(V))$. Имеет место оценка:*

$$0<m-\Delta u\le K,$$

где константа K зависит от тех же величин, что и константы c_1,c_2 в теореме 1.

Для доказательства теорем 1, 2 будут использованы полученные в работе [5] оценки первых производных решений задачи (2—3).

Теорема 3. ([5], т. 1) *Пусть функция $u(t,x)$ допустима при каждом $t\in[0,T]$ и принадлежит $C([0,T],C^2(V))$, пусть D — диаметр многообразия V, тогда*

$$\max_{[0,t]\times V}|\nabla_x u|\le 2D.$$

Теорема 4. ([5], т. 2) *Пусть функция $u(t,x)$ допустима при каждом $t\in[0,T]$, является решением задачи (2-3) и принадлежит $C([0,T],C^3(V))\bigcap C^1([0,T],C^2(V))\bigcap C^2([0,T],C(V))$. Предположим, что функция $f(t,x,u)$, стоящая в правой части уравнения, ограничена и имеет ограниченные первые производные по всем переменным, причем $f'_u(t,x,u)\ge\delta>0$ на $[0,T]\times V\times R^1$. Тогда $u_t(x,t)$ ограничена по модулю константой, зависящей от диаметра многообразия V, исходной метрики g на V, начальной функции u_0, максимума модулей правой части f, ее первых производных и числа δ.*

Пусть

$$\operatorname*{osc}_{[0,T]\times V} u=\sup_{[0,T]\times V} u-\inf_{[0,T]\times V} u= \\ =\sup_{(t,x),(t_1,x_1)\in[0,T]\times V}\left|u(t,x)-u(t_1,x_1)\right|.$$

Из теорем 3, 4 и теоремы конечных приращений вытекает оценка на осцилляцию:

$$\operatorname*{osc}_{[0,T]\times V} u\le D\max(\max_{[0,T]\times V}|u_t|,\max_{[0,T]\times V}|u_x|)\le C, \quad (6)$$

где константа C зависит от параметров, указанных в предыдущей теореме. С учетом начального условия (3) получаем также оценку на максимум модуля решения:

$$\max_{[0,T]\times V}|u|\le C+\max_V|u_0|=C_1, \quad (7)$$

В процессе доказательства при вычислении выражений, которые не зависят от выбора системы координат, мы будем, там, где это нужно, использовать специальные карты.

Определение 1. (см. [1], [3]) Карта многообразия V в окрестности точки x называется адаптированной (для данной точки x и данной функции u), если в точке x выполняются соотношения: $g_{ij}=\delta_{ij}$ и $\nabla_{ij}u=\delta_{ij}u_{ij}$, где

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j;\\ 0, & i\ne j.\end{cases}$$ — символ Кронекера.

Адаптированная карта на цилиндре $[0,t]\times V$ в точке (t,x) получается естественным образом как прямое произведение интервала (или полуинтервала, если t — граничная точка) на адаптированную карту в точке x.

Начнем с доказательства оценки Δu.

Доказательство теоремы 2.

Заметим, во-первых, что неравенство $m-\Delta u>0$ верно для любой допустимой функции $u(t,x)$. Действительно, зафиксируем точку (t,x) и, учитывая, что $(m-\Delta u)$ — функция и, значит, ее значения не зависят от выбора карты, а зависят только от точки (t,x), выберем адаптированными карту многообразия $[0,T]\times V$ в окрестности точки (t,x). В адаптированной карте имеем: $m-\Delta u = = m+\sum_{i=1}^{m} u_{ii} = \sum_{i=1}^{m}(1+u_{ii})$. С другой стороны, квадратичная форма g_u в адаптированной карте имеет матрицу:

$$\begin{pmatrix} 1+\partial_{11}u & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1+\partial_{mm}u \end{pmatrix}.$$

Поскольку квадратичная форма положительно определена, то $1+u_{ii}>0$, $i=1,\dots,m$.

Для доказательства правого неравенства, мы, следуя [1],[3], рассмотрим на $[0,T]\times V$ функционал $A(t,x)=\ln(m-\Delta u)-ku(t,x)$ с некоторой константой k, которая будет выбрана позднее. Пусть (t_0,x_0) — точка, в которой функционал A принимает максимальное значение. Если $0<t_0\le T$, то

$$\Delta' A(t_0,x_0)\ge 0;\ \nabla_\gamma A(t_0,x_0)=0$$

и

$$\frac{\partial A}{\partial t}(t_0,x_0)\ge 0,$$

где $\Delta' u=-g_u^{\alpha\beta}\nabla_{\alpha\beta}u$ — оператор Лапласа в метрике g_u. Вычисляя $\nabla_\gamma A$, $\Delta' A$ и $\frac{\partial A}{\partial t}$, получим:

$$\nabla_\gamma A(t_0,x_0)=-\frac{\nabla_\gamma\Delta u}{m-\Delta u}-k\nabla_\gamma u=0; \tag{8}$$

$$\Delta' A(t_0,x_0)= =-\frac{\Delta'\Delta u}{m-\Delta u}-k\Delta' u+\frac{g_u^{\gamma\rho}\nabla_\gamma\Delta u\nabla_\rho\Delta u}{(m-\Delta u)^2}\ge 0; \tag{9}$$

$$\frac{\partial A}{\partial t}(t_0,x_0)=-\frac{\Delta u_t}{m-\Delta u}-ku_t\ge 0. \tag{10}$$

Вычислим теперь оператор Лапласа в метрике g от обеих частей уравнения (2). Для вычисления производных от определителя и элементов обратной матрицы использована лемма 1 из [5]. Сначала применим ∇_α:

$$-\nabla_\alpha u_t+g_u^{\beta\gamma}\nabla_{\alpha\beta\gamma}u=f_{x_\alpha}+f_u\nabla_\alpha u,$$

затем ∇_μ:

$$-\nabla_{\mu\alpha}u_t+\nabla_\mu(g_u^{\beta\gamma})\nabla_{\alpha\beta\gamma}u+g_u^{\beta\gamma}\nabla_{\mu\alpha\beta\gamma}u= =f_{x_\alpha x_\mu}+2f_{ux_\mu}\nabla_\alpha u+f_{u^2}\nabla_\alpha u\nabla_\mu u+f_u\nabla_{\mu\alpha}u,$$

и умножим на $-g^{\alpha\mu}$:

$$-\Delta u_t+g^{\alpha\mu}g_u^{\beta\nu}g_u^{\gamma\rho}\nabla_{\alpha\beta\gamma}u\nabla_{\mu\nu\rho}u-g^{\alpha\mu}g_u^{\beta\gamma}\nabla_{\mu\alpha\beta\gamma}u= =\Delta f-2g^{\alpha\mu}f_{ux_\mu}\nabla_\alpha u-f_{u^2}\left|\nabla_x u\right|^2+f_u\Delta u. \tag{11}$$

Рассмотрим по отдельности каждое слагаемое в (9). В первом слагаемом $\Delta'\Delta u=g_u^{\beta\gamma}g^{\alpha\mu}\nabla_{\beta\gamma\alpha\mu}u$ содержит четвертые производные и отличается от третьего слагаемого в (11) только порядком производных. Обозначим

$$E=\Delta'\Delta u-g^{\alpha\mu}g_u^{\beta\gamma}\nabla_{\mu\alpha\beta\gamma}u.$$

Тогда

$$\frac{\Delta'\Delta u}{m-\Delta u}=\frac{E+g^{\alpha\mu}g_u^{\beta\gamma}\nabla_{\mu\alpha\beta\gamma}u}{m-\Delta u}. \tag{12}$$

Из коммутационных формул для ковариантных производных, которые для четвертых производных содержат коэффициенты тензора кривизны и вторые производные, вытекает оценка (см. [3], лемма 2):

$$|E|\le[a(m-\Delta u)+b]g_u^{\lambda\mu}g_{\lambda\mu}+c, \tag{13}$$

где a,b,c — положительные константы, зависящие от диаметра и тензора кривизны многообразия V. Для второго слагаемого в (9) напишем:

$$\Delta' u=-g_u^{\lambda\mu}\nabla_{\lambda\mu}u=g_u^{\lambda\mu}(g_{\lambda\mu}-\nabla_{\lambda\mu}u-g_{\lambda\mu})= =g_u^{\lambda\mu}g_{\lambda\mu}-g_u^{\lambda\mu}\overset{u}{g}_{\lambda\mu}.$$

Учитывая, что $g_u^{\lambda\mu}\overset{u}{g}_{\lambda\mu}=m$ (суммирование по обоим индексам), получаем

$$\Delta' u=g_u^{\lambda\mu}g_{\lambda\mu}-m. \tag{14}$$

Для того, чтобы оценить третье слагаемое в (2) раскроем квадрат:

$$g^{\alpha\mu}g_u^{\beta\nu}g_u^{\gamma\rho}[(m-\Delta u)\nabla_{\alpha\beta\gamma}u+\overset{u}{g}_{\alpha\beta}\nabla_\gamma\Delta u]\times \times[(m-\Delta u)\nabla_{\mu\nu\rho}u+\overset{u}{g}_{\mu\nu}\nabla_\rho\Delta u]\ge 0.$$

Раскрывая квадрат, мы получаем четыре слагаемых:

$$\begin{gathered}
g^{\alpha\mu} g_u^{\beta\nu} g_u^{\gamma\rho} (m-\Delta u)^2 \nabla_{\alpha\beta\gamma} u \nabla_{\mu\nu\rho} u + \\
+g^{\alpha\mu} g_u^{\beta\nu} g_u^{\gamma\rho} g^u_{\mu\nu} (m-\Delta u) \nabla_{\alpha\beta\gamma} u \nabla_\rho \Delta u + \\
+g^{\alpha\mu} g_u^{\beta\nu} g_u^{\gamma\rho} g^u_{\alpha\beta} (m-\Delta u) \nabla_{\mu\nu\rho} u \nabla_\gamma \Delta u + \\
+g^{\alpha\mu} g_u^{\beta\nu} g_u^{\gamma\rho} g^u_{\alpha\beta} g^u_{\mu\nu} \nabla_\gamma \Delta u \nabla_\rho \Delta u \geq 0.
\end{gathered} \tag{15}$$

Заметим теперь, что во втором слагаемом $g_u^{\beta\nu} g^u_{\mu\nu} = \delta^\beta_\mu$, где δ^β_μ — символ Кронекера. С учетом этого

$$\begin{gathered}
g^{\alpha\mu} \nabla_{\alpha\beta\gamma} u = g^{\alpha\beta} \nabla_{\alpha\beta\gamma} u = \\
= g^{\alpha\beta} [\nabla_{\gamma\alpha\beta} u + (\nabla_{\alpha\beta\gamma} u - \nabla_{\gamma\alpha\beta} u)] = \\
= -\nabla_\gamma \Delta u + g^{\alpha\beta} (\nabla_{\alpha\beta\gamma} u - \nabla_{\gamma\alpha\beta} u),
\end{gathered}$$

поскольку ковариантные производные римановой метрики равны нулю. Воспользуемся коммутационными формулами (1): $\nabla_{\alpha\beta\gamma} u = \nabla_{\alpha\gamma\beta} u = \nabla_{\gamma\alpha\beta} u + R^k_{\beta\alpha\gamma} \nabla_k u$. Второе слагаемое в (15) принимает вид:

$$\begin{gathered}
-g_u^{\gamma\rho} \nabla_\gamma \Delta u \nabla_\rho \Delta u (m-\Delta u) + \\
+g_u^{\gamma\rho} g^{\alpha\beta} R^k_{\beta\alpha\gamma} \nabla_k u \nabla_\rho \Delta u (m-\Delta u).
\end{gathered} \tag{16}$$

Преобразуем второй член последней формулы. Из формулы (8) выразим $\nabla_\rho \Delta u = -k \nabla_\rho u (m-\Delta u)$. Кроме того, по определению, $R_{i\beta\alpha\gamma} = g_{ij} R^j_{\beta\alpha\gamma}$. Умножим обе части этого равенства на g^{ik} и просуммируем по i. Тогда $g^{ik} R_{i\beta\alpha\gamma} = g^{ik} g_{ij} R^j_{\beta\alpha\gamma} = \delta^k_j R^j_{\beta\alpha\gamma} = R^k_{\beta\alpha\gamma}$. Подставляя полученное выражение в (16), получаем:

$$\begin{gathered}
-g_u^{\gamma\rho} \nabla_\gamma \Delta u \nabla_\rho \Delta u (m-\Delta u) - \\
-k g_u^{\gamma\rho} g^{\alpha\beta} g^{ik} R_{i\beta\alpha\gamma} \nabla_k u \nabla_\rho u (m-\Delta u)^2.
\end{gathered}$$

С другой стороны, $g^{\alpha\beta} R_{i\beta\alpha\gamma} = -g^{\alpha\beta} R_{\beta i\alpha\gamma} = -R^\alpha_{i\alpha\gamma} = -R_{i\gamma}$, где $R_{i\gamma}$ — коэффициенты тензора Риччи. Поднимая индекс у производной $\nabla_k u$, получаем окончательный вид для второго слагаемого в (15):

$$\begin{gathered}
-g_u^{\gamma\rho} \nabla_\gamma \Delta u \nabla_\rho \Delta u (m-\Delta u) + \\
+k g_u^{\gamma\rho} R_{i\gamma} \nabla^i u \nabla_\rho u (m-\Delta u)^2.
\end{gathered} \tag{17}$$

Аналогичные вычисления показывают, что третье слагаемое в неравенстве (15) также равно выражению (17).

В четвертом слагаемом неравенства (15) $g_u^{\beta\nu} g^u_{\mu\nu} = \delta^\beta_\mu$, тогда

$$g^{\alpha\mu} g^u_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} g^u_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} (g_{\alpha\beta} + \nabla_{\alpha\beta} u) = m - \Delta u.$$

Таким образом, четвертое слагаемое равно

$$g_u^{\gamma\rho} \nabla_\gamma \Delta u \nabla_\rho \Delta u (m-\Delta u).$$

В результате неравенство (15) принимает вид:

$$\begin{gathered}
g^{\alpha\mu} g_u^{\beta\nu} g_u^{\gamma\rho} (m-\Delta u)^2 \nabla_{\alpha\beta\gamma} u \nabla_{\mu\nu\rho} u - \\
-g_u^{\gamma\rho} \nabla_\gamma \Delta u \nabla_\rho \Delta u (m-\Delta u) + \\
+2k g_u^{\gamma\rho} R_{i\gamma} \nabla^i u \nabla_\rho u (m-\Delta u)^2 \geq 0.
\end{gathered}$$

Откуда

$$\begin{gathered}
g^{\alpha\mu} g_u^{\beta\nu} g^{\gamma\rho} \nabla_{\alpha\beta\gamma} u \nabla_{\mu\nu\rho} u \geq \\
\geq \frac{g_u^{\gamma\rho} \nabla_\gamma \Delta u \nabla_\rho \Delta u}{(m-\Delta u)} - 2k g_u^{\gamma\rho} R_{i\gamma} \nabla^i u \nabla_\rho u.
\end{gathered} \tag{18}$$

Для оценки второго слагаемого правой части (18) рассмотрим адаптированную карту в точке (t_0, x_0). Тогда $g_{\gamma\rho} = \delta_{\gamma\rho}$, $g_u^{\gamma\rho} = \delta^{\gamma\rho} \frac{1}{1+u_{\gamma\gamma}}$. Обозначим $\xi_\gamma = R_{i\gamma} \nabla^i u$. Тогда

$$\begin{gathered}
\left|2k g_u^{\gamma\rho} R_{i\gamma} \nabla^i u \nabla_\rho u\right| = \left|2k g_u^{\gamma\rho} \xi_\gamma \nabla_\rho u\right| = \\
= \left|2k \sum_{\gamma=1}^m \frac{\xi_\gamma \nabla_\gamma u}{1+u_{\gamma\gamma}}\right| \leq 2k \sum_{\gamma=1}^m \frac{|\xi_\gamma| \, |\nabla_\gamma u|}{1+u_{\gamma\gamma}}.
\end{gathered}$$

Далее $\left|\nabla_\gamma u\right|^2 \leq \sum\limits_\gamma (\nabla_\gamma u)^2 = |\nabla u|^2 \leq (2D)^2$, следовательно $\left|\nabla_\gamma u\right| \leq 2D$. Если константа d оценивает коэффициенты тензора Риччи по модулю, то $\left|\xi_\gamma\right| = \left|R_{i\gamma} \nabla^i u\right| \leq \sum\limits_{i=1}^m \left|R_{i\gamma}\right| \left|\nabla_i u\right| \leq 2Dmd$ (в адаптированной карте $\nabla^i u = \nabla_i u$). Осталось заметить, что $g_u^{\lambda\mu} g_{\lambda\mu} = \sum\limits_{\gamma=1}^m \frac{1}{1+u_{\gamma\gamma}}$. Таким образом

$$\left|2k g_u^{\gamma\rho} R_{i\gamma} \nabla^i u \nabla_\rho u\right| = 8kD^2 md (g_u^{\lambda\mu} g_{\lambda\mu}). \tag{19}$$

Тогда из (18):

$$\begin{gathered}
g^{\alpha\mu} g_u^{\beta\nu} g^{\gamma\rho} \nabla_{\alpha\beta\gamma} u \nabla_{\mu\nu\rho} u \geq \\
\geq \frac{g_u^{\gamma\rho} \nabla_\gamma \Delta u \nabla_\rho \Delta u}{(m-\Delta u)} - 8kD^2 md (g_u^{\lambda\mu} g_{\lambda\mu}).
\end{gathered} \tag{20}$$

Далее в неравенстве (20) левую часть заменим из (11):

$$\begin{gathered}
\frac{g_u^{\gamma\rho} \nabla_\gamma \Delta u \nabla_\rho \Delta u}{(m-\Delta u)} - 8kD^2 md (g_u^{\lambda\mu} g_{\lambda\mu})) \leq \\
\leq \Delta u_t + g^{\alpha\mu} g_u^{\beta\gamma} \nabla_{\mu\alpha\beta\gamma} u + \Delta f - \\
-2 g^{\alpha\mu} f_{u x_\mu} \nabla_\alpha u - f_{u^2} \left|\nabla_x u\right|^2 + f_u \Delta u.
\end{gathered} \tag{21}$$

Подставим (12), (14) и (21), деленное на $m-\Delta u$, в (9):

$$0 \le -\frac{E}{m-\Delta u} - \frac{g_u^{\beta\gamma} g^{\alpha\mu} \nabla_{\mu\alpha\beta\gamma} u}{m-\Delta u} - k(g_u^{\lambda\mu} g_{\lambda\mu} - m) + \\ + \frac{\Delta u_t}{m-\Delta u} + \frac{g^{\alpha\mu} g_u^{\beta\gamma} \nabla_{\mu\alpha\beta\gamma} u}{m-\Delta u} + \\ + \frac{\Delta f - 2g^{\alpha\mu} f_{ux_\mu} \nabla_\alpha u + f_{u^2} |\nabla_x u|^2}{m-\Delta u} + \frac{f_u \Delta u}{m-\Delta u} + \\ + \frac{8kD^2 md(g_u^{\lambda\mu} g_{\lambda\mu})}{m-\Delta u}. \tag{22}$$

Сократим второе и пятое слагаемые. Для оценки четвертого слагаемого используем (10) и оценку на $|u_t|$, тогда

$$\frac{\Delta u_t}{m-\Delta u} \le -ku_t \le C_1. \tag{23}$$

Кроме того, первые и вторые производные правой части уравнения $f(t,x,u)$ ограничены и имеется оценка на градиент $|\nabla_x u|$ (теорема 3). Обозначим через M константу, ограничивающую $\Delta f - 2g^{\alpha\mu} f_{ux_\mu} \nabla_\alpha u - f_{u^2} |\nabla_x u|^2$. Обозначим также $d_1 = 8kD^2 md$ и используем оценку (13) на E. Тогда (22) дает:

$$0 \le \frac{[a(m-\Delta u)+b] g_u^{\lambda\mu} g_{\lambda\mu} + c}{m-\Delta u} - k(g_u^{\lambda\mu} g_{\lambda\mu} - m) + \\ + C_1 + \frac{M}{m-\Delta u} + \frac{f_u \Delta u}{m-\Delta u} + \frac{d_1 g_u^{\lambda\mu} g_{\lambda\mu}}{m-\Delta u},$$

или

$$(k - a - \frac{b+d_1}{m-\Delta u}) g_u^{\lambda\mu} g_{\lambda\mu} \le \\ \le km + C_1 + \frac{c+M}{m-\Delta u} + \frac{f_u \Delta u}{m-\Delta u}.$$

Выберем адаптированную карту в точке (t_0, x_0) и заметим, что $\frac{m-\Delta u}{m}$ это среднее арифметическое чисел $1+\partial_{11}u, \ldots, 1+\partial_{mm}u$, а

$$[M(u)]^{\frac{1}{m}} = \det \begin{pmatrix} 1+\partial_{11}u & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 1+\partial_{mm}u \end{pmatrix}^{\frac{1}{m}}$$

их среднее геометрическое. Поэтому

$$\frac{m}{m-\Delta u} \le [M(u)]^{-\frac{1}{m}}.$$

Далее, из неравенства $m-\Delta u > 0$ получаем $\Delta u < m$, а поскольку $\frac{f_u}{m-\Delta u} > 0$, то

$$\frac{f_u \Delta u}{m-\Delta u} < \frac{f_u m}{m-\Delta u} \le L[M(u)]^{-\frac{1}{m}} \le Le^{-\frac{u_t + f(t,x,u)}{m}},$$

где L — константа, ограничивающая сверху f_u, а $M(u) = e^{u_t + f(t,x,u)}$ из уравнения.

Выберем теперь константу $k = a+1$, тогда

$$\left(1 - \frac{b+d_1}{m-\Delta u}\right)\left(g_u^{\lambda\mu} g_{\lambda\mu}\right)(t_0, x_0) \le \\ \le \left[km + C_1 + \left(\frac{c+M}{m} + L\right) e^{-\frac{u_t + f(t,x,u)}{m}}\right] \le \\ \le \left[km + C_1 + \left(\frac{c+M}{m} + L\right) e^{\frac{-\inf(u_t + f(t,x,u))}{m}}\right] \stackrel{\text{def}}{=} K_0, \tag{24}$$

где константа K_0 зависит от многообразия V (размерности, диаметра, метрики и кривизны) от правой части f и ее производных до второго порядка включительно, числа δ, начальной функции u_0 и ее производных до второго порядка включительно. Зафиксируем число c_0, $0 < c_0 < 1$. Если $1 - \frac{b+d_1}{m-\Delta u} \le c_0$ в точке (t_0, x_0), то

$$(m-\Delta u)(t_0, x_0) \le \frac{b+d_1}{1-c_0}.$$

Поскольку (t_0, x_0) — точка максимума функционала A, то

$$[\ln(m-\Delta u) - ku](t_0, x_0) \le [\ln(m-\Delta u) - ku](t, x).$$

Поэтому

$$(m-\Delta u)(t,x) \le (m-\Delta u)(t_0, x_0) e^{k(u(t_0,x_0) - u(t,x))} \le \\ \le \frac{b+d_1}{1-c_0} e^{k \operatorname{osc} u}. \tag{25}$$

Используя имеющуюся оценку на осцилляцию (6), получаем утверждение теоремы.

Если же $1 - \frac{b+d_1}{m-\Delta u} > c_0$, то в (24) получим:

$$c_0 g_u^{\lambda\mu} g_{\lambda\mu} \le K_0.$$

Таким образом,

$$(g_u^{\lambda\mu} g_{\lambda\mu})_{(t_0, x_0)} \le K_1 = K_0 / c_0.$$

Выберем теперь адаптированную карту в точке (t_0, x_0). В этой карте, используя неравенство для среднего арифметического и среднего геометрического и то, что $g_u^{\alpha\alpha} = \frac{1}{1+u_{\alpha\alpha}} > 0$, запишем

$$1 + u_{\alpha\alpha} = M(u) \cdot \prod_{\beta \ne \alpha} g_u^{\beta\beta} \le \\ \le M(u) \left[\frac{1}{m-1} \sum_{\beta \ne \alpha} g_u^{\beta\beta}\right]^{m-1} \le \\ \le M(u) \left[\frac{1}{m-1} \sum_{\beta=1}^{m} g_u^{\beta\beta}\right]^{m-1}. \tag{26}$$

Просуммируем равенства (26) по $\alpha = 1,\dots,m$:

$$(m-\Delta u)(t_0,x_0) = \sum_{\alpha=1}^{m}(1+\partial_{\alpha\alpha}u) \le$$

$$\le mM(u)\left[\frac{1}{m-1}\sum_{\beta=1}^{m} g_u^{\beta\beta}\right]^{m-1} \le$$

$$\le mM(u)\left(\frac{K_1}{m-1}\right)^{m-1} = me^{u_t+f(t,x,u)}\left(\frac{K_1}{m-1}\right)^{m-1} \le$$

$$\le me^{\sup(u_t+f(t,x,u))}\left(\frac{K_1}{m-1}\right)^{m-1} = K_2.$$

Аналогично (25) запишем:

$$(m-\Delta u)(t,x) \le (m-\Delta u)(t_0,x_0)e^{k\operatorname{osc}u} \le K_2 e^{k\operatorname{osc}u}.$$

Использование оценки (6) завершает рассуждения в случае, когда функционал A достигает своего максимального значения в точке (t_0,x_0), $t_0>0$. Если же $t_0=0$, то

$$A(t,x) = [\ln(m-\Delta u)-ku](t,x) \le$$

$$\le [\ln(m-\Delta u_0)-ku_0](x_0),$$

поэтому

$$0 < m-\Delta u \le (m-\Delta u_0)e^{k\operatorname{osc}u}. \blacktriangleright$$

Доказательство теоремы 1.

◄ Выберем в окрестности точки (t,x) адаптированную карту. Тогда $g_{ij} = g^{ij} = \delta_{ij}$, $g_{ij}^u = \delta_{ij}(1+u_{ii})$ и $g_u^{ij} = \delta_{ij}\frac{1}{1+u_{ii}}$. Неравенства (4) и (5), которые нам надо доказать, в этой карте примут вид:

$$c_1(\xi^i)^2 \le (1+u_{ii})(\xi^i)^2 \le c_2(\xi^i)^2; \tag{27}$$

$$\frac{1}{c_2}(\xi_i)^2 \le \frac{1}{1+u_{ii}}(\xi_i)^2 \le \frac{1}{c_1}(\xi_i)^2. \tag{28}$$

для любого $\xi = (\xi_1,\dots,\xi_m) \in R^m$.

Из теоремы 2

$$0 < m-\Delta u = \sum_{\alpha=1}^{m} 1+u_{\alpha\alpha} \le K.$$

Поскольку $1+u_{\alpha\alpha} > 0$, то для фиксированного α

$$0 < 1+u_{\alpha\alpha} \le \sum_{\alpha=1}^{m}((1+u_{\alpha\alpha}) < K,$$

С другой стороны

$$1+u_{\alpha\alpha} = \frac{M(u)}{\prod\limits_{\beta\ne\alpha}(1+u_{\beta\beta})} > \frac{M(u)}{K^{m-1}} =$$

$$= e^{u_t+f(t,x,u)}K^{1-m} \ge e^{\inf(u_t+f)}K^{1-m} = N.$$

Поскольку $g_{\alpha\alpha}=1$ можно записать:

$$Ng_{\alpha\alpha} = N < g_{\alpha\alpha}^u = 1+u_{\alpha\alpha} < K = Kg_{\alpha\alpha}. \tag{29}$$

Умножая неравенство (29) на $(\xi^\alpha)^2$ и суммируя по α, получаем неравенство (27) с константами $c_1 = e^{\inf(u_t+f)}K$ и $c_2 = K$. Записывая вместо (29) неравенство для обратных величин, получаем:

$$1/Kg^{\alpha\alpha} < g_u^{\alpha\alpha} = \frac{1}{1+u_{\alpha\alpha}} < 1/Ng^{\alpha\alpha},$$

из которого вытекает (28). ►

ЛИТЕРАТУРА

1. *Aubin T.* Nonlinear Analysis on Manifolds. Monge-Ampère Equations. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 252. Springer-Verlag. 1982. 204 p.

2. *Aubin T.* Mètrique riemanniennes et courbure // J. Diff. Gèo. 1970. V. 4. P. 383—424.

3. *Delanoë P.* Équations du type de Monge-Ampère sur les variétés Riemanniennes compactes, I // J. Funct. An. 1981. V. 40 P. 358—386.

4. *Бессе А.* Многообразия Эйнштейна. М.: Мир. 1990. Т. 1, 2. 703 с.

5. *Звягин В.Г., Ратинер Н.М.* Оценки первых производных решения задачи Коши для эволюционного уравнения Монжа−Ампера//Вестник ВГУ, Сер. физика, математика. 2001. № 1. С. 100—103.