УДК 681.3.06

ЛОГИЧЕСКИЕ ОТНОШЕНИЯ НА РЕШЕТКАХ

© 2003 С. Д. Махортов

Воронежский государственный университет

В статье вводятся и изучаются бинарные отношения специального типа, действующие на решетках — математических структурах, имеющих хорошие перспективы применения в формальных системах представления знаний. Рассматриваемые отношения названы логическими, поскольку обладают всеми свойствами, характерными для отношений логического вывода, и могут служить математической основой решения задач автоматизации логического вывода. Для введенного класса отношений изучены следующие основные вопросы: существование, структура, эквивалентные преобразования, каноническая форма. Доказаны также некоторые полезные утверждения, относящиеся к общей теории решеток и отношений.

Статья продолжает разработку теоретико-множественного подхода к моделированию логического вывода.

В данной статье вводятся и изучаются бинарные отношения специального типа, действующие на решетках — математических структурах, имеющих хорошие перспективы применения в формальных системах представления знаний [1].

Основные результаты статьи могут рассматриваться как обобщение работ [2—3] в плане разработки теоретико-множественного подхода к моделированию логического вывода.

1. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ РЕШЕТОК И ОТНОШЕНИЙ

Определение 1.1. Решеткой называется полуупорядоченное множество $\mathbb{F}$, в котором наряду с отношением частичного порядка $\supseteq$ введены два двуместных оператора $\bigcap$ и $\bigcup$, такие, что при $\forall A, B \in \mathbb{F}$ справедливо

- $A \supseteq A \bigcap B$, $B \supseteq A \bigcap B$;
- если $C \in \mathbb{F}$ и $A \supseteq C$, $B \supseteq C$, то $A \bigcap B \supseteq C$;
- $A \bigcup B \supseteq A$, $A \bigcup B \supseteq B$;
- если $C \in \mathbb{F}$ и $C \supseteq A$, $C \supseteq B$, то $C \supseteq A \bigcup B$.

Решетка называется ограниченной, если содержит верхнюю и нижнюю грани — такие два элемента I, O, что $I \supseteq A \supseteq O$ для $\forall A \in \mathbb{F}$.

«Модельным» для данной работы примером ограниченной решетки является булеан — множество всех подмножеств 2^U некоторого универсума U, где $A \supseteq B$ означает включение B в A, а $\bigcap$ и $\bigcup$ — соответственно пересечение и объединение подмножеств. Нижней гранью булеана 2^U является пустое множество $\varnothing$, верхней — само U.

Мы будем обозначать также $\subseteq$ — отношение, обратное $\supseteq$. Если $A \supseteq B$, но $A \neq B$, то этот факт будем обозначать $A \supset B$. Аналогично определяется и отношение $A \subset B$. Чтобы подчеркнуть аналогию с булеаном, мы в дальнейшем будем называть операции $\bigcap$ и $\bigcup$ пересечением и объединением, а вышеуказанные отношения порядка как соответствующие включения множеств.

Нам понадобится следующее определение, сформулированное в [4].

Определение 1.2. Пусть X — некоторое подмножество решетки $\mathbb{F}$. Элемент $A \in X$ называется наименьшим элементом X, если он содержится в любом другом элементе X. Элемент $A \in X$ называется минимальным элементом X, если он не содержит никакого другого элемента из X.

Замечание 1.1. Из определения 1.2 вытекают следующие очевидные факты:

– если наименьший элемент существует, то он является единственным;

– наименьший элемент является и единственным минимальным;

– если минимальный элемент единственен и наименьший элемент существует, то они совпадают.

Точкой, или атомом, ограниченной решетки $\mathbb{F}$ называется минимальный элемент ее подмножества $\mathbb{F} \setminus O$. Решетка называется точечной, или атомно порожденной, если каждый ее элемент является объединением точек (атомов). Например, в булеане точками являются все подмножества, состоящие ровно из одного элемента универсума U. Очевидно, булеан является точечной решеткой. Всюду в дальнейшем мы будем рассматривать лишь точечные решетки.

Пусть дана решетка $\mathbb{F}$. Пусть c — некоторое свойство (или совокупность свойств), сформулированное для элементов $\mathbb{F}$. Произвольный элемент $R \in \mathbb{F}$ может обладать или не обладать этим свойством.

Определение 1.3. ***Замыканием*** элемента R ***относительно свойства*** c называется элемент $c(R) \in \mathbb{F}$, являющийся наименьшим в подмножестве элементов решетки, которые содержат R и обладают свойством c.

Замыкание произвольного элемента R в приведенной формулировке существует не для любого свойства c. В качестве отрицательного примера можно привести свойство на булеане "множество содержит не менее n элементов" при мощности R, меньшей n. Если же такое замыкание существует, то в силу определения оно единственно.

Теорема 1.1. Пусть $R_1, R_2 \in \mathbb{F}$ и существуют их замыкания $c(R_1), c(R_2)$ относительно некоторого свойства c. Пусть также выполнены условия

$$c(R_2) \supseteq R_1; \qquad (1.1)$$

$$c(R_1) \supseteq R_2. \qquad (1.2)$$

Тогда $c(R_1) = c(R_2)$.

Доказательство. Из (1.1) и определения замыкания $c(R_1)$ следует, что $c(R_2) \supseteq c(R_1) \supseteq R_1$. Соответственно из (1.2) имеем $c(R_1) \supseteq c(R_2) \supseteq R_2$. Следовательно, $c(R_1) = c(R_2)$. □

Пусть задано множество F, конечное или счетное. Напомним, что **бинарное отношение** R на некотором множестве F представляет собой совокупность упорядоченных пар элементов этого множества. Факт принадлежности упорядоченной пары элементов $a, b \in F$ отношению R будем обозначать $(a,b) \in R$. Поскольку различные отношения на одном и том же F являются множествами с общим универсумом $F \times F$, то в силу сказанного выше они образуют ограниченную решетку.

Отношение R на F называется **рефлексивным**, если оно (как множество) содержит все рефлексивные пары из F, т.е. для $\forall a \in F$ справедливо $(a,a) \in R$. Очевидно, что отношение, содержащее любое рефлексивное отношение (как элемент решетки отношений), само рефлексивно.

Отношение R называется **транзитивным**, если из $(a,b) \in R, (b,c) \in R$ следует $(a,c) \in R$ (для любых $a,b,c \in F$). Хорошо известно, что замыкание отношений относительно свойств рефлексивности и транзитивности существует и называется **рефлексивно-транзитивным замыканием** (РТЗ). Нам в дальнейшем понадобятся некоторые свойства РТЗ.

Определение 1.4. Пусть даны элементы $a, b \in F$ и некоторое отношение R на F. Если существует упорядоченный набор элементов $\vec{r} = (b_1, \ldots, b_m)$ ($b_1, \ldots, b_m \in F$, $0 \le m < \infty$), такой, что $(a,b_1), (b_1,b_2), \ldots, (b_m,b) \in R$ (в случае $(a,b) \in R$ предполагается $m = 0$), то указанный набор $\vec{r}$ будем называть **транзитивной цепочкой** (длины m), соединяющей a и b в R.

Лемма 1.2. Пусть $a,b \in F$ и R_1 - транзитивное отношение на F. Тогда, если существует транзитивная цепочка $\vec{r}_{ab}$, соединяющая a и b в R_1, то $(a,b) \in R_1$.

Утверждение леммы очевидным образом вытекает из определения 1.4 и транзитивности R_1. □

Справедлива также следующая

Лемма 1.3. Для данного отношения R на F рефлексивно-транзитивное замыкание представляет собой объединение R^* множества всех рефлексивных пар (a,a) ($a \in F$) с множеством всех упорядоченных пар $a,b \in F$, для которых существует соединяющая их транзитивная цепочка в R.

Доказательство. Очевидно, что определенное в условии леммы отношение R^* является рефлексивным. Покажем, что оно транзитивно. Пусть $(a,b), (b,c) \in R^*$. Тогда по условию леммы существуют транзитивные цепочки $\vec{r}_{ab}, \vec{r}_{bc}$, соединяющие соответственно (a,b) и (b,c) в R. Рассмотрим цепочку $\vec{r}$, составленную последовательно из $\vec{r}_{ab}, b, \vec{r}_{bc}$. Очевидно, $\vec{r}$ соединяет a и c в R. Отсюда следует, что $(a,c) \in R^*$, т.е. определенное в лемме отношение транзитивно.

Покажем, наконец, что оно наименьшее в смысле определения 1.2. Пусть R_1 — другое транзитивное отношение, содержащее R. Пусть также $(a,b) \in R^*$. Тогда, поскольку существует соединяющая (a,b) в $R \subseteq R_1$ транзитивная цепочка $\vec{r}_{ab}$, из леммы 1.2 следует, что $(a,b) \in R_1$. Следовательно, $R^* \subseteq R_1$. □

Замечание 1.2. Из леммы 1.3 непосредственно следует свойство: если $R_1 \subseteq R_2$, то $R_1^* \subseteq R_2^*$.

Справедливы также следующие утверждения.

Лемма 1.4. Для любых отношений R_1 и R_2, заданных на некотором F, выполнено $R_1^* \bigcup R_2^* \subseteq (R_1 \bigcup R_2)^*$.

Доказательство. Поскольку $R_1 \subseteq R_1 \bigcup R_2$ и $R_2 \subseteq R_1 \bigcup R_2$, то в силу замечания 1.2 имеем $R_1^* \subseteq (R_1 \bigcup R_2)^*$ и $R_2^* \subseteq (R_1 \bigcup R_2)^*$, откуда сразу следует утверждение леммы. □

Замечание 1.3. Доказанное в лемме включение вообще говоря не является равенством. Например, при $R_1 = \{(a,b)\}$, $R_2 = \{(b,c)\}$ имеем $R_1^* \bigcup R_2^* = \{(a,b),(b,c)\}$, но $(R_1 \bigcup R_2)^* = \{(a,b),(b,c),(a,c)\}$.

Замечание 1.4. Из приведенного примера также видно, что отношение $R_1^* \bigcup R_2^*$ в общем случае не транзитивно.

Лемма 1.5. Для произвольных R_1 и R_2 справедливо $(R_1 \bigcap R_2)^* \subseteq R_1^* \bigcap R_2^*$.

Доказательство. Пусть $(a,b) \in (R_1 \bigcap R_2)^*$. Тогда по лемме 1.3 существует транзитивная цепочка $\vec{r} = (b_1,...,b_m)$ такая, что $(a,b_1),(b_1,b_2),...,(b_m,b) \in R_1 \bigcap R_2$. Это означает также $(a,b_1),(b_1,b_2),...,(b_m,b) \in R_1$ и $(a,b_1),(b_1,b_2),\ldots,(b_m,b) \in R_2$. Отсюда снова по лемме 1.3 имеем $(a,b) \in R_1^*$ и $(a,b) \in R_2^*$, что и означает справедливость леммы 1.5. □

Замечание 1.5. И в лемме 1.5 включение в общем случае нельзя заменить равенством. При $R_1 = \{(a,b),(b,c)\}$, $R_2 = \{(a,d),(d,c)\}$ получим $(R_1 \bigcap R_2)^* = \varnothing$, в то время как $R_1^* \bigcap R_2^* = \{(a,c)\}$.

Замечание 1.6. В отличие от случая объединения, отношение $R_1^* \bigcap R_2^*$ при любых R_1 и R_2 транзитивно. Чтобы это установить, предположим противное. Пусть для некоторых $a,b,c \in F$ справедливо $(a,c) \notin R_1^* \bigcap R_2^*$, несмотря на $(a,b) \in R_1^* \bigcap R_2^*, (b,c) \in R_1^* \bigcap R_2^*$. В этом случае имеем $(a,b) \in R_1^*, (b,c) \in R_1^*$ и, следовательно, $(a,c) \in R_1^*$. Аналогично $(a,b) \in R_2^*, (b,c) \in R_2^*$ и поэтому $(a,c) \in R_2^*$. Таким образом, имеем $(a,c) \in R_1^* \bigcap R_2^*$, что противоречит сделанному предположению. □

Следствие 1.1. Таким образом, из лемм 1.4 и 1.5 вытекают соотношения

$$(R_1 \bigcap R_2)^* \subseteq R_1^* \bigcap R_2^* \subseteq R_1^* \subseteq R_1^* \bigcup R_2^* \subseteq (R_1 \bigcup R_2)^*;$$

$$(R_1 \bigcap R_2)^* \subseteq R_1^* \bigcap R_2^* \subseteq R_2^* \subseteq R_1^* \bigcup R_2^* \subseteq (R_1 \bigcup R_2)^*.$$

2. ОТНОШЕНИЯ НА РЕШЕТКАХ

В этом разделе мы будем рассматривать отношения на некоторой точечной решетке $\mathbb{F}$. Обозначим L_F естественным образом определенное на $\mathbb{F}$ отношение включения, задающее частичный порядок элементов $\mathbb{F}$. Очевидно, отношение включения является рефлексивным и транзитивным.

Определение 2.1. Отношение R на $\mathbb{F}$ назовем **дистрибутивным**, если любая пара вида $(A, B_1 \bigcup B_2)$ принадлежит ему в том и только том случае, когда принадлежат и пары $(A,B_1),(A,B_2)$.

Очевидно, отношение включения L_F является дистрибутивным.

Лемма 2.1. Пусть R — дистрибутивное отношение на $\mathbb{F}$ и элемент $B \in \mathbb{F}$ таков, что $B = B_1 \bigcup B_2 \bigcup \ldots$ — конечное или бесконечное (в смысле [5]) объединение. Тогда пара (A,B) принадлежит R в том и только том случае, когда отношению R принадлежат все пары $(A,B_1),(A,B_2),\ldots$.

Доказательство. Пусть $(A,B) \in R$. Покажем, что в этом случае $(A,B_k) \in R$ при любом k. Для этого обозначим $B^- = B_1 \bigcup \ldots \bigcup B_{k-1} \bigcup B_{k+1} \bigcup \ldots$. Тогда имеем $B = B^- \bigcup B_k$, и $(A,B_k) \in R$ по определению дистрибутивности. Пусть верно обратное, т.е. все пары $(A,B_1),(A,B_2),\ldots$ принадлежат R. Требуется доказать, что $(A,B) \in R$. Предположим противное. Тогда, вновь представляя B в виде $B = B^- \bigcup B_k$, из определения 2.1 получим, что $(A,B_k) \notin R$. Последнее противоречит сделанному предположению. □

Определение 2.2. Отношение R на $\mathbb{F}$ называется **логическим**, если оно содержит L_F, дистрибутивно и транзитивно.

Как следует из этого определения и предыдущих замечаний, отношение включения L_F само является наименьшим логическим отношением.

Определение 2.3. Логическим замыканием отношения R, заданного на $\mathbb{F}$, называется наименьшее логическое отношение, содержащее R.

Мы отложим ненадолго решение вопроса о существовании логического замыкания произвольного отношения R и вначале займемся выяснением структуры логических отношений.

Определение 2.4. Пусть даны элементы $A,B \in \mathbb{F}$ и некоторое отношение R на $\mathbb{F}$. Пусть существует упорядоченный набор элементов $\vec{r}_{AB} = (B_1,\ldots,B_m)$ ($B_1,\ldots,B_m \in \mathbb{F}$, $0 \le m < \infty$), такой, что в последовательности $(A,B_1),(B_1,B_2),\ldots,(B_m,B)$ для каждой пары вида (B_{k-1},B_k) справедливо $B_{k-1} \supseteq \hat{B}_{1,k-1},\hat{B}_{2,k-1},\ldots,\hat{B}_{p,k-1}; B_k \subseteq B_{1,k} \bigcup$

$\bigcup B_{2,k} \bigcup ... \bigcup B_{p,k}$, где каждая из пар $(\hat{B}_{1,k-1}, B_{1,k})$, $(\hat{B}_{2,k-1}, B_{2,k}),...,(\hat{B}_{p,k-1}, B_{p,k})$ принадлежит R либо является рефлексивной (для единообразия обозначений мы полагаем $B_0 = A, B_{m+1} = B$). Тогда указанный набор $\vec{r}_{AB}$ будем называть **дистрибутивно-транзитивной цепочкой** (длины m), соединяющей A и B в R.

Отметим, что в отличие от родственного определения 1.2, здесь пары $(A, B_1), (B_1, B_2), ...,$ (B_m, B) не обязаны принадлежать R.

В целях наглядности ряда последующих доказательств, совокупность пар элементов, участвующих в определении дистрибутивно-транзитивной цепочки $\vec{r}_{AB} = (B_1, ..., B_m)$, удобно представлять матрицей с переменным количеством элементов в столбцах:

$$M_{AB} = \begin{pmatrix} (\hat{B}_{1,0}, B_{1,1}) & (\hat{B}_{1,1}, B_{1,2}) & ... & (\hat{B}_{1,m-1}, B_{1,m}) & (\hat{B}_{1,m}, B_{1,m+1}) \\ (\hat{B}_{2,0}, B_{2,1}) & (\hat{B}_{2,1}, B_{2,2}) & ... & (\hat{B}_{2,m-1}, B_{2,m}) & (\hat{B}_{2,m}, B_{2,m+1}) \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ (\hat{B}_{p_1,0}, B_{p_1,1}) & (\hat{B}_{p_2,1}, B_{p_2,2}) & ... & (\hat{B}_{p_m,m-1}, B_{p_m,m}) & (\hat{B}_{p_{m+1},m}, B_{p_{m+1},m+1}) \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

где все элементы принадлежат R либо представляют собой рефлексивные пары;

$$\begin{gathered} B_{k-1} \supseteq \hat{B}_{1,k-1}, \hat{B}_{2,k-1}, ..., \hat{B}_{p_k,k-1}; \\ B_{1,k} \bigcup B_{2,k} \bigcup ... \bigcup B_{p_k,k} \supseteq B_k \\ (0 < k \le m+1). \end{gathered} \tag{2.2}$$

Определение 2.5. Матрицу вида (2.1) будем называть матрицей, реализующей цепочку $\vec{r}_{AB} = (B_1, ..., B_m)$. Свойство (2.2) будем называть дистрибутивно-транзитивным свойством матрицы M_{AB}.

Рассмотрим свойства некоторых операций над матрицами вида (2.1).

Лемма 2.2. Если «растянуть» произвольный столбец матрицы M_{AB}, записав некоторый его элемент несколько раз подряд, то новая матрица тем не менее будет обладать дистрибутивно-транзитивным свойством и реализовывать ту же самую цепочку $\vec{r}_{AB} = (B_1, ..., B_m)$.

Доказательство этого свойства очевидно.□

На основании леммы 2.2 столбцы матрицы можно выровнять и, не ограничивая общности, считать ее обычной прямоугольной матрицей.

Лемма 2.3. Пусть $\vec{r}_{AB} = (B_1, ..., B_m)$ — дистрибутивно-транзитивная цепочка, соединяющая (A, B) в R, и M_{AB} — матрица, реализующая эту цепочку. Рассмотрим матрицу $M_{k,AB}$, которая получена из M_{AB} вставкой после столбца с номером k дополнительного столбца, состоящего из рефлексивных пар вида $T_{jk} = (B_{jk}, B_{jk})$. Новая матрица $M_{k,AB}$ обладает дистрибутивно-транзитивным свойством и реализует цепочку $\vec{r}_{k,AB} = (B_1, ...B_{k-1}, \tilde{B}_k, B_k, ..., B_m)$, где $\tilde{B}_k = B_{1,k} \bigcup B_{2,k} \bigcup ... \bigcup B_{p_k,k}$, соединяющую (A, B) в R.

Доказательство этого утверждения также очевидно. □

Пусть $(\hat{B}, B)$ — некоторый произвольный элемент матрицы (2.1). Предположим, что для него построена собственная матрица $M_{\hat{B}B}$, в свою очередь обладающая дистрибутивно-транзитивным свойством. Этой матрицей, в частности, может быть матрица, которая реализует любую дистрибутивно-транзитивную цепочку, соединяющую $(\hat{B}, B)$ в R. Тогда элемент $(\hat{B}, B)$ может быть “заменен” в M_{AB} своей матрицей $M_{\hat{B}B}$, после чего исходная матрица увеличится в размерах, но сохранит дистрибутивно-транзитивное свойство. Опишем эту операцию схематически.

В силу леммы 2.2 можно считать, что M_{AB} и $M_{\hat{B}B}$ являются прямоугольными. Пусть (l, k) — координаты элемента $(\hat{B}, B)$ в M_{AB}; $M_{AB} = \{a_{i,j}\}, i = 1, ..., p, j = 1, ..., m$; $M_{\hat{B}B} = \{b_{i,j}\}$, $i = 1, ..., q, j = 1, ..., n$. Новую матрицу определим следующим образом:

$$\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,k-1} & a_{1,k} & T_1 & \dots & T_1 & a_{1,k+1} & \dots & a_{1m} \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,k-1} & a_{2,k} & T_2 & \dots & T_2 & a_{2,k+1} & \dots & a_{2m} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{l-1,1} & a_{l-1,2} & \dots & a_{l-1,k-1} & a_{l-1,k} & T_{i-1} & \dots & T_{i-1} & a_{l-1,k+1} & \dots & a_{l-1,m} \\
a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{l.k-1} & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} & a_{l,k+1} & \dots & a_{lm} \\
a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{l,k-1} & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} & a_{l,k+1} & \dots & a_{lm} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{l,k-1} & b_{q1} & b_{q2} & \dots & b_{qn} & a_{l,k+1} & \dots & a_{lm} \\
a_{l+1,1} & a_{l+1,2} & \dots & a_{l+1,k-1} & a_{l+1,k} & T_{i+1} & \dots & T_{i+1} & a_{l+1,k+1} & \dots & a_{l+1,m} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{p,k-1} & a_{p,k} & T_p & \dots & T_p & a_{p,k+1} & \dots & a_{pm}
\end{pmatrix}$$

Здесь через T_j обозначены рефлексивные пары, получаемые из предыдущих по строке пар использованием вторых элементов, т.е. для $(\hat{B}_{j,k-1}, B_{j,k})$ берем $T_j = (B_{j,k}, B_{j,k})$. Элементы T_j играют в определенном смысле фиктивную роль, заполняя пустоты матрицы с сохранением ее свойств.

Определение 2.6. Описанную операцию назовем дистрибутивно-транзитивной вставкой (или просто вставкой) матрицы $M_{\hat{B}B}$ в матрицу M_{AB}.

Замечание 2.1. Из приведенного построения и леммы 2.2 следует, что операция вставки не нарушает дистрибутивно-транзитивного свойства исходной матрицы (если, конечно, вставляемая матрица сама обладает этим же свойством относительно $\hat{B}, B$). После вставки цепочка $\vec{r}_{AB} = (B_1, \dots, B_m)$, реализуемая исходной матрицей M_{AB}, заменяется другой цепочкой $\vec{r}_{k,AB} = (B_1, \dots B_{k-2}, B_{k1}, \dots, B_{kl}, B_{k+1}, \dots, B_m)$, в которой вместо пары B_{k-1}, B_k содержатся элементы $B_{k1}, \dots, B_{kl}$ (формируются аналогично $\tilde{B}_k$ в лемме 2.3). Цепочка $\vec{r}_{k,AB}$ также соединяет (A, B), но при этом реализуется новой матрицей.

Определение 2.7. Пусть даны элементы $A, B, C \in \mathbb{F}$ и некоторое отношение R на $\mathbb{F}$. Пусть существуют дистрибутивно-транзитивные цепочки $\vec{r}_{AB}, \vec{r}_{BC}$, соединяющие соответственно (A, B) и (B, C) в R. Цепочка $\vec{r}_{AC} = \vec{r}_{AB}\vec{r}_{BC}$, составленная последовательно из $\vec{r}_{AB}, B, \vec{r}_{BC}$, называется транзитивным (или последовательным) объединением цепочек $\vec{r}_{AB}, \vec{r}_{BC}$.

Замечание 2.2. Очевидно, $\vec{r}_{AC} = \vec{r}_{AB}\vec{r}_{BC}$ является дистрибутивно-транзитивной цепочкой, соединяющей (A, C) в R.

Определение 2.8. Пусть даны элементы $A, B, C \in \mathbb{F}$ и некоторое отношение R на $\mathbb{F}$. Пусть существуют дистрибутивно-транзитивные цепочки $\vec{r}_{AB} = (B_1, \dots, B_m), \vec{r}_{AC} = (C_1, \dots, C_n)$, соединяющие соответственно (A, B) и (A, C) в R. Пусть, для определенности, $m \geq n$. Дистрибутивным (или параллельным) объединением цепочек $\vec{r}_{AB}, \vec{r}_{AC}$ называется цепочка $\vec{r}_{A(B+C)} = \vec{r}_{AB} + \vec{r}_{AC} = (B_1 \bigcup C_1, B_2 \bigcup C_2, \dots, B_n \bigcup$ $\bigcup C_n, B_{n+1} \bigcup C_n, B_{n+2} \bigcup C_n, \dots, B_m \bigcup C_n)$.

Лемма 2.4. Цепочка $\vec{r}_{A(B+C)}$ является дистрибутивно-транзитивной цепочкой, соединяющей $(A, B \bigcup C)$ в R.

Доказательство. Чтобы доказать лемму, построим для $\vec{r}_{A(B+C)}$ матрицу вида (2.1):

$$\begin{pmatrix}
(\hat{B}_0, B_{1,1}) & (\hat{B}_1, B_{1,2}) & \dots & (\hat{B}_n, B_{1,n+1}) & (\hat{B}_{n+1}, B_{1,n+2}) & \dots & (\hat{B}_m, B_{1,m+1}) \\
(\hat{B}_0, B_{2,1}) & (\hat{B}_1, B_{2,2}) & \dots & (\hat{B}_n, B_{2,n+1}) & (\hat{B}_{n+1}, B_{2,n+2}) & \dots & (\hat{B}_m, B_{2,m+1}) \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
(\hat{B}_0, B_{p_1,1}) & (\hat{B}_1, B_{p_2,2}) & \dots & (\hat{B}_n, B_{p_{n+1},n+1}) & (\hat{B}_{n+1}, B_{p_{n+2},n+2}) & \dots & (\hat{B}_m, B_{p_{m+1},m+1}) \\
(\hat{C}_0, C_{1,1}) & (\hat{C}_1, C_{1,2}) & \dots & (\hat{C}_n, C_{1,n+1}) & (C_{1,n+1}, C_{1,n+1}) & \dots & (C_{1,n+1}, C_{1,n+1}) \\
(\hat{C}_0, C_{2,1}) & (\hat{C}_1, C_{2,2}) & \dots & (\hat{C}_n, C_{2,n+1}) & (C_{2,n+1}, C_{2,n+1}) & \dots & (C_{2,n+1}, C_{2,n+1}) \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
(\hat{C}_0, C_{q_1,1}) & (\hat{C}_1, C_{q_2,2}) & \dots & (\hat{C}_n, C_{q_{n+1},n+1}) & (C_{q_{n+1},n+1}, C_{q_{n+1},n+1}) & \dots & (C_{q_{n+1},n+1}, C_{q_{n+1},n+1})
\end{pmatrix}$$

Элементы этой матрицы являются рефлексивными парами либо, в силу свойств цепочек $\vec{r}_{AB}, \vec{r}_{AC}$, принадлежат R. Кроме того, благодаря свойствам цепочек $\vec{r}_{AB}, \vec{r}_{AC}$, выполняются следующие включения, обеспечивающие дистрибутивно-транзитивное свойство матрицы:

$$\hat{B}_{1,k-1}, \hat{B}_{2,k-1}, \ldots, \hat{B}_{p_{k-1},k-1}, \hat{C}_{1,k-1}, \hat{C}_{2,k-1}, \ldots, \hat{C}_{q_{k-1},k-1} \subseteq \subseteq B_{k-1} \cup C_{k-1};$$

$$B_{1,k} \cup B_{2,k} \cup \ldots \cup B_{p_k,k} \cup C_{1,k} \cup C_{2,k} \cup \ldots \cup C_{q_k,k} \supseteq \supseteq B_k \cup C_k \text{ при } 0 < k \le n+1;$$

$$\hat{B}_{1,k-1}, \hat{B}_{2,k-1}, \ldots, \hat{B}_{p_{k-1},k-1}, C_{1,n+1}, C_{2,n+1}, \ldots, C_{q_{n+1},n+1} \subseteq \subseteq B_{k-1} \cup C_{n+1};$$

$$B_{1,k} \cup B_{2,k} \cup \ldots \cup B_{p_k,k} \cup C_{1,n+1} \cup C_{2,n+1} \cup \ldots \cup C_{q_{n+1},n+1} \supseteq \supseteq B_k \cup C_{n+1} \text{ при } n+1 < k \le m+1.$$

Лемма доказана. □

Лемма 2.5. Пусть R_1 — логическое отношение на $\mathbb{F}$ и $A, B \in \mathbb{F}$. Тогда, если существует соединяющая (A, B) в R_1 дистрибутивно-транзитивная цепочка $\vec{r}_{AB}$, то $(A, B) \in R_1$.

Доказательство. Пусть $\vec{r}_{AB} = (B_1, \ldots, B_m)$. Рассмотрим соответствующую цепочке $\vec{r}_{AB}$ матрицу вида (2.1). По условию леммы все элементы этой матрицы принадлежат R_1. Будем последовательно просматривать столбцы матрицы, двигаясь слева направо. Благодаря способу ее построения справедливо $\hat{B}_{1,0}, \hat{B}_{2,0}, \ldots, \hat{B}_{p_1,0} \subseteq A$. Отсюда, поскольку R_1 содержит отношение включения L_F, имеем $(A, \hat{B}_{1,0}), (A, \hat{B}_{2,0}), \ldots, (A, \hat{B}_{p_1,0}) \in R_1$. Далее, в силу рефлексивности и транзитивности R_1, из первого столбца матрицы получим $(A, B_{1,1}), (A, B_{2,1}), \ldots, (A, B_{p_1,1}) \in R_1$. Используя свойство дистрибутивности R_1, из последнего соотношения находим, что $(A, B_{1,1} \cup B_{2,1} \cup \ldots \cup B_{p_1,1}) \in \in R_1$. Далее, поскольку имеет место вложение $B_{1,1} \cup B_{2,1} \cup \ldots \cup B_{p_1,1} \supseteq B_1$, имеем $(A, B_1) \in R_1$. Переходя к следующему столбцу матрицы и продолжая описанный процесс, последовательно получим, что отношению R_1 принадлежат пары $(A, B_2), (A, B_3), \ldots, (A, B_m)$ и, наконец, (A, B). □

В процессе доказательства леммы мы установили также

Следствие 2.1. Пусть R_1 — логическое отношение на $\mathbb{F}$ и $A, B \in \mathbb{F}$. Тогда, если $\vec{r}_{AB} = (B_1, \ldots, B_m)$ — дистрибутивно-транзитивная цепочка, соединяющая (A, B) в R_1, то $(A, B_1), (B_1, B_2), \ldots, (B_m, B) \in R_1$.

Теорема 2.1. Для произвольного отношения R на $\mathbb{F}$ логическое замыкание R^L существует и представляет собой объединение отношения L_F с множеством всех упорядоченных пар $A, B \in \mathbb{F}$, для которых есть соединяющая в R дистрибутивно-транзитивная цепочка.

Доказательство. Очевидно, что определенное в условии теоремы отношение содержит L_F. Докажем, что R^L дистрибутивно. Предположим, что $(A, B), (A, C) \in R^L$. Нужно показать, что $(A, B \cup C) \in R^L$. Пусть $\vec{r}_{AB}, \vec{r}_{AC}$ — дистрибутивно-транзитивные цепочки, соединяющие соответственно (A, B) и (A, C) в R. Согласно лемме 2.4, $\vec{r}_{A(B+C)} = \vec{r}_{AB} + \vec{r}_{AC}$ является дистрибутивно-транзитивной цепочкой, соединяющей $(A, B \cup C)$ в R. Это и означает $(A, B \cup C) \in R^L$.

Покажем теперь, что отношение R^L транзитивно. Пусть $(A, B), (B, C) \in R^L$. Тогда существуют дистрибутивно-транзитивные цепочки $\vec{r}_{AB}, \vec{r}_{BC}$, соединяющие соответственно (A, B) и (B, C) в R. Рассмотрим цепочку $\vec{r}_{AC} = \vec{r}_{AB}\vec{r}_{BC}$ — транзитивное объединение исходных цепочек. Согласно замечанию 2.2, $\vec{r}_{AC}$ является дистрибутивно-транзитивной цепочкой, соединяющей A и C в R. Следовательно, $(A, C) \in R^L$, т.е. определенное в теореме отношение транзитивно.

Таким образом, отношение R^L — логическое. Покажем, наконец, что оно наименьшее (в смысле определения 1.2). Пусть R_1 — другое логическое отношение, содержащее R. Пусть также $(A, B) \in R^L$. Тогда, поскольку существует соединяющая (A, B) в $R \subseteq R_1$ цепочка $\vec{r}_{AB}$, из леммы 2.5 следует, что $(A, B) \in R_1$. Следовательно, $R^L \subseteq R_1$. □

Логические отношения могут служить математической основой решения ряда прикладных задач, связанных с автоматизацией логического вывода. В приложениях естественно возникает проблема минимизации представления логического отношения R. Очевидным решением является такой способ, когда в памяти компьютера хранится лишь уникальная часть информации о данном отношении, а остальная информация может быть получена с использованием общих свойств логических отношений. Под уникальной частью подразумевается подобранное по определенным критериям вложенное отношение R_0, из которого R получается построением логического замыкания. В связи с этим возникают также вопросы преобразования базовых отношений, при которых логическое замыкание остается без изменения. Эти вопросы в существенно более частной постановке освещались в работе [2].

Определение 2.9. Пусть R — логическое отношение на $\mathbb{F}$. Отношение R_0 на $\mathbb{F}$ называется **базовым** для R, если R является логическим замыканием отношения R_0 ($R = R_0^L$).

Определение 2.10. Два отношения R_1 и R_2, заданные на $\mathbb{F}$, будем называть **логически эквивалентными** (или, в контексте данной работы, просто эквивалентными), если их логические замыкания совпадают. Для таких отношений введем обозначение $R_1 \sim R_2$.

Теорема 2.2. Пусть R_1, R_2, R_3, R_4 — отношения на $\mathbb{F}$. Если при этом $R_1 \sim R_2$ и $R_3 \sim R_4$, то $R_1 \bigcup R_3 \sim R_2 \bigcup R_4$.

Доказательство. Итак, требуется доказать равенство $(R_1 \bigcup R_3)^L = (R_2 \bigcup R_4)^L$ как соотношение двух множеств. Пусть $(A, B) \in (R_1 \bigcup R_3)^L$. Это означает, что существует дистрибутивно-транзитивная цепочка $\vec{r}_{AB} = (B_1, \ldots, B_m)$, соединяющая (A, B) в $R_1 \bigcup R_3$. Будем рассматривать реализующую ее матрицу M_{AB} вида (2.1).

Пусть $(\hat{B}_{j,k-1}, B_{j,k})$ — произвольный элемент этой матрицы, не являющийся рефлексивной парой. По построению он принадлежит $R_1 \bigcup R_3$. Предположим, что он принадлежит R_1. Отсюда по условию теоремы $(\hat{B}_{j,k-1}, B_{j,k}) \in R_1{}^L = R_2{}^L$. Последнее означает, что существует дистрибутивно-транзитивная цепочка $\vec{r}$, соединяющая $(\hat{B}_{j,k-1}, B_{j,k})$ в R_2. Эта цепочка реализуется матрицей, состоящей из рефлексивных пар или элементов R_2. Произведем вставку этой матрицы в M_{AB} (см. определение 2.6). Обрабатывая таким образом каждый элемент исходной матрицы M_{AB}, в конце концов получим новую матрицу, согласно замечанию 2.1 обладающую дистрибутивно-транзитивным свойством и состоящую из рефлексивных пар или элементов $R_2 \bigcup R_4$. Это означает, что $(A, B) \in (R_2 \bigcup R_4)^L$.

Таким образом, мы доказали вложение $(R_1 \bigcup R_3)^L \subseteq (R_2 \bigcup R_4)^L$. Обратное вложение доказывается аналогично. □

Следствие 2.3. Пусть R_1, R_2, R — отношения на $\mathbb{F}$. Если при этом $R_1 \sim R_2$, то $R_1 \bigcup R \sim R_2 \bigcup R$.

Остановимся теперь на структуре базовых отношений для логических отношений.

Определение 2.11. Отношение R на $\mathbb{F}$ называется каноническим, если оно задается множеством пар вида (A, a), где $A \in \mathbb{F}$, a — точка в $\mathbb{F}$.

Теорема 2.3. Для любого отношения R на $\mathbb{F}$ существует логически эквивалентное ему каноническое отношение R_0.

Доказательство. Пусть $R = \{(A_1, B_1), (A_2, B_2), \ldots\}$, где $A_1, A_2, \ldots \in \mathbb{F}; B_1, B_2, \ldots \in \mathbb{F}$. Рассмотрим произвольную пару $(A_k, B_k) \in R$. Введем обозначения $R_k = \{(A_k, B_k)\}; R^- = R \setminus R_k$. Таким образом, $R = R^- \bigcup R_k$. Пусть $B_k = b_{k1} \bigcup b_{k2} \bigcup \ldots$, где b_{kj} — точки $\mathbb{F}$. Наряду с отношением R_k, состоящим из единственной пары элементов, рассмотрим еще одно отношение $\bar{R}_k = \{(A_k, b_{k1}), (A_k, b_{k2}), \ldots\}$, в котором составляющие B_k точки разнесены по отдельным парам. В силу его свойства дистрибутивности (лемма 2.1), логическое замыкание каждого из отношений R_k, $\bar{R}_k$ содержит как R_k, так и $\bar{R}_k$. Поэтому по теореме 1.1 эти замыкания совпадают, т.е. R_k и $\bar{R}_k$ логически эквивалентны. Применяя теперь к отношениям R_k, $\bar{R}_k$, R^- следствие 2.3, получим $R^- \bigcup R_k \sim R^- \bigcup \bar{R}_k$. Это означает, что при замене в R произвольной пары (A_k, B_k) соответствующей ей совокупностью канонических пар, мы получаем отношение, логически эквивалентное исходному R. Заменяя таким образом каждую пару в R, придем к эквивалентному каноническому отношению. □

ЛИТЕРАТУРА

1. *Sowa, J. F.* Knowledge Representation: Logical, Philosophical, and Computational Foundations. Brooks Cole Publishing Co., Pacific Grove, CA, 1999.

2. *Махортов С.Д.* Порождающие множества в продукционных системах. // Вестник ВГУ. Серия физика, математика. — Воронеж, 2002, 2. — С. 69—76.

3. *Махортов С.Д.* О теоретико-множественном подходе к формализации логического вывода. // Вестник факультета ПММ: Вып. 4. — Воронеж: ВГУ, 2003 — С. 178—185.

4. *Биркгоф Г.* Теория решеток: Пер. с англ. — М.: Наука, 1984. — 568 с.

5. *Куратовский К., Мостовский А.* Теория множеств. Пер. с англ. — М: Мир, 1970. — 416 с.