

УДК 517.925.52

## ИЗУЧЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ДЮФФИНГА ПРИ АППРОКСИМАЦИИ КУБИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИЕЙ\*

© 2003 И. С. Мартынова, О. Ю. Макаренков

*Воронежский государственный университет*

В работе изучается уравнение Дюффинга с параметрами, соответствующими аттрактору Уеды. Решается вопрос о хаотичности решений при замене кубической нелинейности близкой кусочно-линейной функции. При этом рассматриваются как сколь угодно точные аппроксимации, так и грубые.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время для многих уравнений нелинейной динамики обнаружилось так называемые хаотические решения, которые остаются ограниченными во времени, но не выходят ни на стационарный, ни на периодический, ни на почти-периодический режимы (по крайней мере, в течение долгого времени, [1]). Причиной такого поведения являются входящие в соответствующее уравнение нелинейности. Цель настоящей работы — изучить возможность наличия хаотических решений у уравнения с нелинейностью в виде кусочно-линейной функции. В качестве изучаемого уравнения было выбрано следующее

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 0.05 \frac{dx}{dt} + g_\delta(x) = 7.5 \cos t, \quad (1)$$

где  $g_\delta$  — кусочно-линейная функция, имеющая перегибы в точках  $x = \delta n$  (здесь  $\delta$  — фиксированный параметр,  $n$  — произвольное целое число), и удовлетворяющая в этих точках условию  $g_\delta(x) = x^3$ . При  $\delta \rightarrow 0$  уравнение (1) переходит в классическое уравнение Дюффинга с параметрами, соответствующими хаотическому аттрактору Уеды (см. [2] и рис. 1а). Поэтому, естественно ожидать, что при малых  $\delta > 0$  решения уравнения (1) также будут хаотическими. Более интересным является вопрос о том, как будут вести себя решения уравнения (1) при увеличении  $\delta > 0$ . Такое исследование проводится в настоящей работе численным методом.

Существует два основных способа проверки решения уравнения (1) на хаотичность:

\* Работа поддержана РФФИ, гранты 02-01-00189, 02-01-00307, 03-01-06308 и грантом VZ-010 U.S.CRDF и Министерства образования РФ.

изучение стробоскопической последовательности Пуанкаре  $(\{x(2\pi n)\}_{n=1}^\infty, \{\dot{x}(2\pi n)\}_{n=1}^\infty)$  и анализ частотного спектра Фурье данного решения  $x$ . Фрактальная структура образа стробоскопической последовательности и непрерывность частотного спектра Фурье являются индикаторами хаотичности решения (см. [1]). При

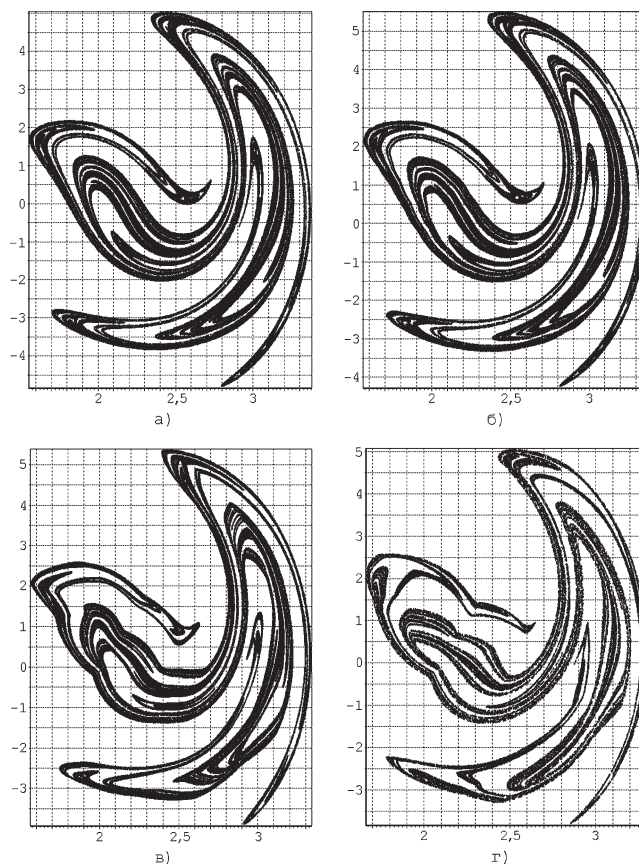


Рис. 1. Изображение стробоскопической последовательности уравнения (1) при различных значениях параметра аппроксимации: а)  $\delta=0$  (аттрактор Уеды), б)  $\delta=0.1$ , в)  $\delta=0.5$ , г)  $\delta=0.69$

численном моделировании первый способ является более простым и более точным, поэтому он был выбран для настоящего исследования.

## 2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Как и ожидалось, образ стробоскопической последовательности не зависит асимптотически от того, какое из решений уравнения (1) выбрано для анализа. Было установлено, что при  $\delta$ , изменяющемся от 0 до 0.69, стробоскопическая последовательность сохраняет странную структуру (см. рис. 1), и соответствующее решение можно считать хаотическим. При  $\delta = 0.699$  стробоскопическая последовательность представляет собой конечное число кривых, которые при увеличении  $\delta$  до 0.9 вырождаются в конечное число точек. Поэтому, малыми для уравнения (1) с точностью до 0.01 естественно назвать  $\delta < 0.7$ .

Рассмотрим теперь поведение стробоскопической последовательности в случае, когда  $\delta$  не является мыльным в указанном смысле. Оказалось, что при  $\delta = 0.928$  стробоскопическая последовательность любого решения уравнения (2) вновь приобретает странную структуру, причем похожую на наблюдаемую при  $\delta \in (0, 0.69)$ . На рисунке 2 приведено изменение этой последовательности при  $\delta \in (0.928, 1.1002)$ .

Отметим, что при  $\delta = 1.1003$  стробоскопическая последовательность уже состоит из конечного числа точек, такая же структура сохраняется и до  $\delta = 2$ .

Детальный анализ показывает, что исчезновение странной структуры стробоскопической последовательности при увеличении  $\delta$  от 0.69 до 0.699 и от 1.1002 до 1.1003 сопровождается утончением ее образа. Это является одним из часто наблюдаемых переходов от хаотического к регулярному решению (см. [1]).

## 3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, в работе показано, что нелинейность уравнения, связанная с входящей в него кусочно-линейной функцией, также может являться причиной существования хаотических решений. Из ограниченности стробоскопической последовательности решения уравнения (1) следует ограниченность решения уравнения (1) на бесконечном положительном интервале времени. Поэтому, для уравнения (1) можно указать кусочно-линейные функции, содержащие конечное число перегибов и допускающие хаотические решения. Пос-

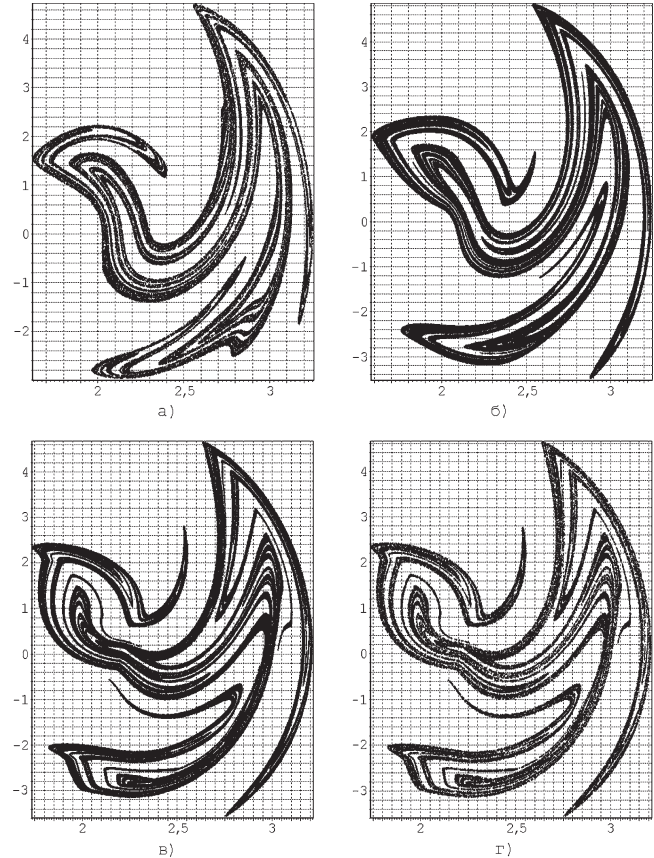


Рис. 2. Изображение стробоскопической последовательности уравнения (1) при различных значениях параметра аппроксимации: а)  $\delta = 0.928$ , б)  $\delta = 1.0$ , в)  $\delta = 1.1$ , д)  $\delta = 1.1002$

леднее замечание устанавливает принципиальную возможность наблюдения хаотических решений в кусочно-линейных уравнениях с конечным числом перегибов. А тот факт, что хаотическое поведение решений уравнения (1) имело место не только для малых  $\delta > 0$ , указывает на то, что хаотические решения могут возникать в кусочно-линейных уравнениях с небольшим числом перегибов. Именно, дальнейшей задачей здесь является исследование возможности существования хаотических решений у кусочно-линейных уравнений с числом перегибов, равным двум или трем.

Авторы выражают благодарность профессору А. И. Перова и аспиранту М. М. Портнову за помощь в разработке используемой в настоящей работе программы численного моделирования аттракторов уравнения Дюффинга.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мун Ф. Хаотические колебания. М.: Мир. 1990. 421 с.
2. Ueda Y. The road to chaos – 2. Future University — Nakodate. 2001. 255 p.